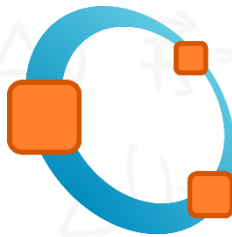


Objetivo:

Aproximación numérica de soluciones en sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales.

**CONTENIDO:**

- ✓ Preliminares.
- ✓ Sistema no lineal de Lorenz en \mathbb{R}^4 .
- ✓ Visualización gráfica de las trayectorias de fase.

Capítulo**4****CAPITULO IV. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES.****4.1 Modelo de proyección de Velezmoro.**

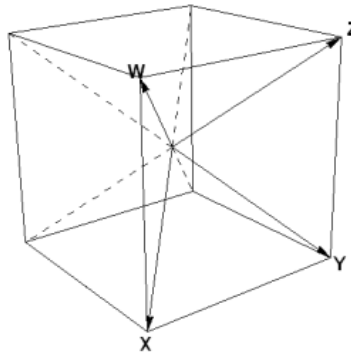
Velezmoro et al, (2019), propusieron un modelo matemático que permite graficar objetos 4D en 3D siguiendo el mismo método para visualizar objetos 3D en un espacio bidimensional. Los modelos matemáticos se construyen utilizando un proyector de hologramas 3D.

4.1.1 Modelo de proyección 4D

Considere un cubo de dos unidades de longitud cuyo centro es el origen de coordenadas del espacio tridimensional. Cuatro ejes de coordenadas, x, y, z y w están ubicados en el cubo. (ver figura 4.1).

FIGURA 4.1

Cubo con cuatro ejes coordenados.



Nota. En las diagonales del cubo se ubican los cuatro ejes coordenados x, y, z, w .

Considere los vectores unitarios:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) & e_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ e_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) & e_4 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

en la dirección de los ejes x, y, z y w (Ver figura 4.2).

Con los vectores e_1, e_2, e_3, e_4 se construye una proyección que por sí misma constituirá el modelo para graficar objetos 4D en un ambiente 3D.

Se define la proyección de la siguiente manera:

$$\psi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tal que

$$\psi(p) = p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 + p_4 e_4, \forall p \in \mathbb{R}^4.$$

La proyección ψ como caso particular se escribe de la siguiente forma:

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{3}}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4, -p_1 + p_2 + p_3 - p_4, -p_1 - p_2 + p_3 + p_4), \forall p \in \mathbb{R}^4.$$

4.2. Sistema de Lorenz 4D

Si Gang et al, (2011), propusieron el nuevo sistema de Lorenz en cuatro dimensiones (4D). Este sistema es no lineal en la segunda y tercera ecuación, tiene cuatro variables de estado x, y, z y w y cuatro parámetros positivos a, b, c y d .

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y - x) \\ \frac{dx}{dt} = cx - y - xz + w \\ \frac{dx}{dt} = xy - bz \\ \frac{dx}{dt} = -dx \end{cases} \quad (4.1)$$

También se puede elegir otros modelos de Lorenz 4D y visualizar de forma gráfica las superficies de fase y analizar su comportamiento cualitativo.

4.3. Algoritmo para graficar diagramas de fase de un sistema no lineal en 4D.

En esta subsección se muestran los pasos que permitieron reducir soluciones 4D en 3D para graficar diagramas de fase y realizar análisis cualitativo del sistema no lineal de Lorenz 4D.

Paso 1. Resolver el sistema utilizando un método numérico.

Paso 2. Utilice el modelo de proyección de Velezmoro e Ipanaque para reducir soluciones 4D en 3D y visualizar diagramas de fase del sistema.

4.4. Programa SystemLorenz4D.

El programa SystemLorenz4D es una implementación del algoritmo de la Sección 4.3 en el software científico Octave, este programa permite transformar soluciones 4D en 3D, graficar diagramas de fase y ciclos límites atractores para realizar comportamientos cualitativos del sistema.

Implementación del paso 1.

