

## CAPITULO II. CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

### 2.1 Limite de una función de variable real.

Sea  $f(x)$  una función que se aproxima a un número finito  $L$  tomando a  $x$  suficientemente cerca pero distinto del valor  $a$ , por la izquierda como por la derecha de  $a$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ . (Mitacc et al. 2011).

La representación  $x \rightarrow a^-$  se usará para señalar que  $x$  tiende a  $a$  por la izquierda y  $x \rightarrow a^+$  para representar que  $x$  tiende a  $a$  por la derecha. De esta manera, los límites  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  tienen un valor común  $L$ .

**Nota 1.** En esta sección se calculan los límites de dos formas:

- 1) Usando el comando limit de Octave.
- 2) De forma numérica.

**Ejemplo 2.1.** Sea  $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$ ,  $\forall x \in [-3,3]$ . Calcular, si existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  y trazar la gráfica de  $f(x)$ .

#### Solución en octave

- Usando el comando limit.

Paso1. Se carga el paquete de simbólico de la siguiente manera:

```
Ventana de comandos
>> pkg load symbolic
>> syms x
>> |
```

Paso2. Se ingresa la función de forma anónima.

```
Func=@(x) (1-cos(x))/sin(x);
```

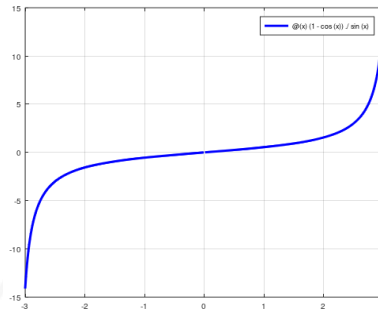
Paso3. Se calcula el límite de la función.

```
limit(Func,x,0);
```

```
>> pkg load symbolic
>> syms x
>> Func=@(x) (1-cos(x))/sin(x);
>> limit(Func,x,0)
ans = (sym) 0
>> Func=@(x) (1-cos(x))/x;
>> limit(Func,x,0)
ans = (sym) 0
```

La representación gráfica de la función se muestra en la figura 2.1.

**FIGURA 2.1**



- **Aproximación numérica**

El siguiente código se escribe en un fichero de Octave.

```
clear, clc % funciones para limpiar variables
disp('=====\n');
disp('Se calculan los limites laterales en x=a, de f(x)');
a=input('Ingrese el valor de a = ');
disp('=====\n');
delta=1e-10;
f=@(x)(1-cos(x))/sin(x);
disp('Se calcula el límite por la izquierda: ');
f_izq=f(a-delta)
disp('Se calcula el límite por la derecha: ');
f_der=f(a+delta)
disp('=====\n');
if f_izq==f_der
    Limite=f_izq
else
    disp('Limite no existe');
end
```

## 2.2 Límite de una función a trozos.

En esta sección se calcula el límite de una función con varias reglas de correspondencia.

**Ejemplo 2.2.** Consideremos la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq 5 \\ -x + 10 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Calculemos  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$  y mostrar su gráfica.

### Solución con el comando limit

El siguiente código se ha escrito en un fichero de octave.

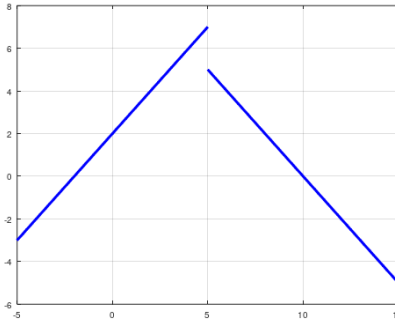
```

1 a=input('Ingrese el valor de a = ');
2 if x<=5
3     y=@(x)x+2; % esta es una función anónima.
4     limit(y,x,a)
5 else
6     y=@(x)-x+10;
7     limit(y,x,a)
8 endif

```

La gráfica de la función  $f(x)$  se visualiza en figura 2.2.

FIGURA 2.2



### Forma numérica

===== script =====

```

function y=fun1(x)
if x<=5
    y=x+2; % esta es una función anónima.
else
    y=-x+10;
endif
endfunction

```

Nota. Guardar archivo con el nombre de fun1.

===== script =====

```
clear, clc
```

```

disp('=====\n');
disp('Vamos a calcular el límite de funciones a trozos');
a=input('Ingrese a = '); delta=1e-10;
disp('Se calcula el límite por la izquierda: '); f_izq=fun1(a-delta)
disp('Se calcula el límite por la derecha: ');
f_der=fun1(a+delta)
disp('=====\n');
if f_izq==f_der
    Limite=f_izq
else
    disp('Limite no existe');
end

```

**Ejemplo 2.3.** Consideremos la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ 1, & x = 2 \\ \frac{x}{2}, & x > 2 \end{cases}$$

Calcular el  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  y mostrar su gráfica.