Este programa permitió encontrar soluciones aproximadas del sistema de Lorenz 4D.

```
a=10; b=8/3; c=28; d=0.5;
```

```
Lorenz4D=@(t,x)[a*(x(2)-x(1));c*x(1)-x(1)*x(3)-x(2)+x(4);x(1)*x(2)-b*x(3);-d*x(1)];
```

```
x0=[0.1 2 0.1 0.1];
```

```
t=linspace(0, 100, 10100); % tiempo.
```

```
[t, x] = ode45 (Lorenz4D, t, x0);
```

```
disp(x)
```

Implementación del paso 2.

Este programa permitió reducir las soluciones 4D en 3D.

```
a=10;b=8/3;c=28;d=0.5;
```

```

Lorenz4D=@(t,x)[a*(x(2)-x(1));c*x(1)-x(1)*x(3)-x(2)+x(4);x(1)*x(2)-b*x(3);-
d*x(1)];
x0=[0.1 2 0.1 0.1]; % condición inicial
t=linspace(0,100,10100); % tiempo
[t,x] = ode45 (Lorenz4D,t,x0);
p1=(1/sqrt(3)).
*[x(:,1)+x(:,2)+x(:,3)+x(:,4)];
p2=(1/sqrt(3)).
*[-x(:,1)+x(:,2)+x(:,3)-x(:,4)];
p3=(1/sqrt(3)).
*[-x(:,1)-x(:,2)+x(:,3)+x(:,4)];
plot3(p1,p2,p3,'k','linewidth',1.5)
xlabel('Axis x'); ylabel('Axis y'); zlabel('Axis z'); grid; view(-10,60)

```

4.5 Aplicación del algoritmo al nuevo sistema de Lorenz 4D.

La justificación de los comportamientos cualitativos del sistema de Lorenz 4D se dio tomando diferentes valores de los parámetros de control.

Por ejemplo, Si Gang et al, (2011), al tomar los valores $a=10$; $b=8/3$; $c=28$; $d=0.5$ obtuvo un sistema hipercaótico. (Ver ecuación 4.2).

$$\begin{cases} x' = 10(y - x) \\ y' = 28x - y - xz + w \\ z' = xy - (8/3)z \\ w' = -0.5x \end{cases} \quad (4.2)$$

Resolvemos el nuevo sistema de Lorenz 4D utilizando el método numérico de Runge Kutta (biblioteca ode45 en Octave). Se muestra la solución aproximada para las primeras 20 iteraciones. (Ver tabla 1).

TABLA 1

SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL SISTEMA (4.2).

Nº	x	y	z	w
01	0	2.0000	0	0
02	0.1886	2.0066	0.0019	-0.0005
03	0.3623	2.0631	0.0073	-0.0018
04	0.5271	2.1657	0.0164	-0.0040
05	0.6882	2.3119	0.0293	-0.0071
06	0.8500	2.5009	0.0466	-0.0109
07	1.0164	2.7330	0.0692	-0.0155
08	1.1911	3.0093	0.0984	-0.0209
09	1.3777	3.3320	0.1356	-0.0273
10	1.5794	3.7041	0.1829	-0.0346
11	1.7996	4.1294	0.2427	-0.0430
12	2.0418	4.6125	0.3184	-0.0525
13	2.3099	5.1582	0.4141	-0.0632
14	2.6074	5.7727	0.5347	-0.0754
15	2.9383	6.4627	0.6862	-0.0891
16	3.3068	7.2350	0.8770	-0.1045
17	3.7176	8.0963	1.1171	-0.1219
18	4.1754	9.0536	1.4186	-0.1414
19	4.6847	10.1118	1.7972	-0.1634
20	5.2515	11.2799	2.2702	-0.1879

Con la aplicación del modelo de Velezmoro e Ipanaque, la solución del sistema 4D se reduce a una solución 3D. Se muestran a continuación los resultados. (Ver tabla 2).

TABLA 2.

REDUCCIÓN DE LA SOLUCIÓN 4D EN 3D.