**Solución con octave**

```

===== script =====
function fun1(x)
if x<2
    y=3-x; % esta es una función anónima.
elseif x==2
    y=1;
else
    y=x/2;

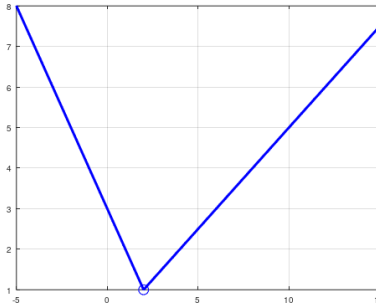
```

```
endif
```

```
endfunction
```

La gráfica de  $f(x)$  se visualiza en la figura 2.3.

**FIGURA 2.3**



```
===== script =====  
clear, clc  
disp('=====\n');  
disp('Vamos a calcular el límite de funciones a trozos');  
a=input('Ingrese a = ');  
disp('=====\n');  
delta=1e-10;  
disp('Se calcula el límite por la izquierda: '); f_izq=fun1(a-delta);  
disp('Se calcula el límite por la derecha: '); f_der=fun1(a+delta);  
disp('=====\n');
```

### 2.3 Los Límites al infinito

El comportamiento de las funciones es importante en muchas aplicaciones; cuando  $x$  se aproxima a números grandes, esto se puede considerar como un límite; y cuando  $x$  tiende a  $-\infty$  o a  $+\infty$ , esto se considera como un límite. La función tiene un comportamiento asintótico si existe el límite; si no, la función crece o decrece indefinidamente, y en este caso no hay límite.

**Ejemplo 2.4.** Sea  $f(x) = \frac{x^2-5x-7}{2x^2-11}$ , calcular el  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  si existe.

**Solución con el comando limit**

```
1 f=@(x) (x^2-5*x-7)/(2*x^2-11);
2 limit(f,x,inf)
```

### Taller N° 02 de Límites

Parte 1. Calcular el Límite de las siguientes funciones de una variable real.

1.  $\lim_{a \rightarrow -4} \frac{4-a}{\sqrt{a^2-9}}$

2.  $\lim_{a \rightarrow 1} \frac{a^6-1}{a^{10}-1}$

3.  $\lim_{a \rightarrow 1} \frac{a^3-1}{\sqrt{a}-1}$

4.  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a^2+9}-3}{a^2}$

5.  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{9^a-5^a}{a}$

6.  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}{a}$

7.  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\cos(2a)-\cos(a)}{a^2}$

8.  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\tan(3a)}{\tan(5a)}$

9.  $\lim_{a \rightarrow 0} a^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{a}\right)$

Parte 2. Calcular el Límite de las siguientes Funciones Seccionadas

1. Consideremos la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Calcular el  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

2. Consideremos la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2-x^2, & x \leq 1 \\ 4-x, & x > 1 \end{cases}$$

Calcular el  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

### Parte 3. Límites al Infinito

1.  $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(2a)}{a}$
2.  $\lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{\cos(a)}{3a}$
3.  $\lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{2-a+\text{sen}(a)}{a+\cos(a)}$
4.  $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a+\text{sen}(a)}{2a+7-5\text{sen}(a)}$
5.  $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a+1}{a^2+3}$
6.  $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2a^3+7}{a^3-a^2+a+7}$
7.  $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2a^{5/3}-a^{1/3}+7}{a^{8/5}+3a+\sqrt{a}}$
8.  $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\cos(1/a)}{1+(1/a)}$
9.  $\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{a^2} - \cos\left(\frac{1}{a}\right)\right) \left(1 + \text{sen}\left(\frac{1}{a}\right)\right)$

### Solución del taller N° 02 con octave

Antes de hacer correr estos ejercicios primero se recomienda cargar el paquete simbólico en la ventana de comandos de octave de la siguiente forma.

```
>> pkg load symbolic
```

```
>> syms a b x y
```

```
disp("\n===== Ejercicio 1 =====\n")
```

```
f=@(x) (4-x)/(sqrt(x^2-9)); limit(f,x,-4)
```

```
disp("\n===== Ejercicio 2 =====\n")
```

```
f=@(x) (x^6-1)/(x^10-1); limit(f,x,1)
```

```
disp("\n===== Ejercicio 3 =====\n")
```

```
f=@(x) (x^3-1)/(sqrt(x)-1); limit(f,x,1)
```

```
disp("\n===== Ejercicio 4 =====\n")
```

```
f=@(x) (sqrt(x^2+9)-3)/(x^2); limit(f,x,0)
```

```
disp("\n===== Ejercicio 5 =====\n")
```

```
f=@(x) (9^x-5^x)/(x); limit(f,x,0)
```

```
disp("\n===== Ejercicio 6 =====\n")
```

```

f=@(x) (sqrt(1+x)-sqrt(1-x))/(x); limit(f,x,0)
disp("\n===== Ejercicio 7 =====\n")
f=@(x) (cos(2*x)-cos(x))/(x^2); limit(f,x,0)
disp("\n===== Ejercicio 8 =====\n")
f=@(x) (tan(3*x))/(tan(5*x)); limit(f,x,0)
disp("\n===== Ejercicio 9 =====\n")
f=@(x) (x^2*sin(1/x)); limit(f,x,0)
===== script 1 =====
disp("\n==Limites de funciones seccionadas ==\n")
disp("\n===== Ejercicio 1 =====\n")
function b=funlim01(a)
    if a<2
        b=a^2;
    elseif a==2
        b=3;
    else b=2;
    endif
endfunction
===== script 2 =====
punto_critico = 2
delta=1e-10
limite_izq=double(funlim01(inicial-delta))
limite_der=double(funlim01(inicial+delta))
if abs(limite_izq - limite_der) < 1e-5
    disp(["El limite existe y es igual a " num2str(limite_izq)])
else
    disp("El limite no existe")
endif
===== script 1 =====
disp("\n===== Ejercicio 2 =====\n")
function b=funlim02(a)
    if a<=1
        b=2-a^2;
    else
        b=4-a;
    endif
endfunction
===== script 2 =====
punto_critico = 1
delta=1e-10
limite_izq=double(funlim02(inicial-delta))
limite_der=double(funlim02(inicial+delta))
if abs(limite_izq - limite_der) < 1e-5
    disp(["El limite existe y es igual a " num2str(limite_izq)])
else
    disp("El limite no existe")
endif

```

```

disp("\n===== Limites al infinito =====\n")
disp("\n===== Ejercicio 1 =====\n")
f=@(x) sin(2*x)/(x)
limit(f,x,inf)
disp("\n===== Ejercicio 2 =====\n")
f=@(x) cos(x)/(3*x)
limit(f,x,inf)
disp("\n===== Ejercicio 3 =====\n")
f=@(x) (2-x+sin(x))/(x+cos(x))
limit(f,x,inf)
disp("\n===== Ejercicio 4 =====\n")
f=@(x) (x+sin(x))/(2*x+7-5*sin(x))
limit(f,x,inf)
disp("\n===== Ejercicio 5 =====\n")
f=@(x) (x+1)/(x^2+3)
limit(f,x,inf)
disp("\n===== Ejercicio 6 =====\n")
f=@(x) (2*x^3+7)/(x^3-x^2+x+7)
limit(f,x,inf)
disp("\n===== Ejercicio 7 =====\n")
f=@(x) (2*x^(5/3)-x^(1/3)+7)/(x^(8/5)+3*x+sqrt(x))
l = limit(f,x,inf);
if l > 1e+50
    display("El limite no existe")
else
    l
endif
disp("\n===== Ejercicio 8 =====\n")
f=@(x) (cos(1/x))/(1+(1/x))
limit(f,x,inf)
disp("\n===== Ejercicio 9 =====\n")
f=@(x) (3/(x^2)-cos(1/x))*(1+sin(1/x))
limit(f,x,inf).

```

## 2.4 Derivada de una función real en un punto

Mitacc et al. (2011) define la derivada de una función de la siguiente manera:

**Definición 1.** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida en el punto  $a \in D_f$ . Se dice que  $f$  es derivable en  $a$  si el siguiente limite

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe.

### El comando diff.

La función diff es usado en octave para calcular de forma numérica la derivada de cualquier orden de funciones reales.

**Ejemplo 2.5.** Halle la derivada de la función  $f(x) = \sqrt{x}$  en  $x = 4$ .

Para calcular la derivada de una función en Octave se usa el comando **diff** y para evaluar la derivada en un punto se usa el comando **subs**, como se muestra a continuación.

```
>> pkg load symbolic
>> syms x
>> derivada=diff(sqrt(x),x)
derivada = (sym)
      1
-----
 2*\ / x
>> subs(derivada,x,4)
ans = (sym) 1/4
```

### 2.5 Derivadas laterales

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $a \in D_f$ . Mitacc et al. (2011) define la derivada lateral de la siguiente manera.

**Definición 2.** La derivada por la izquierda de  $f$  en  $a$  está definida por:

$$f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si el límite existe. Mitacc et al. (2011).

**Definición 3.** La derivada por la derecha de  $f$  en  $a$  está definida por:

$$f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si el límite existe. Mitacc et al. (2011).

**Proposición 1.** La función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable en el punto  $a \in D_f$  sí y solo sí existen y son iguales  $f'(a^+)$  y  $f'(a^-)$ . Mitacc et al. (2011).

**Ejemplo 2.6.** Estudie la derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 4x + 2, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

en el punto  $x = 2$ .

El ejemplo 2.6 se resolvió usando un fichero de Octave de la siguiente forma.

```

1 % Primero cargar el siguiente paquete en la ver
2 % pkg load symbolic
3 % syms x
4
5 der_izq=diff(2-x^2,x);
6 Derivada_izquierda=double(subs(der_izq,x,2))
7 der_derecha=diff(x^2-4*x+2,x);
8 Derivada_derecha=double(subs(der_derecha,x,2))

```

Los resultados obtenidos son:

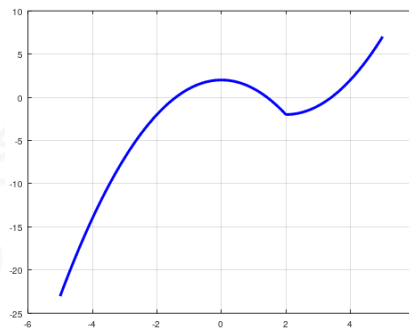
Derivada\_izquierda = -4

Derivada\_derecha = 0

Se confirma la derivada de  $f(x)$  evaluada en el punto  $x = 2$ , no existe.