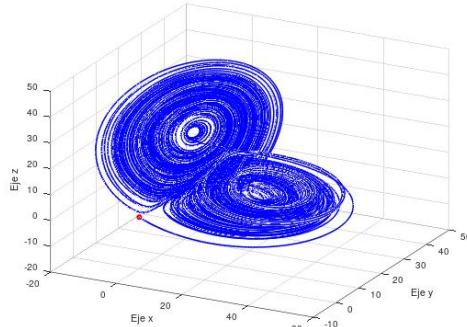
Nº	x	y	z
01	1.1547	1.1547	-1.1547
02	1.2682	1.0510	-1.2666
03	1.4035	0.9872	-1.3971
04	1.5618	0.9578	-1.5476
05	1.7450	0.9584	-1.7193
06	1.9553	0.9863	-1.9141
07	2.1958	1.0400	-2.1337
08	2.4699	1.1186	-2.3804
09	2.7817	1.2224	-2.6566
10	3.1360	1.3522	-2.9648
11	3.5385	1.5101	-3.3078
12	3.9954	1.6983	-3.6883
13	4.5143	1.9201	-4.1091
14	5.1034	2.1797	-4.5731
15	5.7724	2.4825	-5.0829
16	6.5323	2.8346	-5.6403
17	7.3953	3.2434	-6.2462
18	8.3751	3.7171	-6.9003
19	9.4861	4.2653	-7.5995
20	10.7466	4.8997	-8.3422

4.6 Análisis de estabilidad en el origen

Caso 1. Si $a > 0$, $b = 8/3$, $c = 28$ y $d = 0.5$, el primer valor propio es real negativo, el segundo es real positivo, el tercero es real positivo y el cuarto es real negativo. El origen es un punto crítico hiperbólico. (Ver figura 4.2).

FIGURA 4.2

Punto crítico hiperbólico

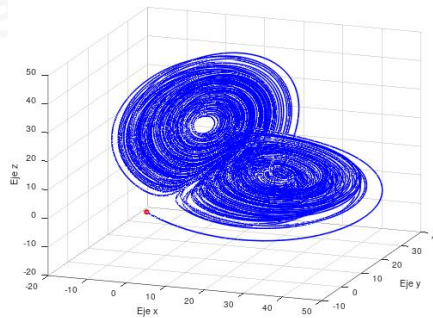


Nota. Las trayectorias salen del origen y vuelven a entrar.

Caso 2. Si $a=10$, $b>0$, $c=28$ y $d=0.5$, el primer valor propio es real negativo, el segundo es real positivo, el tercero es real positivo y el cuarto es real negativo. El origen es un punto crítico hiperbólico. (Ver figura 4.3).

FIGURA 4.3

Punto crítico hiperbólico

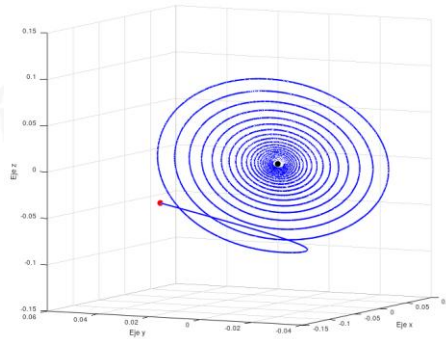


Nota. Las trayectorias salen del origen y vuelven a entrar.

Caso 3. Si $a=10$, $b=8/3$, $0<c<0.95455$ y $d=0.5$, el primer valor propio es real negativo, el segundo es complejo con parte real negativa, el tercero es complejo con parte real negativa y el cuarto es real negativo. El origen es un espiral estable. (Ver figura 4.4).

FIGURA 4.4

Estabilidad en el origen.

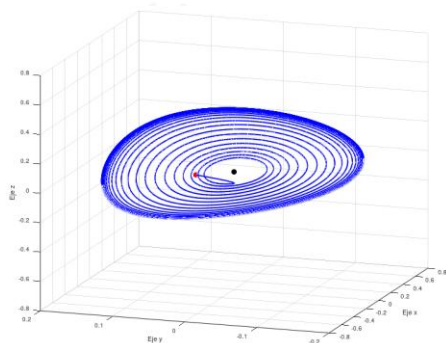


Nota. Cuando $c=0.9$, las trayectorias convergen al punto crítico en forma de espiral.