La gráfica de la función  $f(x)$  se muestra en la figura 2.4.

**FIGURA 2.4**



**Nota 2.** Los comandos usados en el ejemplo 2.6 son:

- diff: Calcula la derivada de una función.
- Double: Convierte una cadena de caracteres a numérica.
- Subs: Para evaluar la función en un valor de  $x$  dado.

## 2.6 Derivadas de orden superior

Mitacc et al. (2011) define la derivada de orden superior de la siguiente manera. Sea  $f(x)$  una función con derivada, la derivada de la función  $f'(x)$  se denomina segunda derivada de  $f$ , y se denota de la siguiente manera:

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

**Ejemplo 2.7.** Si  $y = \sqrt{x^2 + 5}$ , hallar  $f''(x)$ .

```

Ventana de comandos
>> pkg load symbolic
>> syms x
>> y=@(x) sqrt(x^2+5);
>> segunda_der=diff(y,x,2);
>> simplify(segunda_der)
ans = (sym)
          5
-----
          3/2
 / 2    \
 \x  + 5/

```

**Nota 3.** Para calcular la derivada de orden superior en Octave, en la ventana de comando primero se escribe el comando diff, luego entre paréntesis se escribe la función, luego la variable independiente y finalmente el orden de la derivada, todo separado por comas.

### Programación en octave

===== script =====

% Fómula de diferencias progresivas.

```

x=linspace(0, pi, 100);
a=0; b=pi; n=99;
h=(b-a)/n;
y=sin(x);
Progresivas=(y(2:end)-y(1:end-1))./h;

```

plot(x(1: end-1), Progresivas, 'r')

z1=[x(1: end-1)', Progresivas']

% Fómula de diferencias regresivas.

```

x=linspace(0, pi, 50);
a=0; b=pi; n=49;
h=(b-a)/n;
y=sin(x);
Regresivas=(y(end:-1:2) - y(end-1:-1:1))./h;

```

plot(x(end:-1:2), Regresivas, 'b')

z2=[x(end:-1:2)', Regresivas']

hold on

% Fómula de diferencias centradas.

```

x=linspace(0, pi, 50);
a=0; b=pi; n=49;
h=(b-a)/n;
y=sin(x);
centrada=(y(3:end) - y(1:end-2))./(2*h);

```

plot(x(2: end-1), centrada, 'k')

z3=[x(2: end-1)', centrada']

% Grafica de la derivada analitica

```

y=cos(x);
plot(x, y, 'm')

```

===== script =====

% Primera derivada de una función en forma general

function funderiv(a, b, N)

```
f=@(x)(sin(x)); h=(b-a)/(N-1); x=linspace(0, pi, 20);
dy=(feval(f, a+h*(1:N)) - feval(f, a+h*(-1:(N-2))))/(2*h);
z=[x', dy']
endfunction
```

### Taller N° 03 derivadas

1. Sea  $f$  una secuencia de puntos  $x_i$ , representados en la siguiente tabla:

$x_i$	0	1	2	3
$f_i$	0	1	8	27

a) Aproxima la derivada de  $f$  en  $x = 2$ .

b) Aproxima la derivada de  $f$  en  $x = 2.5$ .

c) Aproxima la integral de  $f$  en  $[0, 3]$ .

2. Con los comandos flip y diff, calcule las diferencias regresivas.

3. Halle una formula centrada para la segunda derivada de la función  $f(x)$  en el punto  $x = a$  a partir de los valores  $f(a - h)$ ,  $f(a)$  y  $f(a + h)$ , donde  $h \neq 0$ . A partir del polinomio de interpolacion, justifica que la formula buscada es

$$f''(a) \approx \frac{f(a - h) - 2f(a) + f(a + h)}{h^2}$$

y prográmelo en octave.

4.  $y = \tan(\sin(x^7))$ ; Halle  $\frac{dy}{dx}$

5.  $y = [\cos(11x - 7)]^5$ ; Halle  $\frac{dy}{dx}$

6.  $y = \cos(\sin(x^7))$ ; Halle  $\frac{dy}{dx}$

7.  $y = \cotg^{-\frac{1}{2}}(x^2)$ ; Halle  $\frac{dy}{dx}$

8.  $y = \cos[\ln(2x^4 + 5x)]$ ; Halle  $\frac{dy}{dx}$

9.  $y = e^{5x} \sin(7x)$ ; Halle  $\frac{dy}{dx}$

10.  $y = \cos[\cos(\cos(2x))]$ . Halle  $\frac{dy}{dx}$

11.  $y = e^{\arcsin(2x)}$ ; Halle  $\frac{dy}{dx}$

12.  $y = (\sin x)e^{\tanh x}$ ; Halle  $\frac{dy}{dx}$

13.  $y = \frac{\sinh x}{\sqrt{x^3+3}}$ , Halle  $\frac{dy}{dx}$

14. Calcular la derivada en un punto de las funciones.

a)  $f(x) = 5x^2 - 3$ ,  
 $a = 2$

b)  $f(x) = 8 - 2x^3$ ,  
 $a = -1$

c)  $f(x) = \sqrt{4 + 2x}$ ,  
 $a = 0$

d)  $f(x) = \frac{1}{11\sqrt{5+11x}}$ ,  
 $a = 1$

e)  $f(x) = |x - 1|^3$ ,  
 $a = 1$

15. Si  $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ ,  $g(x) = \frac{|x|}{1+x^2}$  y  $h(x) = \frac{x^4+x^3+4}{\sqrt{2x+9}}$

Hallar: a)  $f''(x)$     b)  $g''(x)$     c)  $h'''(x)$

### Solución del taller N° 03 derivadas con octave

Antes de hacer correr estos ejercicios primero se recomienda cargar el paquete simbólico en la ventana de comandos de octave de la siguiente forma:

```
>> pkg load symbolic
```

```
>> syms x
```

```
disp("\n===== Ejercicio 1 =====\n")
```

```
x = [0, 1, 2, 3]
```

```
y = [0, 1, 8, 27]
```

```
disp("a. Derivada progresiva en x = 2\n")
```

```
% progresiva = (f(a+h)-f(a))/h
```

```
progresiva = (y(4) - y(3))/(x(4)-x(3))
```

```
disp("a. Derivada regresiva en x = 2\n")
```

```
% regresiva = (f(a) - f(a-h))/h
```

```
regresiva = (y(3) - y(2))/(x(3)-x(2))
```

```
disp("a. Derivada central en x = 2\n")
```

```
% central = (f(a+h) - f(a-h))/2h
```

```
central = (y(4) - y(2))/(x(4) - x(2))
```

```
disp("b. derivada en x = 2.5\n")
```

```
central2 = (y(4) - y(3))/(x(4) - x(3))
```

```
disp("c. Integral entre x [0, 3]\n")
```

```
disp("Aproximando con sumas de riemman con rectangulos por la derecha\n")
```

```
integral_rect = sum(y(2:end))
```

```
disp("Aproximando con sumas de riemman con trapecios\n")
```

```
integral_trap = sum((y(1:end-1) + y(2:end))/2)
```

```
disp("\n===== Ejercicio 2 =====\n")
```

```
x = [0, 1, 2, 3]
```

```
y = [0, 1, 8, 27]
```

```
regresivas = diff(flip(y))./diff(flip(x))
```

```
disp("\n===== Ejercicio 3 =====\n")
```

```
a=input('Ingresar el valor de a = ');  
b=input('Ingresar el valor de b = ');  
N=input('Ingresar el valor de N = ');  
x=linspace(a, b, N);  
h=(b-a)/(N-1);  
y=sin(x);  
centrada2=(y(1:end-2)-2*y(2:end-1)+y(3:end))/(h.^2);  
plot(x(2:end-1),centrada2, 'r')  
z1=[x(2:end-1)', centrada2'];  
hold on  
y1=-sin(x);  
plot(x, y1, 'b')
```

```
fprintf('===== Ejercicio 04 =====\n');  
f=@(x)tan(sin(x^7));  
simplify(diff(f,x))
```

```
fprintf('===== Ejercicio 05 =====\n');  
f=@(x)(cos(11*x-7))^5; simplify(diff(f,x))
```

```
fprintf('===== Ejercicio 06 =====\n');  
f=@(x)cos(sin(x^7)); simplify(diff(f,x))
```

```
fprintf('===== Ejercicio 07 =====\n');  
f=@(x)(cot(x^2))^(0.5); simplify(diff(f,x))
```

```
fprintf('===== Ejercicio 08 =====\n');  
f=@(x)cos(log(2*x^4+5*x)); simplify(diff(f,x))
```

```
fprintf('===== Ejercicio 09 =====\n');  
f=@(x)exp(5*x)*sin(7*x); simplify(diff(f,x))
```

```
fprintf('===== Ejercicio 10 =====\n');  
f=@(x)cos(cos(cos(2*x))); simplify(diff(f,x))
```

```
fprintf('===== Ejercicio 11 =====\n');  
f=@(x)exp(asin(2*x)); simplify(diff(f,x))
```

```
fprintf('===== Ejercicio 12 =====\n');  
f=@(x)sin(x)*exp(tanh(x)); simplify(diff(f,x))
```

```
fprintf('===== Ejercicio 13 =====\n');  
f=@(x)sinh(x)/sqrt(x^3+3);  
simplify(diff(f,x))
```

```
fprintf('===== Ejercicio 14 apartado a =====\n');  
f=@(x)5*x^2-3;
```

```
Der=diff(f,x);
subs(Der,x,2)
```

```
fprintf('===== Ejercicio 14 apartado b =====\n');
f=@(x)8-2*x^3;
Der=diff(f,x);
subs(Der,x,-1)
```

```
fprintf('===== Ejercicio 14 apartado c =====\n');
f=@(x)sqrt(4+2*x);
Der=diff(f,x);
subs(Der,x,0)
```

```
fprintf('===== Ejercicio 14 apartado d =====\n');
f=@(x)1/(11*sqrt(5+11*x));
Der=diff(f,x);
subs(Der,x,1)
```

```
fprintf('===== Ejercicio 14 apartado e =====\n');
f=@(x)sqrt(x-1)^3/2;
Der=diff(f,x);
subs(Der,x,1)
```

```
fprintf('===== Ejercicio 15 apartado a =====\n');
f=@(x)sqrt(x^2+5);
Der=diff(f,x,2);
simplify(Der)
```

```
fprintf('===== Ejercicio 15 apartado b =====\n');
f=@(x)sqrt(x^2)/(1+x^2); Der=diff(f,x,2); simplify(Der)
```

```
fprintf('===== Ejercicio 15 apartado c =====\n');
f=@(x)(x^4+x^3+4)/sqrt(2*x+9); Der=diff(f,x,3);
simplify(Der)
```