Caso 4. Si $a=10$, $b=8/3$, $0.95445 < c < 2.6$ y $d=0.5$, el primer valor propio es real negativo, el segundo es complejo con parte real positiva, el tercero es complejo con parte real positiva y el cuarto es real negativo. El origen es un espiral inestable. (Ver figura 4.5).

FIGURA 4.5

Inestabilidad en el origen.

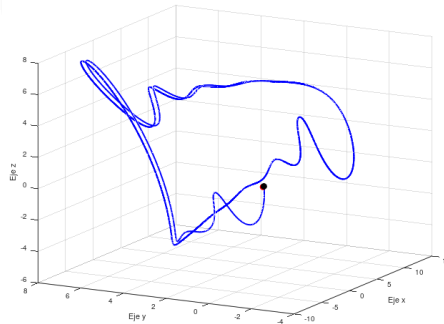


Nota. Cuando $a = 10$, $b = 8/3$, $d = 0.5$ y $c = 1$, las trayectorias divergen del punto crítico y forma un ciclo limite atractor.

Caso 5. Si $a=10$, $b=8/3$, $c > 2.6$ y $d=0.5$, el primer valor propio es real negativo, el segundo es real positivo, el tercero es real positivo y el cuarto es real negativo. El origen es un punto crítico hiperbólico. (Ver figura 4.6).

FIGURA 4.6

Inestabilidad en el origen.

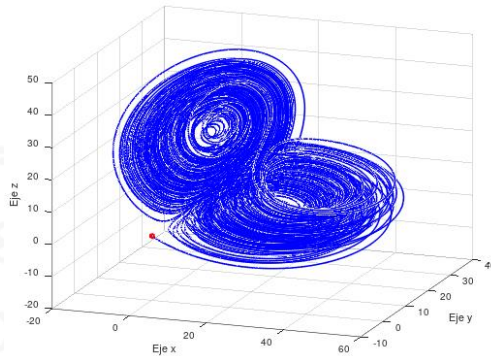


Nota. Cuando $a = 10, b = 8/3, d = 0.5$ y $c = 5$, las trayectorias divergen del punto crítico y forma un ciclo limite atractor

Caso 6. Si $a=10, b=8/3, c=28$ y $d>0$, el primer valor propio es real negativo, el segundo es real positivo, el tercero es real positivo y el cuarto es real negativo. El origen es un punto hiperbólico. (Ver figura 4.7).

FIGURA 4.7

Inestabilidad en el origen.



Nota. Cuando $a = 10, b = 8/3, d = 1$ y $c = 28$, las trayectorias salen y vuelven al origen.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Burden, R., & Faires, D. (2022). *Análisis Numérico* (Thomson Learning ed., Vol. 07).
- Escobar Gomez, E. (2021). *Visualizacion Grafica del atractor extraño de Lorens y Rossler en 3D y 4D*. (Vol. 01). Piura, Perú: Sieteventos.
- Espinoza ramos, E. (2000). *Análisis Matemático I* (Vol. 03). Lima, Peru: J. J.
- Espinoza Ramos, e. (2002). *Análisis Matemático IV* (Vol. 01). Lima, Peru: J. J.
- Mitacc, M., & Toro, I. (1992). *Temas de cálculo II* (Vol. 02). Lima, Peru: Impoffot.
- Mitacc, m., & Toro, L. (2011). *Temas de cálculo I* (Vol. 01). Lima, Peru: San Marcos.
- Si Gang, Q., Cao, H., & Zhang Yan, B. (2011). A new four-dimensional hyperchaotic Lorenz system and its adaptive control. *Sociedad Física China e IOP Publishing Ltd*, (Vol 20), págs. 1-9. doi:10.1088/1674-1056/20/1/010509.
- Velezmoro, R., Ipanaque, R., & Mechato, J. (2019). A mathematica package for visualizing objects immersed in R^4 . *International Conference on Computational Science and Its Applications (ICCSA)*. (págs. 479-493.). Cham: Springer. doi:https://doi.org/10.1007/978-3-030-24311-1_35