## 2.7 Integral indefinida

**Definición 4.** Sea  $I$  un intervalo y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Una función  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $F'(x) = f(x), \forall x \in I$ , se denomina primitiva o antiderivada de  $f$  en  $I$  y se escribe  $F(x) = \text{Ant}(f(x))$  en  $I$ . Mitacc et al. (1992).

**Definición 5.** Si  $F(x)$  es una antiderivada de  $f(x)$  en  $I$ , la integral indefinida de  $f(x)$  es el conjunto de las antiderivadas de  $f(x)$  en dicho intervalo y es denotado por:

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Mitacc et al. (1992)

**Ejemplo 2.8.** Calcular la siguiente integral indefinida

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4}$$

```
Ventana de comandos
>> pkg load symbolic
>> syms x
>> y=1/(x^2+4);
>> int(y)
ans = (sym)

      /x\
atan|-|
      \|2/
-----
      2
```

**Nota 3.** Para calcular una integral indefinida se usa el comando int de Octave.

## 2.8 Integral definida

Mitacc et al. (1992) menciona en el teorema 1 la integral definida.

**Teorema 1.** Si  $f$  es una función continua en  $I = [a, b]$  y  $F$  es una antiderivada de  $f$  en  $I$  esto es  $F'(x) = f(x), \forall x \in I$ , entonces se tiene

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

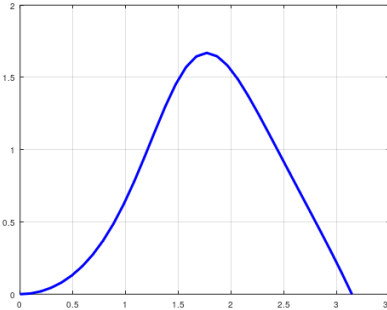
**Ejemplo 2.9.** Calcular la integral de  $f(x) = \frac{x \sin(x)}{1+\cos(x)^2}$

$$\int_0^\pi f(x)dx$$

```
Ventana de comandos
>> pkg load symbolic
>> syms x
>> y=@(x) (x*sin(x))/(1+cos(x)^2);
>> quad(y,0,pi)
ans = 2.4674
```

La gráfica de  $f(x)$  se ve en la figura 2.5.

**FIGURA 2.5**



**Nota 3.** Para calcular una integral definida se usa el comando **quad** o **quadl** que permiten calcular integrales definidas de funciones continuas. La función **quad** es una función de bajo orden basado en la regla de Simpson, mientras que **quadl** es una función de alto orden.

**Ejemplo 2.10.**

Resolver la integral definida de  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $\int_0^1 f(x)dx$ .

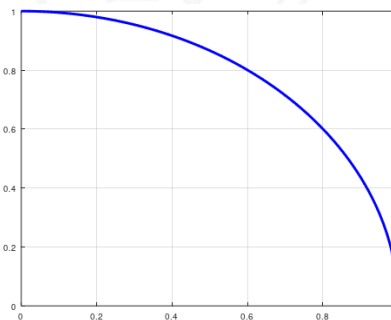
**Solución con octave**

Se define  $f$ , como una función anónima:

```
>> f = @(x) sqrt(1 - x^2);
>> quad(f, 0, 1);
>> 0.7854
```

La gráfica de la función  $f(x)$  se ve en la figura 2.6.

**FIGURA 2.6.**



**2.8 Integrales impropias.**

La función **quad** de Octave calcula también integrales impropias.

**Ejemplo 2.11.** Calcular las siguientes integrales.

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx, \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{3}} dx, \int_4^{\infty} x^3 e^{-x} dx.$$

```
>> quad (@(x) 1/sqrt(x+1), 0,4)
>> quad (@(x) 4/sqrt(pi)*exp(-x^2/3), -inf, inf)
>> quad (@(x) x^3*exp(-*x), 4, inf)
```

### 2.8.1 Comandos similares a quad.

Octave ha implementado cinco algoritmos para calcular integrales definidas.

Comando	Definiciones
<b>quadgk</b>	quadgk, desarrolla funciones oscilatorias y/o intervalos infinitos.
<b>quadl</b>	quadl, es más efectiva que quad cuando la función no es muy regular.
<b>quadcc</b>	Es más efectiva de todos, pero con más tiempo computacional.
<b>quadv</b>	Versión vectorial de quad usando Simpson compuesto.

### Taller N° 04 Integrales

1. Resolver con octave la siguiente integral  $\int_1^2 \frac{e^{x^2}}{x^4} dx$  usando:

- Un refinamiento regular de 150 subintervalos donde el punto considerado en cada subintervalo sea su extremo superior derecho.
- Un refinamiento regular de 150 subintervalos donde el punto considerado en cada subintervalo sea el punto medio.

2. Considere la función  $f(x) = \text{sen}(x^2)$ .

- Desarrolle su grafica en el intervalo  $[0, 1]$  ¿crece o decrece?
- Desarrollar la integral  $\int_0^1 \text{sen}(x^2) dx$  con sumas de Riemann con  $n = 70$  subintervalos y considerando como punto de cada subintervalo las siguientes opciones.
  - Extremo inferior del subintervalo
  - Extremo superior del subintervalo
  - Punto medio del subintervalo
- Si  $f(x)$  es una función creciente, ¿Qué suma anterior es una cota superior y cual es una cota inferior?

3. Considere la función  $f(x) = \text{sen}(x^2)$ .

- Visualizar la gráfica en el intervalo  $[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$  ¿crece o decrece?

b) Calcular un valor aproximado de  $\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \text{sen}(x^2) dx$  con sumas de Riemann,  $n = 60$  subintervalos y tomando de cada subintervalo los siguientes apartados:

- Extremo inferior del subintervalo.
- Extremo superior del subintervalo.
- Punto medio del subintervalo.

4. Calcular las siguientes integrales indefinidas

- $\int (\sqrt{x} + 3) dx$
- $\int \sqrt{x}(x + 1) dx$
- $\int \frac{4dx}{\sqrt{6-x^2}}$
- $\int \frac{dx}{x(x^2-8)}$
- $\int \frac{7x^2+16}{x^4+4x^2} dx$
- $\int \frac{\cos 6x+6 \cos 4x+15 \cos 2x+10}{\cos 5x+5 \cos 3x+10 \cos x} dx$

5. Calcular las siguientes integrales definidas

- $\int_{-2}^2 x^3 dx$
- $\int_{-1}^2 (x + 1)^3 dx$
- $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
- $\int_1^2 \frac{x}{1+x^2} dx$
- $\int_0^{\pi/6} \text{sen}^2(3x) dx$

6. Calcular las siguientes integrales impropias con limites infinitos.

- $\int_0^{\infty} \text{sen } x dx$
- $\int_1^{\infty} \frac{4}{x^3} dx$
- $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-x^2} dx$
- $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$

7. Calcular las siguientes integrales impropias con limites finitos.

- $\int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^{3/5}}$
- $\int_{-2}^1 \frac{dx}{x^3}$
- $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$
- $\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$

### Solución del taller N° 04 Integrales con octave

Antes de hacer correr estos ejercicios primero se recomienda cargar el paquete simbólico en la ventana de comandos de octave de la siguiente forma.

```
>> pkg load symbolic
>> syms x
disp("===== Ejercicio 1 =====\n")
disp("a. considerando el extremo superior derecho\n")
a=input('ingrese a = ');
b=input('ingrese b = ');
```

```

N=input('ingrese N = ');
h=(b-a)/(N);
x=linspace(a,b,N+1);
f=@(x)(exp(x^2)/(x^4));
L=0;
for k=1:(N)
    L=L+abs(feval(f,a+k*h));
end
L1=h*L;
disp(L1)
disp("b. considerando el punto medio\n")
L=0;
for k=1:N
    L=abs(feval(f,a+(k-0.5)*h))+L;
end
L1=h*L;
disp(L1)

disp("===== Ejercicio 2 =====\n")
disp("a. considerando el extremo superior derecho\n")
a=0; b=1; N=50;
h=(b-a)/(N);
x=linspace(a,b,N+1);
y=sin(x.^2);
plot(x,y,'ro-','markersize',2,'linewidth',2)
der = diff(y)./diff(x);
flag=1;
for k=1:N
    if der(k) < 0
        flag = -1;
        break
    endif
endfor
if flag == 1
    disp("La funcion es creciente en el intervalo [0,1]\n")
else
    disp("La funcion es decreciente en el intervalo [0,1]\n")
endif
f = @(x) sin(x.^2);
disp("b.1 Integral con extremo inferior del subintervalo\n")
L = 0;
for k=1:N
    L=abs(feval(f,a+(k-1)*h))+L;
end
L1=h*L;
disp(L1)
disp("b.2 Integral con extremo superior del subintervalo\n")

```

```

L = 0;
for k=1:N
    L=abs(feval(f,a+k*h))+L;
end
L2=h*L;
disp(L2)
disp("b.2 Integral con punto medio del subintervalo\n")
L = 0;
for k=1:N
    L=abs(feval(f,a+(k-0.5)*h))+L;
end
L3=h*L;
disp(L3)
disp("c. Cota superior del valor exacto es \n")
L2
disp("c. Cota inferior del valor exacto es \n")
L1
resp = input('continuar (0/1): ');

disp("===== Ejercicio 3 =====\n")
disp("a. considerando el extremo superior derecho\n")
a=pi/2; b=2*pi/3; N=50;
h=(b-a)/(N);
x=linspace(a,b,N+1);
y=sin(x.^2);
plot(x,y,'go-','markersize',2,'linewidth',2)
der = diff(y)./diff(x);
flag=1;
for k=1:N
    if der(k) < 0
        flag = -1;
        break
    endif
endfor
if flag == 1
    disp("La funcion es creciente en el intervalo [0,1]\n")
else
    disp("La funcion es decreciente en el intervalo [0,1]\n")
endif
f = @(x) sin(x.^2)
disp("b.1 Integral con extremo inferior del subintervalo\n")
L = 0;
for k=1:N
    L=abs(feval(f,a+(k-1)*h))+L;
end
L1=h*L;
disp(L1)

```

```
disp("b.2 Integral con extremo superior del subintervalo\n")
```

```
L = 0;
```

```
for k=1:N
```

```
    L=abs(feval(f,a+k*h))+L;
```

```
end
```

```
L2=h*L;
```

```
disp(L2)
```

```
disp("b.2 Integral con punto medio del subintervalo\n")
```

```
L = 0;
```

```
for k=1:N
```

```
    L=abs(feval(f,a+(k-0.5)*h))+L;
```

```
end
```

```
L3=h*L;
```

```
disp(L3)
```

```
fprintf('=====  
Ejercicio 04 apartado a =====\n');
```

```
f=@(x)sqrt(x)+3;
```

```
Integral=simplify(int(f,x))
```

```
fprintf('=====  
Ejercicio 04 apartado b =====\n');
```

```
f=@(x)sqrt(x)*(x+1);
```

```
Integral=simplify(int(f,x))
```

```
fprintf('=====  
Ejercicio 04 apartado c =====\n');
```

```
f=@(x)4/sqrt(6-x^2);
```

```
Integral=simplify(int(f,x))
```

```
fprintf('=====  
Ejercicio 04 apartado d =====\n');
```

```
f=@(x)1/(x*(x^2-8));
```

```
Integral=simplify(int(f,x))
```

```
fprintf('=====  
Ejercicio 04 apartado e =====\n');
```

```
f=@(x)(7*x^2+16)/(x^4+4*x^2);
```

```
Integral=simplify(int(f,x))
```

```
fprintf('=====  
Ejercicio 04 apartado f =====\n');
```

```
f=@(x)(cos(6*x)+6*cos(4*x)+15*cos(2*x)+10)/(cos(5*x)+5*cos(3*x)+10*cos(x));
```

```
Integral=simplify(int(f,x))
```

```
fprintf('=====  
Ejercicio 5 apartado a =====\n');
```

```
f=@(x)x^3;
```

```
Integral=quad(f,-2,2)
```

```
fprintf('=====  
Ejercicio 5 apartado b =====\n');
```

```
f=@(x)(x+1)^3;
```

```
Integral=quad(f,-1,2)
```

```
fprintf('=====  
Ejercicio 5 apartado c =====\n');
```

```
f=@(x)1/sqrt(1-x^2);  
Integral=quad(f,0,1/2)
```

```
f=@(x)x/(1+x^2);  
Integral=quad(f,1,2)
```

```
f=@(x)(sin(3*x))^2;  
Integral=quad(f,0,pi/6)
```

```
f=@(x)sin(x); Integral=quad(f,0,inf)
```

```
f=@(x)4/(x^3); Integral=quad(f,1,inf)
```

```
f=@(x)exp(-x); Integral=quad(f,0,inf)
```

```
f=@(x)sqrt(x^2)*exp(-x^2); Integral=quad(f,-inf,inf)
```

```
f=@(x)1/sqrt(exp(x)); Integral=quad(f,0,inf)
```

```
f=@(x)(x-2)^(-3/5);  
Integral=int(f,x,0,2)
```

```
f=@(x)x^(-3);  
Integral=int(f,x,-2,1)
```

```
f=@(x)(9-x^2)^(-1/2);  
Integral=int(f,x,0,3)
```

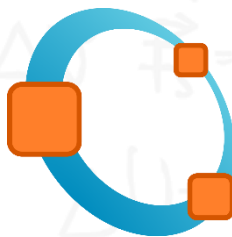
```
f=@(x)(x+1)^(-1/3);  
Integral=int(f,x,-2,0)
```

**Objetivo:**

Aproximar numéricamente la solución de una EDO.

**CONTENIDO:**

- ✓ Ecuaciones diferenciales ordinarias.
- ✓ Ecuaciones diferenciales algebraicas.
- ✓ Método de Euler.
- ✓ Método de Taylor.
- ✓ Método de runge Kutta.
- ✓ Ecuaciones diferenciales de segundo orden.
- ✓ Ecuaciones diferenciales de tercer orden.
- ✓ Ecuaciones diferenciales de cuarto orden.

**Capítulo****3****CAPITULO III. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES**

En este capítulo se presentan diferentes métodos numéricos que aproximan soluciones de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales.

**3.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias**

**Definición 4.** Una ecuación diferencial es la que contiene derivadas o diferenciales de una función incognita. (Espinoza, 2002).

**3.2. El comando lode de Octave**

Octave tiene incorporado el comando lode para resolver problemas de valor inicial. Los parámetros de entrada que necesita la función lode son: