

CAPÍTULO III: FUNCIONES

Una función f de un conjunto A en un conjunto B es una regla de correspondencia, que nos transporta de un conjunto a otro de manera que asociamos a cada elemento $x \in A$ exactamente **un único** elemento

$$y = f(x) \in B.$$

Dominio: conjunto de todos los valores x de entrada.

Dominio de $f = Dom(f)$ denominado también pre-imagen.

Rango: Conjunto de todos los valores $y = f(x)$ de salida.

Rango de $f = Ran(f)$ denominado también imagen.

La notación de la función $y = f(x)$ se lee: y es igual a f de x ; donde x es la variable independiente, y es la variable dependiente.

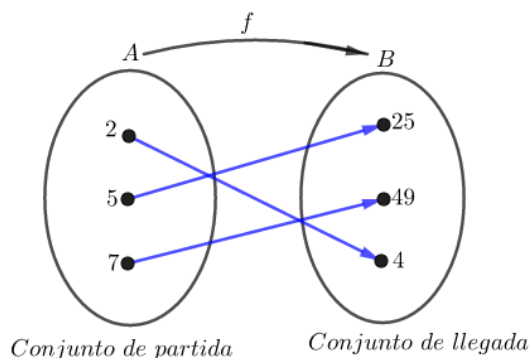
Ejemplos:

1. En la función $f = \{(2,6), (3,9), (4,12), (5,15)\}$

$$Dom(f) = \{2,3,4,5\}$$

$$Ran(f) = \{6,9,12,15\}$$

2. f es una función y sus pares ordenados son: $f = \{(2,4), (5,25), (7,49)\}$



Propiedad:

f es una función si se verifica:

$$i) f \subseteq A \times B$$

$$ii) (a, b) \wedge (a, c) \in f \Rightarrow b = c$$

Esto quiere decir que dos pares ordenados distintos no pueden tener la misma primera componente.

Ejemplos

1. ¿Cuál de las siguientes relaciones son funciones?

$$R_1 = \{(2; 1), (9; 3), (-1, 5)\}$$

$$R_2 = \{(3; 0), (4; 0), (5; 0)\}$$

$$R_3 = \{(5; 1), (4; -2), (4; 2)\}$$

Resolución:

De acuerdo con la definición se observa que:

R_1 es función

R_2 es función

R_3 no es función, porque $(4; -2)$ y $(4; 2) \in R_3$ siendo pares ordenados distintos tienen la misma primera componente.

2. David es vendedor de una empresa de productos químicos en el contrato firmado por David se indica que su sueldo depende del número de unidades que vende a la semana. Si la ecuación para determinar su sueldo semanal en \$. está dada por $y = f(x) = 5x + 18$.

Si David vende a la semana 70 unidades ¿Cuánto será su ingreso?

Resolución:

Unidades que vende por semana; x	Sueldo semanal; $y = f(x) = 5x + 18$
Si $x = 70$	$y = f(70) = 5(70) + 18$ $y = \$368$

3. Suponga que la ecuación $p = \frac{100}{q}$ describe la relación entre el precio por unidad p de cierto producto, y el número de unidades q que los consumidores comprarán (demanda) por semana a ese precio. Si la demanda en cierta semana es 25 unidades, ¿Cuál será el precio por esa demanda?

Resolución:

Unidades que compra los consumidores, por semana: Demanda (variable independiente); q	Precio por la demanda semanal: Variable dependiente; $p = f(q) = \frac{100}{q}$
Si $q = 25$	$p = f(25) = \frac{100}{25}$ $p = 4$

4. La tabla muestra un programa de oferta. Donde se indica una correspondencia entre el precio p de cierto producto y la cantidad q que los fabricantes surtirán por semana a ese precio. A cada precio le corresponde exactamente una cantidad y viceversa.

PROGRAMA DE OFERTA	
q : cantidad ofrecida por semana	p : precio por unidad en dólares
11	500
14	600
17	700
20	800

Analizar la correspondencia si q es la variable independiente y viceversa.

Resolución

Si q es la variable independiente, entonces p es una función de q , es decir: $p = f(q)$

$$f(11) = 500, \quad f(14) = 600, \quad f(17) = 700, \quad f(20) = 800$$

Ahora sí, p es la variable independiente, entonces q es una función de p , es decir:

$$q = g(p)$$

$$g(500) = 11, \quad g(600) = 14, \quad g(700) = 17, \quad g(800) = 20$$

3.1. Función Real de Variable Real

Dada una función $f: A \rightarrow B$, si A y B son subconjuntos de $\mathcal{R}$ (números reales), entonces f está definida en $\mathcal{R}$, es decir: $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$

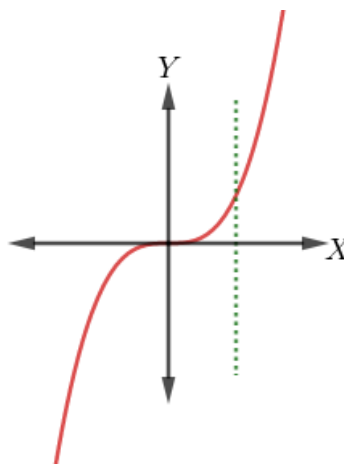
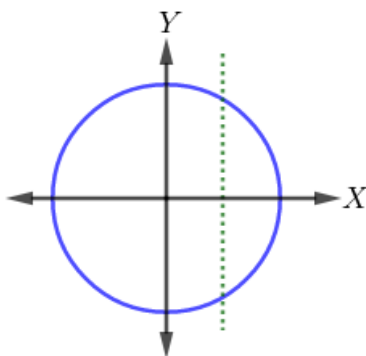
Una función estará bien definida cuando se especifique su dominio y su regla de correspondencia que asigna a cada elemento $x \in \text{Dom}(f)$ un **único elemento** $y = f(x) \in \mathcal{R}$.

Gráfica de una función real de variable real

Es la representación geométrica de los pares ordenados que pertenecen a la función en el plano cartesiano. Una curva corresponde a la gráfica de una función si y solo si cualquier recta perpendicular al eje X corta al gráfico en un solo punto.

Ejemplo

Determinar si las siguientes gráficas corresponden a una función.



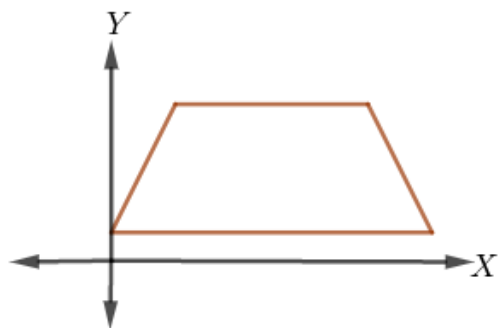
Resolución

En el primer gráfico no corresponde a una función ya que la recta vertical corta a la gráfica en dos puntos, en el segundo gráfico si corresponde a una función ya que la recta vertical corta solo en un punto de la gráfica.

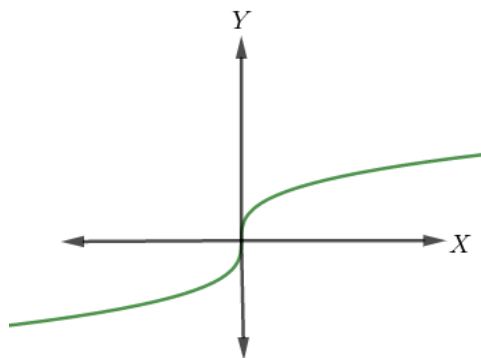
Ejercicios:

1. En los gráficos dados: determinar ¿cuáles son funciones y cuáles no lo son?

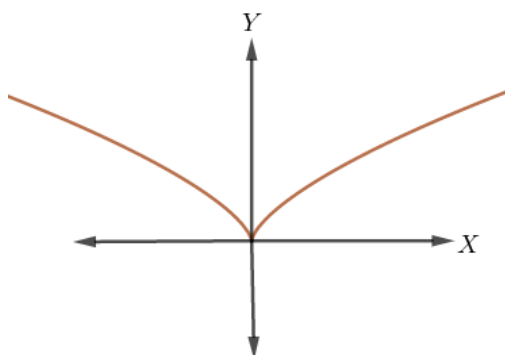
I.



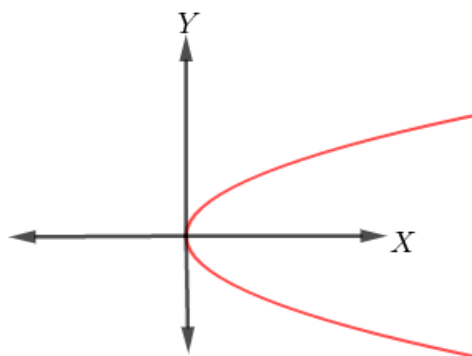
II.



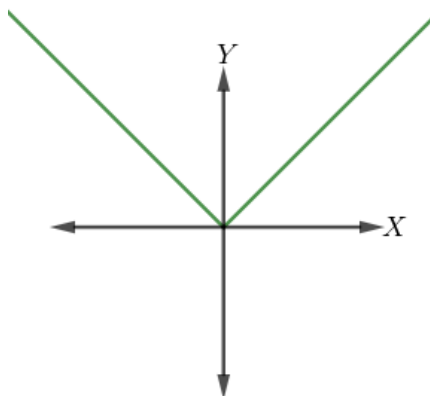
III.



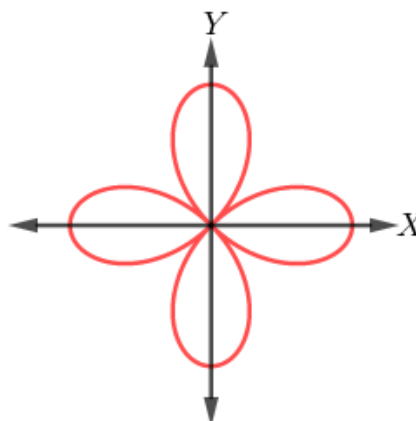
IV.



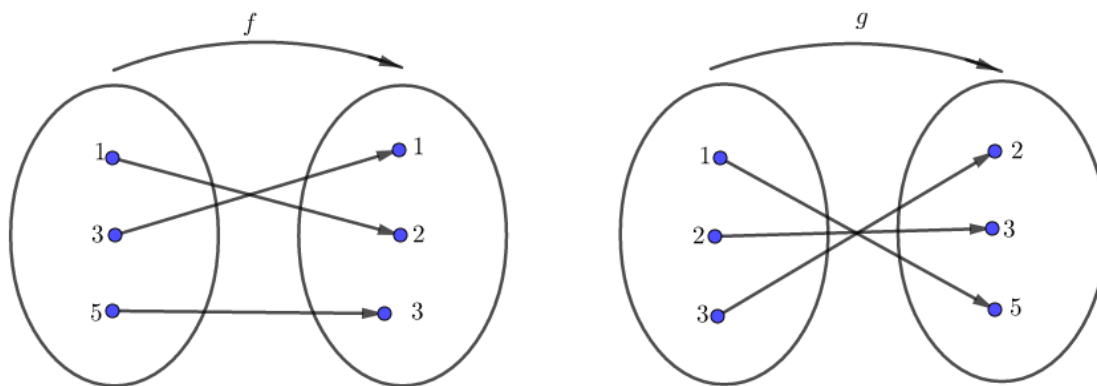
V.



VI.



2. Dadas las funciones:



Calcular: $E = \frac{f(1) + g(3)}{f(g(1)) + f(g(2))}$

Criterios para determinar el dominio y rango

Para determinar el dominio despejamos la variable y , y analizamos la existencia de su equivalente, frecuentemente es necesario reconocer la existencia de expresiones como:

$$\frac{A}{B} \in \mathcal{R} \leftrightarrow B \neq 0$$

$$\sqrt{A} \in \mathcal{R} \leftrightarrow A \geq 0$$

Para determinar el rango se despeja la variable x , luego se analiza la existencia de su equivalente, a veces se determina a partir del dominio.

Ejemplos:

Determinar el dominio y rango de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

Resolución

Tenemos $y = \frac{2x+1}{x-3} \Leftrightarrow x - 3 \neq 0$
 $\Rightarrow x \neq 3$

Así tenemos que $Dom(f) = \mathcal{R} - \{3\}$

Para determinar el rango despejamos la variable x

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x+1}{x-3} \Leftrightarrow xy - 3y = 2x + 1 \\ xy - 2x &= 3y + 1 \\ x(y - 2) &= 3y + 1 \end{aligned}$$

$$x = \frac{3y+1}{y-2} \Leftrightarrow y-2 \neq 0$$

$$\Rightarrow y \neq 2$$

Luego tenemos que $Ran(f) = \mathcal{R} - \{2\}$

2. $f(x) = \sqrt{4x-1}$

Resolución

Tenemos $y = \sqrt{4x-1} \Leftrightarrow 4x-1 \geq 0$

$$\Rightarrow 4x \geq 1$$

$$x \geq \frac{1}{4}$$

Luego tenemos que: $Dom(f) = \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$

Para determinar el rango lo construiremos a partir del dominio,

$$x \in \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{1}{4}$$

$$4x \geq 1$$

$$4x-1 \geq 0$$

$$\sqrt{4x-1} \geq 0$$

$$\Rightarrow y \geq 0$$

Luego tenemos que $Ran(f) = [0, +\infty[$

3. $f(x) = \frac{x}{x^2-x-2}$

Resolución

Tenemos $y = \frac{x}{x^2-x-2} \Leftrightarrow x^2-x-2 \neq 0$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1) \neq 0$$

$$x-2 \neq 0 \vee x+1 \neq 0$$

$$x \neq 2 \vee x \neq -1$$

Luego tenemos que: $Dom(f) = \mathcal{R} - \{-1, 2\}$

Para determinar el rango despejamos la variable x

$$y = \frac{x}{x^2-x-2}$$

$$yx^2 - yx - 2y = x$$

$$yx^2 - yx - x - 2y = 0$$

$$yx^2 - (y+1)x - 2y = 0$$

Tenemos una ecuación cuadrática entonces aplicamos la formula cuadrática:

$$x = \frac{y+1 \pm \sqrt{(y+1)^2 - 4(y)(-2y)}}{2y}$$

$$x = \frac{y+1 \pm \sqrt{(y+1)^2 + 8y^2}}{2y}$$

Analizando en la raíz tenemos que $(y+1)^2 + 8y^2 > 0, \forall y \in \mathcal{R}$

Ahora analizando el denominador se tiene que $2y \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$

Luego tenemos que $\text{Ran}(f) = \mathcal{R} - \{0\}$

4. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Resolución

$$\text{Tenemos } y = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow 1-x^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2 \leq 1$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

Luego tenemos el $\text{Dom}(f) = [-1,1]$

Para determinar el rango lo construiremos a partir del dominio,

$$x \in [-1,1]$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$-1 \leq x < 0 \vee 0 \leq x \leq 1$$

Elevando al cuadrado tenemos: $0 < x^2 \leq 1 \vee 0 \leq x^2 \leq 1$

$$\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \geq -x^2 \geq -1$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1-x^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_y \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq y \leq 1$$

$$y \in [0,1]$$

Luego tenemos que $\text{Ran}(f) = [0,1]$

Ejercicios

I. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{5}{x}$

2. $g(x) = \sqrt{x-5}$

3. $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$

$$4. g(x) = \frac{5x-5}{2x+7}$$

$$5. h(t) = \frac{4-t^2}{2t^2-7t-4}$$

$$6. g(x) = \frac{x}{5}$$

$$7. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$8. g(x) = \frac{2}{x^2+1}$$

$$9. f(x) = \sqrt{4x+3}$$

$$10. f(x) = \frac{4x^2-1}{2x+1}$$

II. Determinar el dominio y rango de las siguientes funciones:

$$1. f(x) = \frac{4x^2-1}{2x+1}$$

$$2. g(x) = \frac{5x-1}{3x+2}$$

$$3. h(x) = \sqrt{x^2-1}$$

$$4. f(x) = \sqrt{9-x^2}$$

$$5. g(x) = \frac{2}{x^2+9}$$

$$6. h(x) = x^2 - 6x + 5$$

$$7. f(x) = 16 - x^2$$

$$8. g(x) = \sqrt{2x-4}$$

$$9. f(x) = 2x - 3 ; x \in \langle 5, 10 \rangle$$

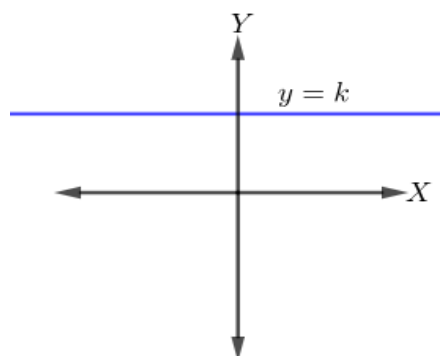
$$10. h(x) = \frac{x^3+4x^2+x-6}{x^2+2x-3}$$

3.2 Funciones Especiales

1. Función Constante

$$y = f(x) = k, \text{ } k \text{ constante}$$

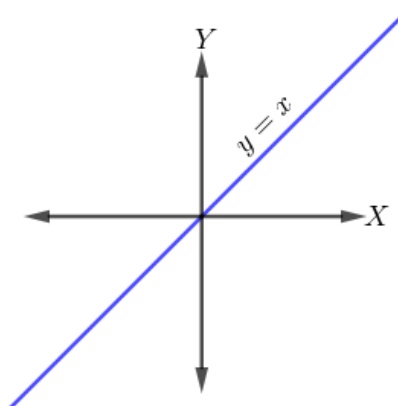
$$\text{Dom}(f) = \mathcal{R}, \text{ } \text{Ran}(f) = \{k\}$$



2. Función Identidad

$$y = f(x) = x$$

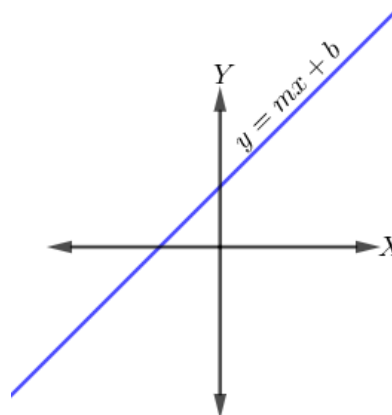
$$\text{Dom}(f) = \mathcal{R}, \text{Ran}(f) = \mathcal{R}$$



3. Función Lineal

$$y = f(x) = mx + b, \quad m \neq 0$$

$$\text{Dom}(f) = \mathcal{R}, \text{Ran}(f) = \mathcal{R}$$

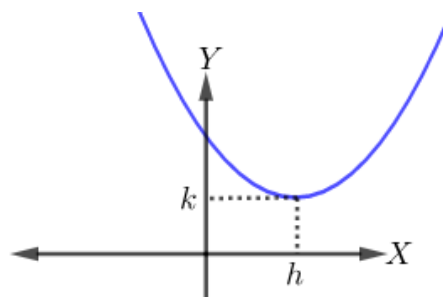


4. Función Cuadrática

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

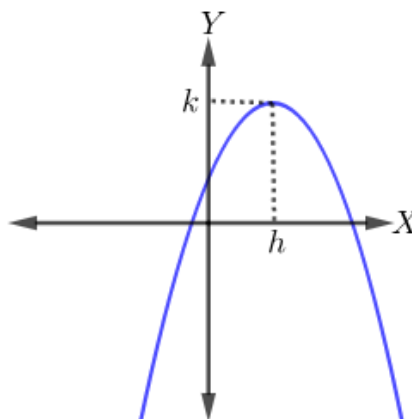
Si $a > 0$, tenemos

$$\text{Dom}(f) = \mathcal{R}, \text{Ran}(f) = [k, +\infty[$$



Si $a < 0$, tenemos

$$\text{Dom}(f) = \mathcal{R}, \text{Ran}(f) =]-\infty, k]$$

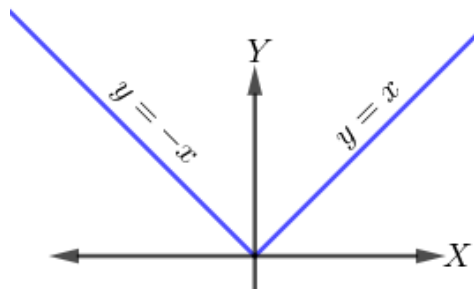


Para graficar una parábola completamos cuadrados, para obtener una ecuación de la forma $y - k = a(x - h)^2$, así tenemos el vértice (h, k) .

5. Función Valor Absoluto

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Dom}(f) = \mathcal{R}, \text{Ran}(f) = [0, +\infty[$$



6. Función Raíz Cuadrada

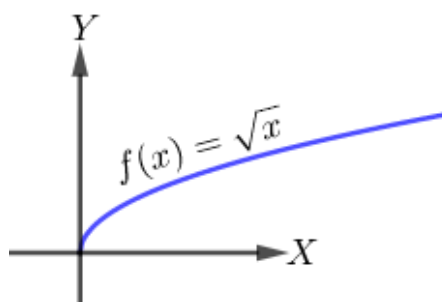
Proviene de la parábola

$$x = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}$$

Obtenemos dos funciones

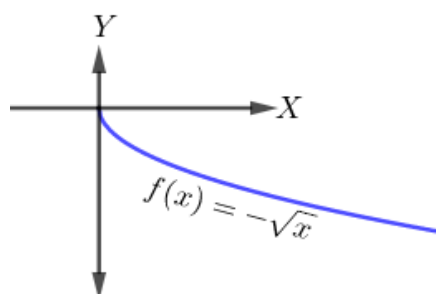
$$y = f(x) = \sqrt{x}$$

$$\text{Dom}(f) = [0, +\infty[, \text{Ran}(f) = [0, +\infty[$$



$$y = f(x) = -\sqrt{x}$$

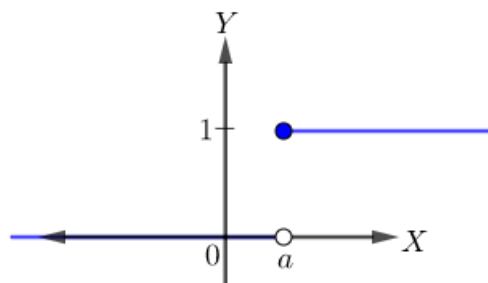
$$\text{Dom}(f) = [0, +\infty[, \text{Ran}(f) =]-\infty, 0]$$



7. Función Escalón Unitario

$$f(x) = U(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases}$$

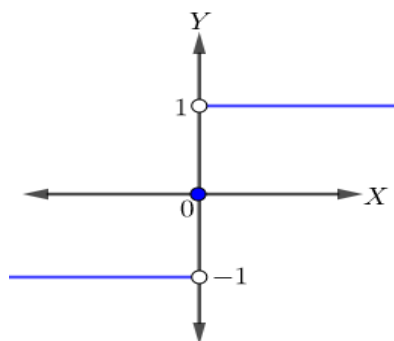
$$\text{Dom}(f) = \mathcal{R}, \text{Ran}(f) = \{0, 1\}$$



8. Función Signo

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{Dom}(f) = \mathcal{R}, \operatorname{Ran}(f) = \{-1, 0, 1\}$$



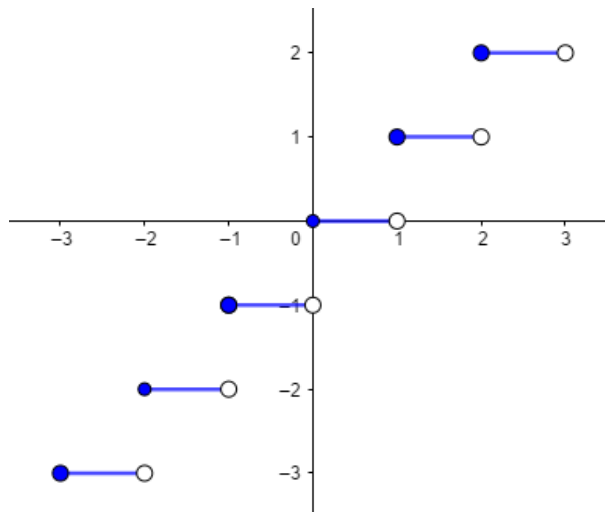
9. Función Máximo Entero

$$f(x) = \llbracket x \rrbracket = [x] = n, \quad \text{si } n \leq x < n+1, n \in \mathcal{Z}$$

Es decir

$$f(x) = [x] = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ 2, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ -1, & -1 \leq x < 0 \\ -2, & -2 \leq x < -1 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

$$\operatorname{Dom}(f) = \mathcal{R}, \operatorname{Ran}(f) = \mathcal{Z}$$



Propiedades

- $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathcal{Z}$
- $[x + n] = [x] + n, n \in \mathcal{Z}$
- $[x] \leq n \Leftrightarrow x < n + 1, n \in \mathcal{Z}$
- $[x] < n \Leftrightarrow x < n, n \in \mathcal{Z}$
- $[x] \geq n \Leftrightarrow x \geq n, n \in \mathcal{Z}$
- $[x] > n \Leftrightarrow x \geq n + 1, n \in \mathcal{Z}$

10. Función Racional

Es el cociente de dos polinomios.

$$y = f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

$$\text{Dom}(f) = \mathcal{R} - \{x/h(x) = 0\}$$

11. Función a Trozos

Son funciones que tienen dominios que están compuestos de varios trozos, para diferentes ecuaciones.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in \text{Dom}(f_1) \\ f_2(x), & x \in \text{Dom}(f_2) \\ f_3(x), & x \in \text{Dom}(f_3) \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x), & x \in \text{Dom}(f_n) \end{cases}$$

Donde

$$\text{Dom}(f) = \text{Dom}(f_1) \cup \text{Dom}(f_2) \cup \text{Dom}(f_3) \cup \dots \cup \text{Dom}(f_n)$$

y $\cap \text{Dom}(f_i)$ son disjuntos dos a dos.

$$\text{Ran}(f) = \cup \text{Ran}(f_i)$$

Ejemplos

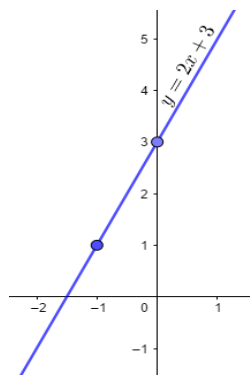
1. Determinar el dominio y rango de la función lineal $f(x) = 2x + 3$, hacer un bosquejo de la gráfica.

Resolución

Como es una función lineal, tenemos que $\text{Dom}(f) = \mathcal{R}$ y $\text{Ran}(f) = \mathcal{R}$

Para trazar la gráfica es suficientes tabular dos valores para x

x	$y = 2x + 3$
0	3
-1	1



2. Un hospital de una ciudad pequeña estudia la compra de una ambulancia. Los analistas del hospital estiman que el costo de la ambulancia, completamente equipado es de \$ 25 000. También han estimado un costo promedio de traslado del patrullero a la ciudad pequeña de \$ 0.50 por milla. Determinar la función matemática que representa el costo total.

Resolución

Sea $x = \text{número de millas}$

$$\text{Luego } f(x) = 25\,000 + 0.50x$$

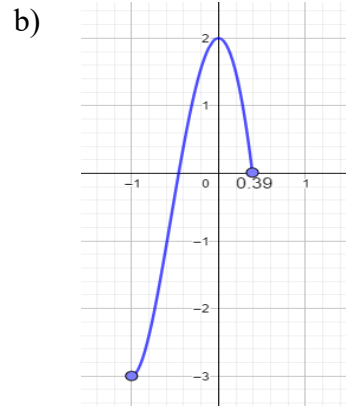
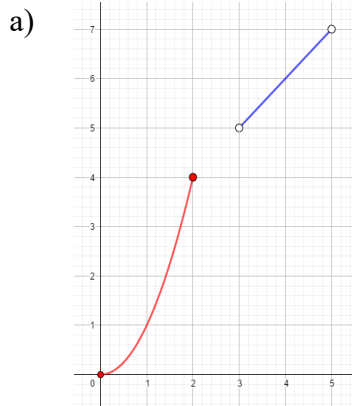
3. Dada la función racional $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 17}{x^2 - 5x + 6}$. Hallar el dominio.

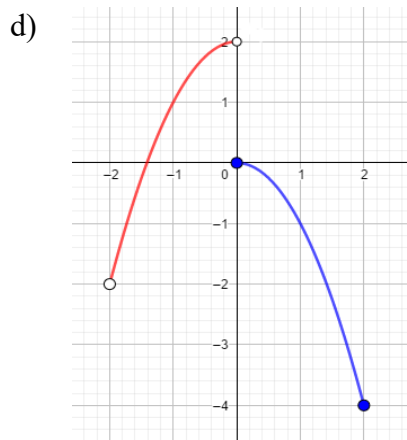
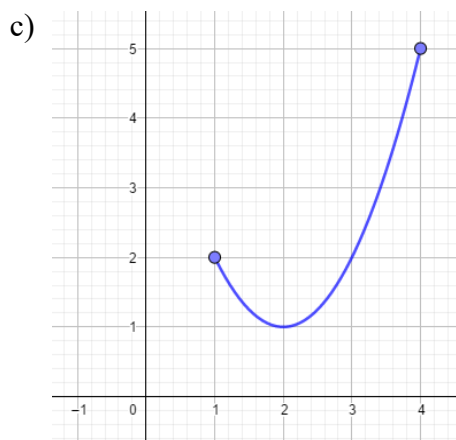
Resolución

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x^2 + 5x - 17}{x^2 - 5x + 6} &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \neq 0 \\ &\Rightarrow (x - 3)(x - 2) \neq 0 \\ &\Rightarrow x - 3 \neq 0 \vee x - 2 \neq 0 \\ &\Rightarrow x \neq 3 \vee x \neq 2 \\ &\Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathcal{R} - \{2, 3\} \end{aligned}$$

Ejercicios

- I. En cada caso, hallar el dominio y el rango de cada función representada en los gráficos siguientes:





II. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 6$	11. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-5}}$
2. $f(x) = \frac{3}{x}$	12. $f(x) = \frac{3x}{x^2-2x+1}$
3. $f(x) = x^2 - 2x$	13. $f(t) = \frac{t}{5}$
4. $f(x) = \sqrt{4x-1}$	14. $f(t) = -\sqrt{3t}$
5. $f(x) = \sqrt{5-2x}$	15. $g(x) = \frac{2x}{2x-5}$
6. $f(x) = x^2 - 4x + 2$	16. $g(x) = \sqrt{\frac{x}{4-x^2}}$
7. $f(x) = \sqrt[3]{27}$	17. $g(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
8. $f(t) = 9 - t$	18. $f(x) = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x^2}$
9. $f(t) = \frac{3t-1}{\sqrt{t-3}}$	19. $h(x) = \sqrt{x^2-3x+2} + \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$
10. $f(t) = \frac{t^2-4t+2}{t}$	20. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2-x-1}{x^2+3x}}$

III. Determinar el dominio y rango de cada función a trozos.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{si } x > 5 \\ 6-3x, & \text{si } x < 5 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x < 2 \\ -x+3, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$$c) f(x) = \begin{cases} 4x + 3, & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ 1 + x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 7, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{si } -4 \leq x \leq 4 \\ x, & \text{si } 4 < x < 6 \end{cases}$$

IV. Determinar el valor de la función, para cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 10$, $f(3); f(h); f(-3)$

2. $f(x) = 2x^2 - 5$, $f(-1); f(a); f(x+h)$

3. $f(x) = \frac{x+4}{x+3}$, $f(-1); f(0); f(x+h)$

4. $f(x) = 3x^2 - x + 4$, $f(h); f(0); f(-\sqrt{3})$

5. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 6x - 1}$, $f\left(\frac{1}{2}\right); f(1); f(12)$

V. En las siguientes funciones determinar $f(1); f(-2); f(a+b)$

1. $f(x) = -3x^2 + 10x + 1$

2. $f(x) = 4x^2 - x + 5$

3. $f(x) = \frac{3x}{2} - 1$

4. $f(t) = -t^3 + 2t^2$

5. $f(x) = mx + 3$

Aplicaciones con Funciones Lineales

1. En una tienda de relojes, cuando el precio es de $S/80$ se vende 10 relojes y vende 20 cuando el precio es de $S/60$ ¿Cuál es la ecuación de la demanda?

Resolución

Sea $x =$ la oferta y $y =$ la demanda

Teniendo como datos dos puntos (10,80) y (20,60) entonces tenemos que la pendiente es $m = \frac{60-80}{20-10} = -2$

Luego usando la ecuación punto pendiente de la recta tenemos:

$$y - 80 = -2(x - 10)$$

$$y = -2x + 20 + 80$$

$$y = -2x + 100$$

que será la ecuación demanda.

2. El costo variable de fabricar una mesa es de \$10 y los costos fijos son de \$150 al día. Determinar el costo total de fabricar x mesas al día. ¿Cuál es el costo de fabricar 100 mesas al día?

Resolución

$$\text{Costo total} = \text{Costo variables} + \text{Costos fijos}$$

Sea x el número de mesas fabricadas al día

$$\text{Costo Total} = f(x) = 10x + 150$$

El costo de fabricar 100 mesas al día será:

$$f(100) = 10(100) + 150$$

$$f(100) = \$ 1\,150$$

3. Una empresa tiene costos fijos de \$18 600 y por artículo que produce tiene un gasto de \$150. Además, la empresa vende cada artículo en \$380.
- Escriba la función de costos.
 - Escriba la función de ingreso.
 - Determine la función de utilidad.

Resolución

a) $\text{Costo total} = \text{Costo variables} + \text{Costos fijos}$

Sea x el número de artículos que produce la empresa

$$\text{Costo total} = f(x) = 150x + 18\,600$$

$$f(x) = 150x + 18\,600$$

b) *Ingreso = (precio de venta de artículo)(número de artículos vendidos)*

Sea x el número de artículos vendidos

$$\text{Ingreso} = g(x) = 380x$$

$$g(x) = 380x$$

c) *Utilidad = Ingreso – Costo total*

$$\text{Utilidad} = h(x) = g(x) - f(x)$$

$$h(x) = 380x - (150x + 18\,600)$$

$$h(x) = 230x - 18\,600$$

4. Suponer que f es una función lineal con pendiente 2 y $f(4) = 8$.

Hallar $f(x)$

Resolución

Como $f(x)$ es una función lineal, entonces tiene la forma:

$$f(x) = mx + b$$

Donde m es la pendiente, entonces $m = 2 \Rightarrow f(x) = 2x + b$

$$f(4) = 2(4) + b = 8$$

$$b = 0$$

Luego tenemos $f(x) = 2x$

5. Para calcular el monto de la depreciación se considera: Reducir el valor cada año en una cantidad constante de forma tal que el valor se reduzca a un valor de desecho al final del tiempo de vida útil estimado del equipo.

Así tenemos:

$$T = \frac{V_i - V_f}{n}$$

Donde:

T = Tasa de depreciación anual

V_i = Valor inicial

V_f = Valor final o de desecho

n = tiempo de vida en años

Si $t = 0 \Rightarrow V = V_i$

$$\text{Si } t = n \Rightarrow V = V_f$$

Entonces, V es el valor del equipo para un tiempo cualquiera.

Aplicando la ecuación punto pendiente, tenemos.

$$V - V_i = \frac{V_f - V_i}{n - 0} (t - 0) \Rightarrow V(t) = V_i - \left(\frac{V_i - V_f}{n} \right) t$$

Ejemplo

Una empresa compra maquinaria por S/150 000. Se espera que el tiempo de vida útil de la maquinaria sea 12 años con un valor de desecho de cero. Determinar el monto de depreciación anual y una fórmula para el valor depreciado después de x años.

Resolución

$T = \text{Tasa de depreciación anual}$

$$T = \frac{V_i - V_f}{n}$$

$$V_i = 150\,000$$

$$V_f = 0$$

$$n = 12 \text{ años}$$

Entonces tenemos el monto de depreciación anual:

$$T = \frac{150\,000 - 0}{12}$$

$$T = \frac{150\,000}{12}$$

$$T = 12\,500$$

El valor de depreciación después de x años, será:

Utilizando
$$V(x) = V_i - \left(\frac{V_i - V_f}{n} \right) x$$

$$V(x) = 150\,000 - 12\,500x$$

Problemas para desarrollar

1. Cuando el precio es 50 soles hay disponible 50 cámaras de un tipo dado para el mercado; cuando el precio es 75 soles hay disponibles 100 cámaras. ¿Cuál es la ecuación de la oferta?
2. Hallar el punto de equilibrio de las siguientes ecuaciones de oferta y demanda. Graficar.

$$y = 10 - 2x$$

$$y = \frac{3}{2}x + 1$$

3. El costo de producir 10 *unidades* de cierto artículo es de $S/75$ y $S/120$ de producir 25 *unidades* del mismo artículo al día. Determinar la ecuación de costo. ¿Cuál es el costo de producir 20 artículos al día? ¿Cuál es el costo variable y el costo fijo por artículos?
4. José compró un automóvil por \$10 000 ¿Cuál es el valor V del automóvil después de t años, suponiendo que se deprecia linealmente cada año a una tasa del 12% de su costo original? ¿Cuál es el valor del automóvil después de 5 años?
5. Si $y = f(x)$ es una función lineal tal que $f(-2) = 6$ y $f(1) = -3$. Hallar $f(x)$
6. Una impresora tiene un valor original de \$100 y se deprecia en forma lineal durante 5 años, con el valor de desecho de \$30:
 - a) Determinar una expresión que de un valor contable al final del año t .
 - b) ¿Cuál será el valor contable de la impresora al final del segundo año?
 - c) ¿Cuál es la tasa de depreciación de la Impresora?
7. En un experimento para una dieta para gallinas, se determinó que el peso promedio p (en gramos) de una gallina fue, según las estadísticas, una función lineal del número de días d después de que se inició la dieta, donde $0 \leq d \leq 50$. Suponer que el peso promedio de una gallina al inicio de la dieta fue de 40 *gramos* y 25 *días* después fue de 675 *gramos*.
 - a) Determinar p como una función lineal de d .
 - b) Determinar el peso promedio de una gallina cuando $d = 10$ días.

8. Determinar $f(x)$ cuando f es una función lineal que tiene las condiciones dadas.
- $f(0) = 3, f(4) = -5$
 - $\text{pendiente} = -6, f\left(\frac{1}{2}\right) = -2$
 - $f(-2) = -1, f(-4) = -3$
 - $\text{pendiente} = 0.01, f(0.1) = 0.01$
9. Un fabricante de detergente se da cuenta que las ventas son de 100 000 *paquetes* a la semana cuando el precio es de \$1.20 por paquete. Pero, las ventas se incrementan a 120 000 *paquetes* cuando el precio se reduce a \$1.10 por paquete. Determinar la relación de demanda, suponiendo que es lineal.
10. Cuando el precio por unidad de un producto sea \$10 la oferta será de 80 *unidades* diarias, mientras que será de 90 *unidades* a un precio unitario de \$10.50. Determinar la ecuación de oferta, suponiendo que es lineal.
11. Cuando se terminó en el año 2 000, un edificio de oficinas tenía un valor de \$1 000 000 y se deprecia linealmente durante 50 años ¿Cuál será el valor contable del edificio en 2 005 y 2 010? (suponga que el desecho es \$0).
12. La gerencia de la compañía de controles debe decidir entre dos procesos de producción de su termostato electrónico modelo C. El costo mensual en dólares del primer proceso está dado por $C_1(x) = 20x + 10\,000$; donde x es la cantidad de termostatos producidos, y el costo mensual del segundo proceso en dólares, está dado por $C_2(x) = 10x + 30\,000$. Si las ventas proyectadas son de 800 termostatos a un precio unitario de \$40.
- ¿Cuál proceso debe elegir la gerencia para maximizar las ganancias?
 - ¿Cuál proceso debe elegir la gerencia si las ventas proyectadas son de 1 500 *unidades*?
13. Sea la función de oferta $p = \frac{1}{300}q + 8$ y la función de demanda $p = -\frac{1}{180}q + 12$, hallar el precio de equilibrio y el número correspondiente de unidades que se ofrecieron y demandaron.
14. Sea $p = \frac{8}{100}q + 50$ la ecuación de oferta para el producto de un fabricante y sea la ecuación de la demanda $p = -\frac{7}{100}q + 65$.

- a) Si se carga un impuesto de \$1.50 por unidad al fabricante, ¿cómo será afectado el precio de equilibrio original si la demanda permanece igual?
- b) Determinar el ingreso total obtenido por el fabricante en el punto de equilibrio antes y después del impuesto.
15. Una fábrica de piqueos tiene costos fijos diarios de \$1 800, además, producir cada bolsa de piqueos cuesta \$0.50. Una bolsa de piqueos se vende a \$1.20.
- a) Encontrar el costo diario total de producir x bolsas de piqueos.
- b) Encontrar el ingreso diario por vender x bolsas de piqueos.
- c) Encontrar la ganancia diaria por vender x bolsas de piqueos.

Ejemplos de Aplicaciones con Funciones Cuadráticas

1. Dada la función cuadrática $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$, determinar el vértice de la parábola, las intersecciones con el eje X con la parábola y bosquejar la Parábola. Determinar el dominio y rango.

Resolución

$$y = f(x) = -2x^2 + 5x - 2$$

Completaremos cuadrados, para obtener una ecuación de la forma

$y - k = a(x - h)^2$, así tendremos el vértice (h, k) .

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 5x - 2 \\ y &= -2\left(x^2 - \frac{5}{2}x\right) - 2 \\ y &= -2\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right] - 2 \\ y &= -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{25}{8} - 2 \\ y &= -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} \\ y - \frac{9}{8} &= -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 \end{aligned}$$

Luego tenemos el vértice $V(h, k) = \left(\frac{5}{4}, \frac{9}{8}\right)$

Para encontrar la intersección con el eje X , hacemos $y = 0$, entonces

$$-2x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$(2x - 1)(x - 2) = 0$$

$$2x - 1 = 0 \vee x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \vee x = 2$$

Luego los puntos de intersección con el eje X , son: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $(2, 0)$

Ahora para determinar el dominio y rango, consideramos la teoría de la función especial cuadrática, tener en cuenta que en $y - k = a(x - h)^2$

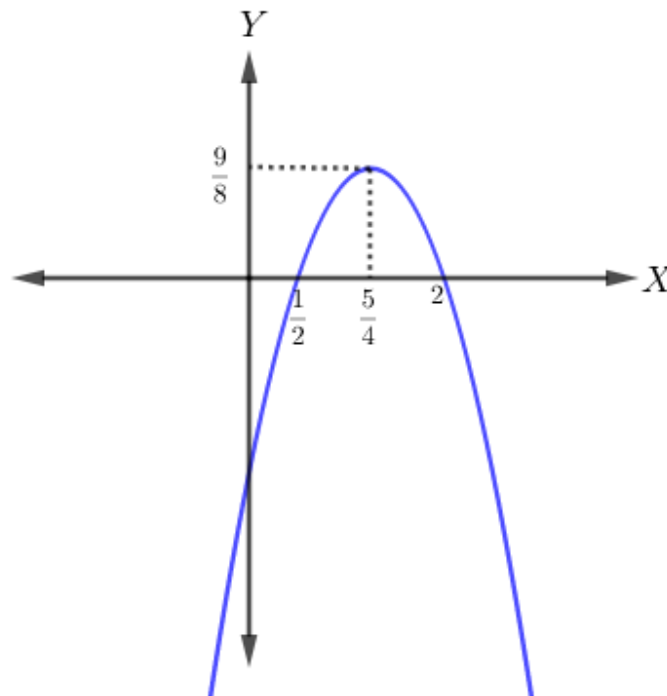
$$y - \frac{9}{8} = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2$$

$a = -2 < 0 \Rightarrow$ la parábola se abre para abajo

$$\text{Dom}(f) = \mathcal{R}$$

$$\text{Ran}(f) =]-\infty, k] = \left]-\infty, \frac{9}{8}\right]$$

$$\text{Ran}(f) = \left]-\infty, \frac{9}{8}\right]$$



2. Las ganancias mensuales obtenidas por la empresa Cannon al producir y vender x unidades de cámaras modelo M1, en dólares es:

$f(x) = -0.04x^2 + 240x - 10\,000$ Encontrar ¿Cuántas cámaras debe producir cada mes para maximizar sus ganancias?

Resolución

Para saber la máxima ganancia tenemos que encontrar el vértice de la parábola, puesto es una parábola que se abre para abajo, para ello completaremos cuadrados.

$$y = f(x) = -0.04x^2 + 240x - 10\,000$$

$$y = -\frac{4}{100}x^2 + 240x - 10\,000$$

$$y = -\frac{1}{25}x^2 + 240x - 10\,000$$

$$y = -\frac{1}{25}(x^2 - 6\,000x) - 10\,000$$

$$y = -\frac{1}{25}[(x - 3\,000)^2 - 9\,000\,000] - 10\,000$$

$$y = -\frac{1}{25}(x - 3\,000)^2 + 360\,000 - 10\,000$$

$$y = -\frac{1}{25}(x - 3\,000)^2 + 350\,000$$

$$y - 350\,000 = -\frac{1}{25}(x - 3\,000)^2$$

Luego el vértice es $V(h, k) = (3\,000, 350\,000)$

Entonces debe producir 3 000 cámaras modelo M1, para obtener una ganancia máxima de \$350 000

3. Las funciones de oferta y demanda semanales de una tienda de autopartes de vehículos están dadas por

$$p = -0.1x^2 - x + 40$$

$$p = 0.1x^2 + 2x + 20$$

respectivamente, donde p se mide en dólares y x en unidades de centena. Determinar la cantidad y el precio de equilibrio.

Resolución

Para encontrar el punto de equilibrio, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} p = -0.1x^2 - x + 40 \\ p = 0.1x^2 + 2x + 20 \end{cases}$$

Igualemos las ecuaciones $-0.1x^2 - x + 40 = 0.1x^2 + 2x + 20$

$$0.2x^2 + 3x - 20 = 0$$

$$\frac{1}{5}x^2 + 3x - 20 = 0$$

$$\frac{1}{5}x^2 + 3x - 20 = 0$$

$$x^2 + 15x - 100 = 0$$

$$(x + 20)(x - 5) = 0$$

$$x + 20 = 0 \vee x - 5 = 0$$

$$x = -20 \vee x = 5$$

Como x , representa las unidades de centenas de autopartes, consideramos $x = 5 \Rightarrow$
 $p = 0.1(5)^2 + 2(5) + 20 = 32.5$

$$p = 32.5$$

Así el punto de equilibrio $(5, 32.5)$

4. La función de demanda para la línea de laptops de una compañía de electrónica es $p = 2\,400 - 6q$, donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando los consumidores demandan q unidades (diarias). Determinar el nivel de producción que maximizará el ingreso total del fabricante y determinar el ingreso.

Resolución

La función ingreso será $I = pq = (2\,400 - 6q)q$

$$I = 2\,400q - 6q^2$$

Completaremos cuadrados para encontrar su vértice;

$$I = -6(q^2 - 400)$$

$$I = -6[(q - 200)^2 - 40\,000]$$

$$I = -6(q - 200)^2 + 240\,000$$

$$I - 240\,000 = -6(q - 200)^2$$

Luego para tener un ingreso máximo de $I = \$240\,000$ se debe tener una producción $q = 200$ laptops diario.

Problemas para desarrollar

1. Dada la función cuadrática $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$, determinar el vértice de la parábola, las intersecciones con el eje X con la parábola y bosquejar la Parábola. Determinar el dominio y rango.
2. La ganancia trimestral de la empresa YAKU está dada por:
 $P(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 7x + 30$ (en miles de soles), donde $0 \leq x \leq 50$ (en miles de soles) es la cantidad de dinero que YAKU gasta en publicidad cada trimestre. Determinar la cantidad que YAKU debería invertir en publicidad para obtener una ganancia trimestral máxima. ¿Cuál es la máxima ganancia trimestral que puede lograr YAKU?
3. Dada las funciones cuadráticas, determinar el vértice de la parábola, las intersecciones con el eje X y la parábola y bosquejar la gráfica de la parábola. Determinar el dominio y rango.
 - a) $f(x) = 2x^2 - 3x - 3$
 - b) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$
 - c) $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$
4. La utilidad diaria de la venta de zapatillas para el departamento de calzado de un almacén, está dado por $f(x) = -x^2 + 22x + 104$; donde x es el número de zapatillas vendidas. Determine el vértice y las intersecciones con los ejes de la función y bosqueje la gráfica.
5. La función de demanda de cierta marca de celulares está dada por:
 $y = -0.01x^2 - 0.2x + 8$ y la función de oferta correspondiente está dada por $y = 0.01x^2 + 0.1x + 3$, donde y se expresa en soles y x se mide en unidades de millar. Determinar la cantidad y el precio de equilibrio.
6. La función de demanda para una línea de lápices de una compañía de artículos escolares es $p = 0.5 - 0.0002q$, en donde p es el precio (en dólares) por unidad cuando los consumidores demandan q unidades (diarias). Determine el nivel de producción que maximizará el ingreso total del fabricante y determine este ingreso.
7. Celimar, dueña de una pastelería. Contrató un consultor para analizar las operaciones del negocio. Él consultor dice que sus ganancias G de la venta de x unidades de pasteles, están dadas por:

$$G = 120x - x^2$$

Trazar gráfica G . ¿Cuántos pasteles debe vender para maximizar las ganancias?
¿Cuál es la ganancia máxima?

8. La función de oferta para cierta marca de cámaras está dada por
 $p = s(x) = 0.01x^2 + 0.1x + 3$, p es el precio unitario al mayoreo, en dólares y x representa la cantidad que el proveedor pondrá en el mercado (medidas en unidades de millar). Trazar la curva de oferta correspondiente. ¿Cuál es el precio mínimo para el cual el proveedor colocara las cámaras en el mercado?
9. Una compañía de investigación de mercados estima que “ n ” meses después de la introducción de un nuevo producto, $f(n)$ miles de familias lo usaran, en donde
 $f(n) = \frac{8}{3}n(18 - n)$, $0 \leq n \leq 18$;
 Estimar el número máximo de familias que usaran el producto.
10. El ingreso de una empresa algodonera se estima a través del tiempo de acuerdo a la siguiente función $I = -24t^2 + 288t - 64$, donde I es el ingreso en miles de dólares y t es el tiempo en años.
 ¿En qué año se alcanzará el máximo ingreso y cuánto será? Graficar.

3.3 Álgebra y Composición de Funciones

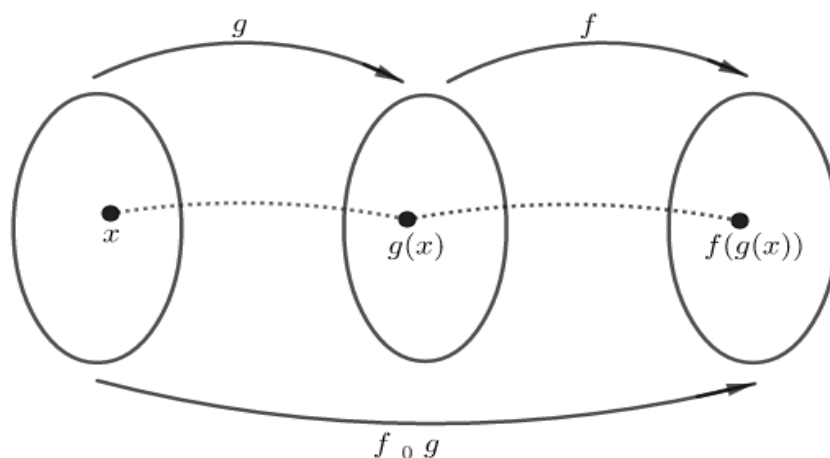
Álgebra de Funciones

Si f y g son funciones con dominio D_f y D_g , respectivamente.

$\forall x \in D_f \cap D_g \neq \emptyset$, se define:

- | | |
|--|---|
| i) $(kf)(x) = k \cdot f(x)$, k constante | $D_{kf} = D_f$ |
| ii) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, | $D_{f+g} = D_f \cap D_g$ |
| iii) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, | $D_{f-g} = D_f \cap D_g$ |
| iv) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, | $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$ |
| v) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, | $D_{f/g} = (D_f \cap D_g) - \{g(x) = 0\}$ |

Composición de funciones



Si f y g son funciones, la composición de f y g , representada por $f \circ g$, está definida:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad D_{f \circ g} = \{x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$$

Observación. Tener en cuenta que no necesariamente se cumple:

$$f \circ g = g \circ f$$

Ejemplos

1. Encontrar $f + g, f - g, f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$; y sus dominios, donde $f(x) = x^2 + 2x$ y $g(x) = \sqrt{3x^2 - 1}$

Resolución

Para ver si existen las operaciones $f + g, f - g, f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$, determinaremos $D_f \cap D_g$.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_g: 3x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq \frac{1}{3} \Rightarrow x \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \vee x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$D_g = \left[-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$$

Luego tenemos que

$$D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \left[-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[= \left[-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 2x + \sqrt{3x^2 - 1}, \quad x \in \left] -\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty \right[$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 2x - \sqrt{3x^2 - 1}, \quad x \in \left] -\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty \right[$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 + 2x)\sqrt{3x^2 - 1}, \quad x \in \left] -\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty \right[$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x^2 + 2x)}{\sqrt{3x^2 - 1}}, \quad x \in \left\langle -\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty \right\rangle$$

2) Hallar $f \circ g$ y $g \circ f$; Si $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \in [0, 2] \\ x + 1, & x \in \langle 3, 5 \rangle \end{cases}$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$

Resolución

➤ Para hallar $f \circ g$, primero determinaremos $D_{f \circ g}$

Tener en cuenta $D_{f_1} = [0, 2]$, $D_{f_2} = \langle 3, 5 \rangle$ y $D_g = [1, +\infty[$

$$D_{f_1 \circ g} = \{x \in D_g \wedge g(x) \in D_{f_1}\} \Rightarrow x \in [1, +\infty[\wedge g(x) = \sqrt{x - 1} \in [0, 2]$$

$$\Rightarrow x \in [1, +\infty[\wedge 0 \leq \sqrt{x - 1} \leq 2$$

$$x \in [1, +\infty[\wedge 0 \leq x - 1 \leq 4$$

$$x \in [1, +\infty[\wedge 1 \leq x \leq 5$$

$$x \in [1, 5] \Rightarrow D_{f_1 \circ g} = [1, 5]$$

$$D_{f_2 \circ g} = \{x \in D_g \wedge g(x) \in D_{f_2}\} \Rightarrow x \in [1, +\infty[\wedge g(x) = \sqrt{x - 1} \in \langle 3, 5 \rangle$$

$$\Rightarrow x \in [1, +\infty[\wedge 3 < \sqrt{x - 1} < 5$$

$$x \in [1, +\infty[\wedge 9 < x - 1 < 25$$

$$x \in [1, +\infty[\wedge 10 < x < 26$$

$$\Rightarrow D_{f_2 \circ g} = \langle 10, 26 \rangle$$

$$\text{Luego } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} f_1(g(x)), & x \in D_{f_1 \circ g} \\ f_2(g(x)), & x \in D_{f_2 \circ g} \end{cases}$$

$$f(g(x)) = \begin{cases} f_1(\sqrt{x - 1}), & x \in [1, 5] \\ f_2(\sqrt{x - 1}), & x \in \langle 10, 26 \rangle \end{cases}$$

$$f(g(x)) = \begin{cases} 2\sqrt{x - 1} - 1, & x \in [1, 5] \\ \sqrt{x - 1} + 1, & x \in \langle 10, 26 \rangle \end{cases}$$

➤ Para hallar $g \circ f$, primero determinaremos

$$\begin{aligned}
 D_{g \circ f_1} &= \{x \in D_{f_1} \wedge f_1(x) \in D_g\} \Rightarrow x \in [0,2] \wedge f_1(x) = 2x - 1 \in [1, +\infty[\\
 &\Rightarrow x \in [0,2] \wedge 1 \leq 2x - 1 \\
 &\Rightarrow x \in [0,2] \wedge x \geq 1 \\
 &\Rightarrow D_{g \circ f_1} = [1,2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{g \circ f_2} &= \{x \in D_{f_2} \wedge f_2(x) \in D_g\} \Rightarrow x \in \langle 3,5 \rangle \wedge f_2(x) = x + 1 \in [1, +\infty[\\
 &\Rightarrow x \in \langle 3,5 \rangle \wedge 1 \leq x + 1 \\
 &\Rightarrow x \in \langle 3,5 \rangle \wedge x \geq 0 \\
 &\Rightarrow D_{g \circ f_2} = \langle 3,5 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Luego } (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = \begin{cases} g(f_1(x)), & x \in D_{g \circ f_1} \\ g(f_2(x)), & x \in D_{g \circ f_2} \end{cases} \\
 g(f(x)) &= \begin{cases} g(2x - 1), & x \in [1,2] \\ g(x + 1), & x \in \langle 3,5 \rangle \end{cases} \\
 g(f(x)) &= \begin{cases} \sqrt{2x - 1} - 1, & x \in [1,2] \\ \sqrt{x + 1} - 1, & x \in \langle 3,5 \rangle \end{cases} \\
 g(f(x)) &= \begin{cases} \sqrt{2x - 2}, & x \in [1,2] \\ \sqrt{x}, & x \in \langle 3,5 \rangle \end{cases}
 \end{aligned}$$

Función Par e Impar

Función Par: Una función f es par; si cumple:

- i) $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$
- ii) $f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$

Observación. La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje Y . Es decir $(x, y) \in \text{Graf}(f) \Leftrightarrow (-x, y) \in \text{Graf}(f)$

Función Impar: Una función f es impar; si cumple:

- i) $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$
- ii) $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$

Observación. La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen. Es decir $(x, y) \in \text{Graf}(f) \Leftrightarrow (-x, -y) \in \text{Graf}(f)$

Función periódica: una función f es periódica, si existe un número $p \neq 0$, si cumple:

$$i) x \in D_f \Rightarrow (x + p) \in D_f$$

$$ii) x \in D_f \Rightarrow f(x + p) = f(x), \forall x \in D_f$$

Observación.

- Al menor número $p > 0$ se le llama periodo de f .
- La gráfica de la función periódica f se repite en forma idéntica cada p unidades.

Ejemplos

1. Determinar si la función f es par o impar.

a) $f(x) = 5x^2 - x^4$

Resolución

$$D_f = \mathcal{R}$$

$$i) x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$$

$$ii) f(-x) = 5(-x)^2 - (-x)^4 = 5x^2 - x^4 = f(x)$$

$$f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$$

Luego f es par.

b) $f(x) = 3x^3 - x$

Resolución

$$D_f = \mathcal{R}$$

$$i) x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$$

$$ii) f(-x) = 3(-x)^3 - (-x) = -3x^3 + x = -(3x^3 - x) = -f(x)$$

$$f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$$

Luego f es impar.

c) $f(x) = \sqrt[3]{x(3 + |x|)}$

Resolución

$$D_f = \mathcal{R}$$

$$i) x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$$

$$ii) f(-x) = \sqrt[3]{(-x)(3+|-x|)} = -\sqrt[3]{x(3+|x|)} = -f(x)$$

$$f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$$

Luego f es impar.

$$d) f(x) = |x^3 + 3x|, x \in \langle -3, 3 \rangle$$

Resolución

$$D_f = \langle -3, 3 \rangle$$

$$i) x \in D_f = \langle -3, 3 \rangle \Rightarrow -3 < x < 3$$

$$\Rightarrow 3 > -x > -3 \Rightarrow -x \in \langle -3, 3 \rangle = D_f$$

$$ii) f(-x) = |(-x)^3 + 3(-x)| = |-x^3 - 3x| = |(-1)(x^3 + 3x)| =$$

$$|-1||x^3 + 3x| = |x^3 + 3x| = f(x)$$

$$f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$$

Luego f es par.

2. Dada la función $f(x) = x - [x]$, probar que f es periódica, bosquejar su gráfica.

Resolución

Probaremos que f es periódica, luego el $D_f = \mathcal{R}$, entonces tenemos que

$$i) x \in D_f = \mathcal{R} \Rightarrow (x + p) \in D_f = \mathcal{R}$$

$$ii) f(x + p) = x + p - [x + p], \forall x \in D_f$$

Supongamos $f(x + p) = f(x)$, $p \neq 0$, entonces

$$x + p - [x + p] = x - [x]$$

$$p = [x + p] - [x]$$

Donde nos resulta que p es la diferencia de dos números enteros entonces, tenemos que $p \in \mathbb{Z}$.

Luego podemos aplicar la propiedad de máximo entero

$$[x + n] = [x] + n, n \in \mathbb{Z}; \text{ así tenemos en}$$

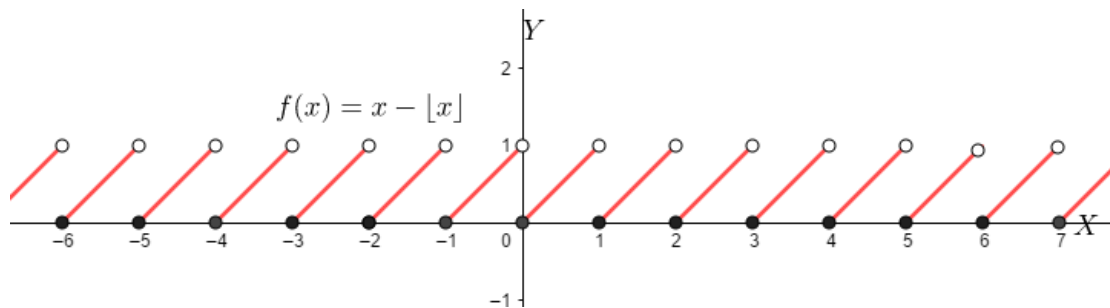
$$ii) f(x + p) = x + p - [x + p] = x + p - [x] - p = x - [x] = f(x)$$

$$f(x + p) = f(x), \forall x \in D_f$$

Por lo tanto f es periódica.

Para graficar, tomaremos el periodo $p > 0$, donde $p = \min\{1, 2, 3, \dots\} = 1$, es decir que la gráfica se va a repetir cada intervalo de longitud igual a la unidad.

$$f(x) = x - [x] = x - n = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ x - 3, & 3 \leq x < 4 \\ x - 2, & 2 \leq x < 3 \\ x - 1, & 1 \leq x < 2 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ x + 1, & -1 \leq x < 0 \\ x + 2, & -2 \leq x < -1 \\ x + 3, & -3 \leq x < -2 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$



3.4 Función inyectiva y Sobreyectiva

Función Inyectiva: Una función f es inyectiva si $\forall x_1, x_2 \in D_f$, se tiene que; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Equivalentemente, f es inyectiva si $\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 \neq x_2$ se tiene que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Observación: Una gráfica de una función f es inyectiva si una recta horizontal (paralela al eje X) corta a la gráfica de f solo en un punto.

Función Sobreyectiva: Una función $f: A \rightarrow B$ es sobreyectiva,

si $\forall y \in B, \exists x \in A$ tal que $y = f(x)$

es decir $f: A \rightarrow B$ es sobreyectiva si y solo si $R_f = B$.

Función Biyectiva: Una función f es biyectiva si f es inyectiva y sobreyectiva.

Función Inversa: Si $f: A \rightarrow B$ es una función inyectiva, entonces existe la función inversa de f , denotada por f^{-1} , donde

$$f^{-1}: B \rightarrow A, \text{ tal que } f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

Observación: Si f es una función inyectiva y $f(x) = y$, es decir cuando resolvemos la ecuación anterior para x , en términos de y , obtenemos la función inversa de f ; $x = f^{-1}(y)$. Donde $D_{f^{-1}} = R_f$ y $R_{f^{-1}} = D_f$.

Propiedades de la Función Inversa:

$$i) (f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad \forall x \in D_f$$

$$ii) (f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$$

$$iii) (f \circ f^{-1})(y) = y, \quad \forall y \in D_{f^{-1}}$$

$$iv) (f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$$

Ejemplos

1. Determinar si $f(x) = 3 - 4x - x^2$ es inyectiva.

Resolución

El $D_f = \mathcal{R}$ ya que es una función cuadrática, además completando cuadrados tenemos

$$f(x) = 7 - (x + 2)^2$$

f es inyectiva si $\forall x_1, x_2 \in D_f = \mathcal{R}$, se tiene que; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$7 - (x_1 + 2)^2 = 7 - (x_2 + 2)^2$$

$$(x_1 + 2)^2 = (x_2 + 2)^2$$

$$|x_1 + 2| = |x_2 + 2|$$

$$x_1 + 2 = x_2 + 2 \quad \vee \quad x_1 + 2 = -(x_2 + 2)$$

$$x_1 = x_2 \quad \vee \quad x_1 + 2 = -x_2 - 2$$

$$x_1 = x_2 \quad \vee \quad x_1 = -x_2 - 4$$

Como el $D_f = \mathcal{R}$, x_1 toma dos valores, luego f no es inyectiva.

2. Determinar si $f(x) = 5x^2 + 3$ es inyectiva, $D_f =]-\infty, 0]$

Resolución

f es inyectiva si $\forall x_1, x_2 \in D_f$, se tiene que; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$5x_1^2 + 3 = 5x_2^2 + 3$$

$$5x_1^2 = 5x_2^2$$

$$x_1^2 = x_2^2$$

$$|x_1| = |x_2|$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2$$

Pero $x_1, x_2 \in D_f =]-\infty, 0]$ entonces solo se cumple que $x_1 = x_2$, lo que quiere decir que f es inyectiva.

3. Determinar si $f(x) = \frac{x-3}{x+3}, x \neq -3$ es inyectiva.

Resolución

$$\text{El } D_f = \mathcal{R} - \{-3\}$$

f es inyectiva si $\forall x_1, x_2 \in D_f$, se tiene que; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{x_1 - 3}{x_1 + 3} = \frac{x_2 - 3}{x_2 + 3}$$

$$(x_1 - 3)(x_2 + 3) = (x_2 - 3)(x_1 + 3)$$

$$x_1x_2 + 3x_1 - 3x_2 - 9 = x_1x_2 + 3x_2 - 3x_1 - 9$$

$$3x_1 - 3x_2 = 3x_2 - 3x_1$$

$$6x_1 = 6x_2$$

$$x_1 = x_2$$

Luego $f(x) = \frac{x-3}{x+3}, x \neq -3$ es inyectiva.

4. Determinar si la función f es sobreyectiva.

a) $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathcal{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$

Resolución

$$\text{Como } x \in [1, +\infty) \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x - 1 \geq 0 \Rightarrow y = \sqrt{x-1} \geq 0$$

$$\Rightarrow R_f = [0, +\infty) \neq \mathcal{R}$$

Luego f no es sobreyectiva.

b) $f: [-2,2] \rightarrow [0,4]$, definida por $f(x) = x^2$

Resolución

Como $x \in [-2,2] \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x < 0 \vee 0 \leq x \leq 2$

$$\Rightarrow 4 \geq x^2 > 0 \vee 0 \leq x^2 \leq 4$$

$$\Rightarrow y = x^2 \in [0,4]$$

$$R_f = [0,4]$$

Luego f es sobreyectiva.

c) $f: \mathcal{R} - \{0\} \rightarrow [-1,1]$, definida por $f(x) = \frac{|x|}{x}$

Resolución

$$\text{Tenemos que } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1, & x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$R_f = \{-1,1\} \neq [-1,1]$$

Luego f no es sobreyectiva.

5. Sea $f: [1,4] \rightarrow [a,b]$, definida por $f(x) = x^2 - 2x + 2$. Probar que f es inyectiva y hallar los valores de a y b , para que f sea biyectiva.

Resolución

El $D_f = [1,4]$, además completando cuadrados tenemos que

$$f(x) = (x - 1)^2 + 1$$

- Probaremos que f es inyectiva

f es inyectiva si $\forall x_1, x_2 \in D_f = [1,4]$, se tiene que; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$(x_1 - 1)^2 + 1 = (x_2 - 1)^2 + 1$$

$$(x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2$$

$$|x_1 - 1| = |x_2 - 1|$$

Como $x_1, x_2 \in [1,4] \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

Luego f es inyectiva.

- Para que f , sea sobreyectiva debe cumplirse que $R_f = [a, b]$

Partiremos de $x \in [1, 4] \Rightarrow 1 \leq x \leq 4$

$$0 \leq x - 1 \leq 3$$

$$0 \leq (x - 1)^2 \leq 9$$

$$1 \leq \underbrace{(x - 1)^2 + 1}_y \leq 10$$

$$1 \leq y \leq 10$$

$$\Rightarrow y \in [1, 10]$$

Tenemos entonces el $R_f = [1, 10]$

$$\text{Luego } [1, 10] = [a, b] \Rightarrow a = 1, b = 10$$

- Como f es inyectiva y sobreyectiva, entonces f es biyectiva.

6. Hallar y graficar la función inversa de $f(x) = x^2 - 2x - 1, x \geq 2$

Resolución

Completando cuadrado tenemos $f(x) = (x - 1)^2 - 2, x \in [2, +\infty)$

- Veremos si f es inyectiva,

f es inyectiva si $\forall x_1, x_2 \in D_f = [2, +\infty)$, se tiene que;

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$(x_1 - 1)^2 - 2 = (x_2 - 1)^2 - 2$$

$$(x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2$$

$$|x_1 - 1| = |x_2 - 1|$$

$$\text{Como } x_1, x_2 \in [2, +\infty) \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

Luego f es inyectiva.

- Como f es inyectiva, podemos determinar f^{-1} , la cual se obtiene despejando x tenemos $y = (x - 1)^2 - 2 \Rightarrow y + 2 = (x - 1)^2$

$$\Rightarrow x - 1 = \pm \sqrt{y + 2}$$

$$\Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{y+2}$$

$$\text{Como } x \in [2, +\infty) \Rightarrow x = 1 + \sqrt{y+2}$$

$$\text{Luego } f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+2}$$

- Ahora para determinar el $D_{f^{-1}}$, encontraremos el R_f

$$\text{Tenemos que } x \geq 2 \Rightarrow x - 1 \geq 1$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 \geq 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x - 1)^2 - 2}_{y} \geq -1$$

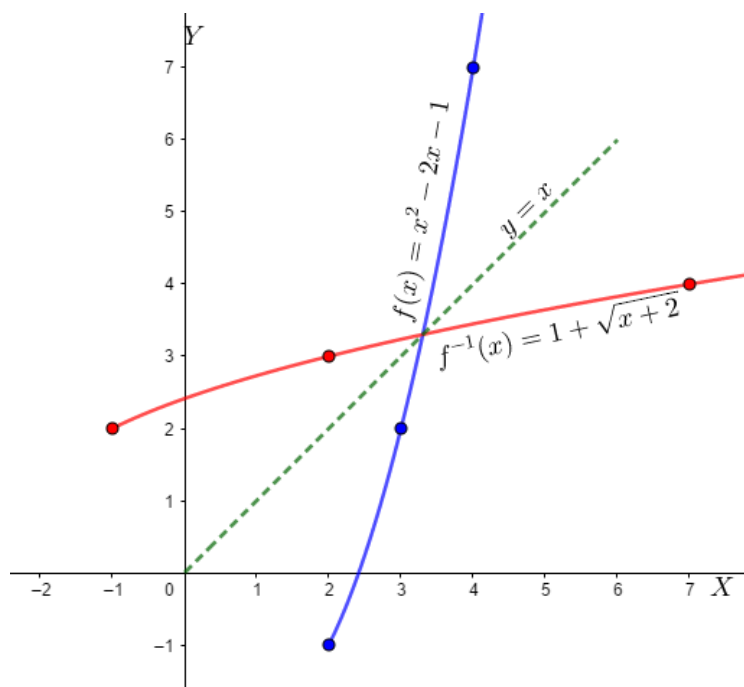
$$\Rightarrow y \geq -1$$

$$\Rightarrow R_f = [-1, +\infty) = D_{f^{-1}}$$

$$\text{Por tanto } f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+2}, \quad x \in [-1, +\infty)$$

- Para graficar tabularemos algunos puntos, teniendo en cuenta el dominio:

x	$y = f(x) = (x - 1)^2 - 2$	x	$y = f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+2}$
2	-1	-1	2
3	2	2	3
4	7	7	4



Observa en el grafico que f y f^{-1} , se reflejan suponiendo que $y = x$, funciona como espejo.

Ejercicios

1. Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in]-4, 8] \\ x^3 + 2x^2, & x \in \langle 8, 16 \rangle \end{cases} \quad y \quad g(x) = \begin{cases} 3 - x, & x \in [5, 12[\\ 5, & x \in \langle 12, 16 \rangle \end{cases}$$

Encontrar $f + g, f - g, f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$

2. Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq 1 \\ x^2 - 2, & x \leq 0 \end{cases} \quad y \quad g(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x \leq 9 \\ x^3, & x \geq 10 \end{cases}$$

Hallar $f + g, f - g, f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$

3. Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} |-2x| + 3x, & x \in]-3, -2] \\ |x^2 - 3|, & x \in \langle -2, 3 \rangle \end{cases} \quad y \quad g(x) = \begin{cases} |x + 3|, & x \in]-5, -2] \\ \sqrt{x^2 + 6}, & x \in \langle 0, 3 \rangle \end{cases}$$

Hallar $f - g$.

4. Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases} \quad y \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \in [0, 4] \\ 0, & x \in \langle 4, 7 \rangle \end{cases}$$

Determinar $f \circ g$ y $g \circ f$.

5. Encontrar $f + g, f - g, f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$

a) $f(x) = x - 4$ y $g(x) = x^2$

b) $f(x) = x^2 + 2x$ y $g(x) = 3x^2 - 1$

c) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{1 + x}$

d) $f(x) = \frac{2}{1+x}$ y $g(x) = \frac{x}{1+x}$

6. Determinar las funciones $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$ y sus dominios.

a) $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = 4x - 1$

b) $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 1$

c) $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = 2x + 4$

e) $f(x) = |x|$ y $g(x) = 2x + 3$

f) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ y $g(x) = 2x - 1$

g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ y $g(x) = x^2 - 4x$

7. Sean las funciones $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = x + a$. Determinar el valor de a de modo que $(f \circ g)(3) = (g \circ f)(a - 1)$.

8. Si $(g \circ f)(x + 2) = 2x^2 - x$ y $f(x - 1) = x - 2$, Calcular $g(x)$.

9. Dadas las funciones $f, g: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, tales que $f(x - 1) = 3x^2 + ax + 12$ y $g(x + 1) = 5x + 7$. Hallar el valor de a de modo que $(f \circ g)(-2) = -4a$.

10. Sean $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$ y $h(x) = x - 5$. Si se sabe que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$; Hallar los valores de x tales que $(h \circ f \circ (g + h))(x) = 0$.

11. Determinar si la función f es inyectiva.

a) $f(x) = x^2 + 4x - 1$

b) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}, x \neq -2$

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-3}, & x \geq 3 \\ x^2 + 2x - 3, & x \in [-1, 1[\end{cases}$

12. Sean $f(x) = x^3 + 2$, $g(x) = \frac{x-2}{x+3}$, si $g^{-1}(f^{-1}(a)) = -\frac{4}{3}$, hallar $g^{-1}(a + 5)$.

13. Hallar la función inversa, si existe, para $f(x) = \frac{|x+4|}{|x-1|-1}$, $x \in \langle -2, 0 \rangle \cup \langle 0, 1 \rangle$

14. Dadas las funciones reales $f(x) = \frac{|x|+1}{x}$ y $g(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$. Hallar el dominio de $f^{-1} \circ g^{-1}$

15. Demuestre que la función $f(x) = [2x] - 2[x]$ es periódica.

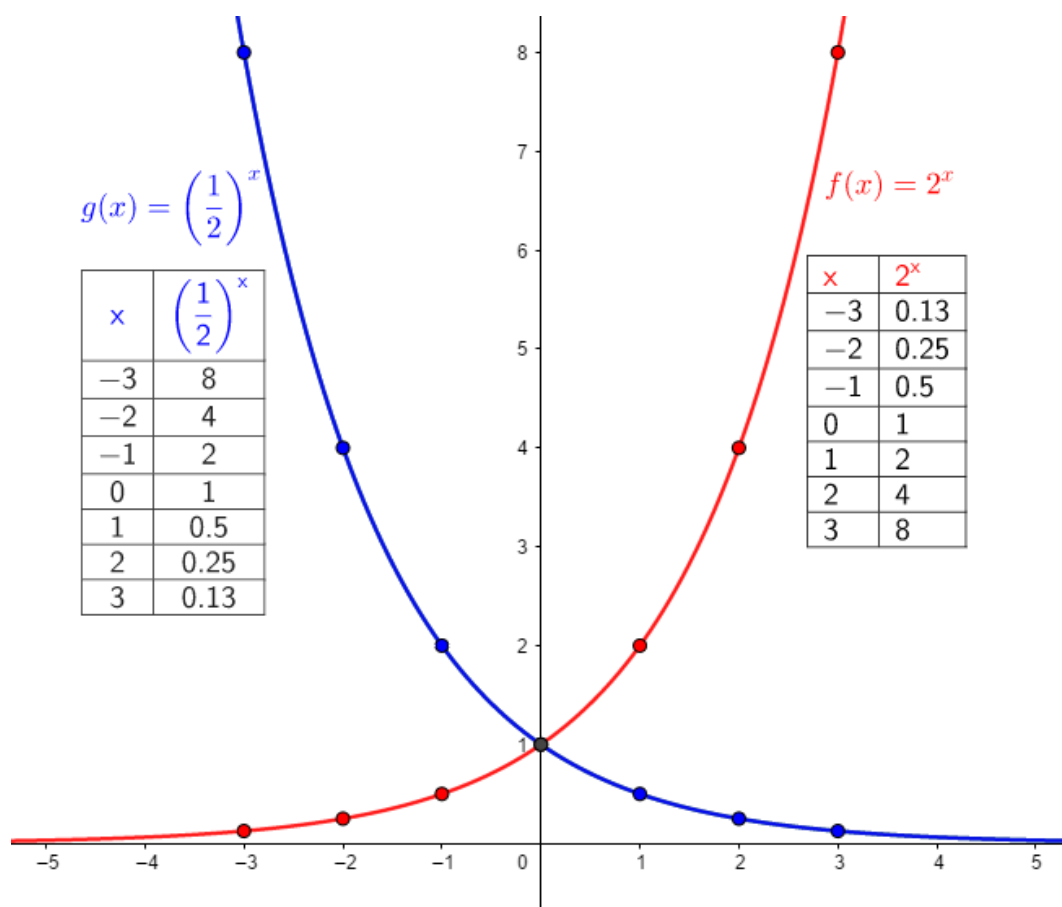
16. Encontrar la función inversa, si existe:

- a) $f(x) = x^2 - 2x + 4$
- b) $f(x) = \sqrt{x-1}, x \in [1, +\infty)$
- c) $f(x) = -\sqrt{x^2 + 6x - 7}, x \in \langle -\infty, -7]$
- d) $f: \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \mathcal{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{1-|x|}$
- e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 1, & x \in [-4, -2] \\ \sqrt{x+2}, & x \in [-2, 2] \\ 1 - \frac{x}{2}, & x \in \langle 2, 6] \end{cases}$

3.5 Funciones Trascendentes

3.5.1 Funciones Exponenciales

Trazar las gráficas de las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, en el mismo plano y analiza su dominio y rango.



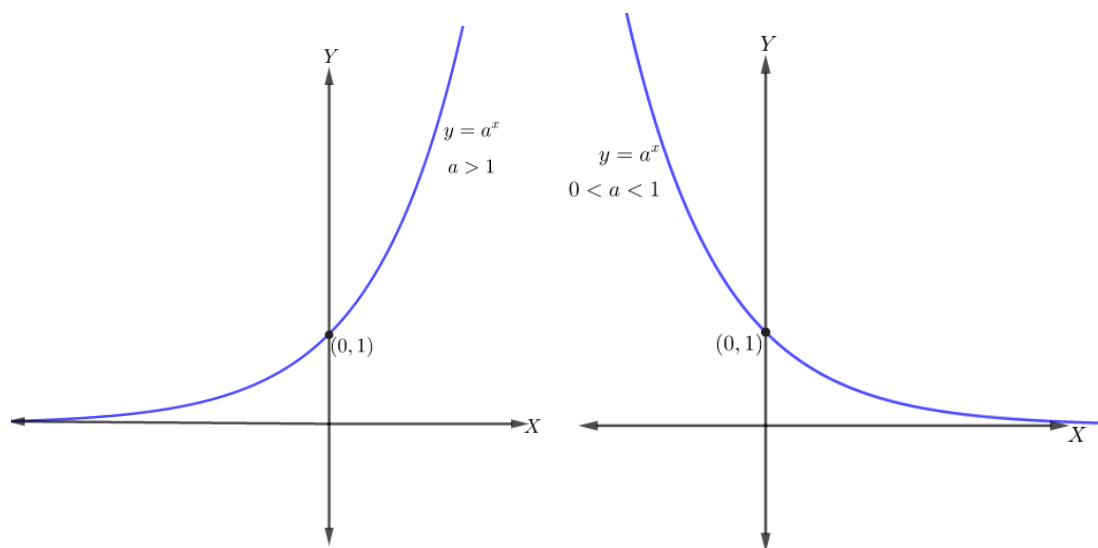
$$\text{Dom}(f) = \mathcal{R} \text{ y } \text{Ran}(f) = \langle 0, +\infty \rangle$$

$$\text{Dom}(g) = \mathcal{R} \text{ y } \text{Ran}(g) = \langle 0, +\infty \rangle$$

Definición de Funciones Exponenciales

Una función exponencial de base a , está definida por $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$; donde $\text{Dom}(f) = \mathcal{R}$ y $\text{Ran}(f) = \langle 0, +\infty \rangle$

Para la gráfica de $f(x)$ tiene dos formas.

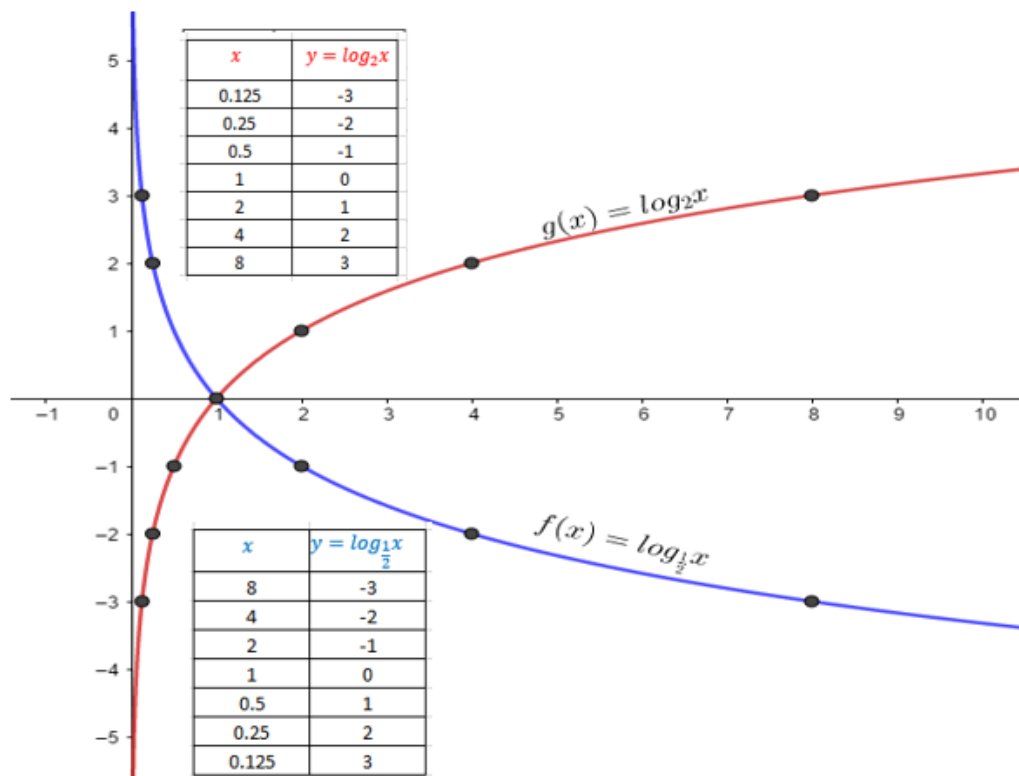


Propiedades

1. $a^{x+y} = a^x a^y$
2. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x b^x$
5. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
6. $a^x = a^z \Rightarrow x = z$, ya que la función exponencial es inyectiva

3.5.2 Funciones Logarítmicas

Trazar las gráficas de las funciones $f(x) = \log_2 x$ y $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ y analizar su dominio y rango.



$$\text{Dom}(f) = \langle 0, +\infty \rangle \text{ y } \text{Ran}(f) = \mathcal{R}$$

$$\text{Dom}(g) = \langle 0, +\infty \rangle \text{ y } \text{Ran}(g) = \mathcal{R}$$

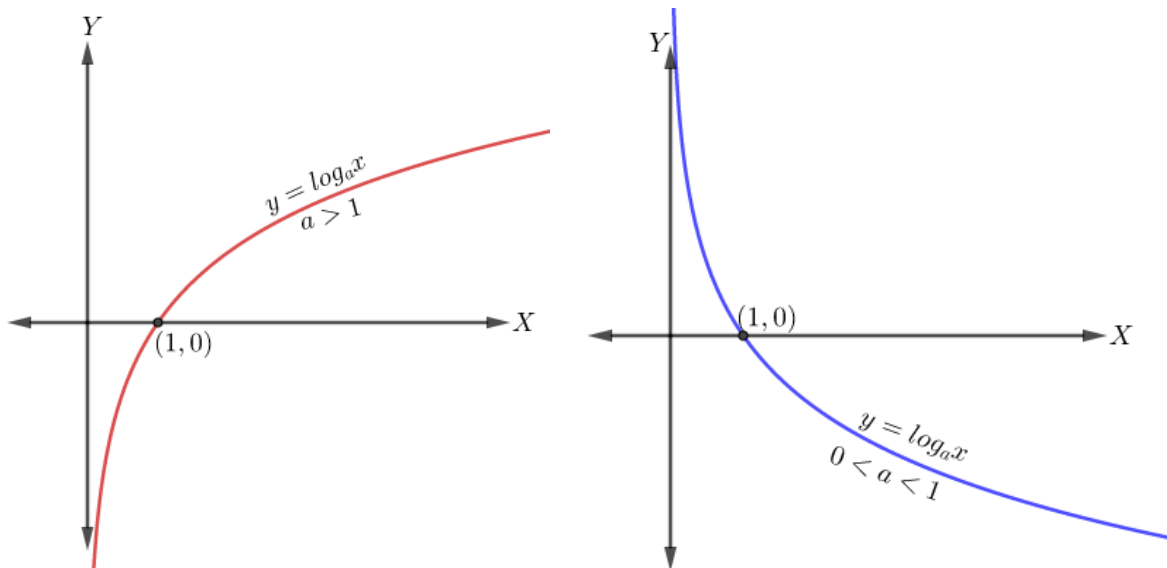
Definición de Funciones Logarítmicas

Para $a > 0$ y $a \neq 1$, la función logaritmo de base a se define como

$f(x) = \log_a x$; donde $\text{Dom}(f) = \langle 0, +\infty \rangle$ y $\text{Ran}(f) = \mathcal{R}$, y se cumple que:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

Para la gráfica de $f(x)$ tiene dos formas.



Propiedades

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a x^n = n \log_a x$
4. $\log_a a = 1$
5. $\log_a(a^x) = x$
6. $\log_{a^b}(x) = \frac{1}{b} \log_a x$
7. $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$
8. $a^{\log_a x} = x$
9. $\ln(e^x) = x$
10. $e^{\ln x} = x, \quad x > 0$
11. $\ln e = 1, \ln(1) = 0$
12. $\log_a x = \log_a z \Rightarrow x = z$, ya que la función logaritmo es inyectiva

3.5.3 Funciones Trigonómicas

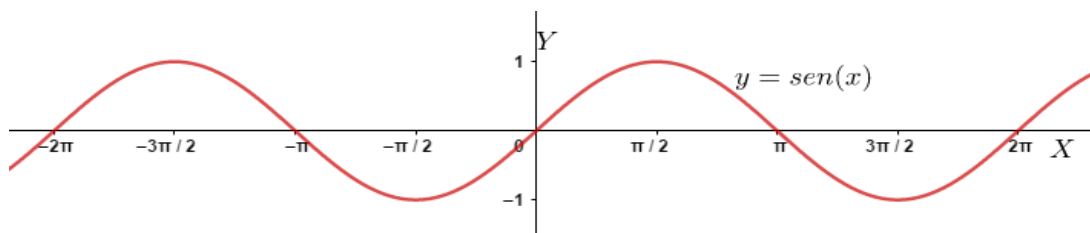
Identidades Trigonómicas

1. $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$
2. $1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$
3. $1 + \cot^2(\theta) = \csc^2(\theta)$
4. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
5. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
6. $\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$
7. $\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$
8. $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta) \cdot \cos(\theta)$
9. $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$

Función Seno

$$f(x) = \sin(x)$$

$$\text{Dom}(f) = \mathcal{R}, \quad \text{Ran}(f) = [-1, 1]$$



Observación: La función $f(x) = \sin(x)$ es impar, es decir;

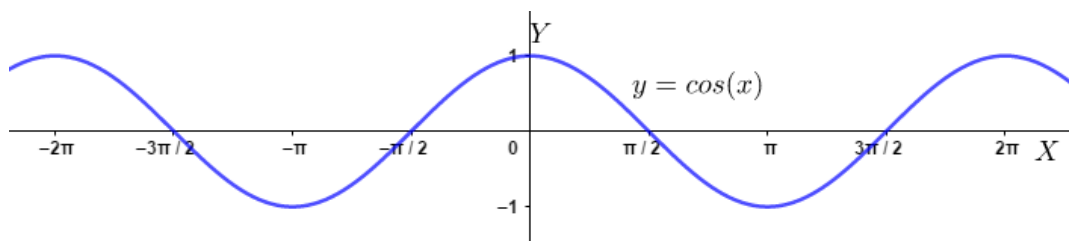
$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x)$$

$$\text{Ejemplo: } \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Función Coseno

$$f(x) = \cos(x)$$

$$\text{Dom}(f) = \mathcal{R}, \quad \text{Ran}(f) = [-1, 1]$$



Observación: La función $f(x) = \cos(x)$ es par, es decir;

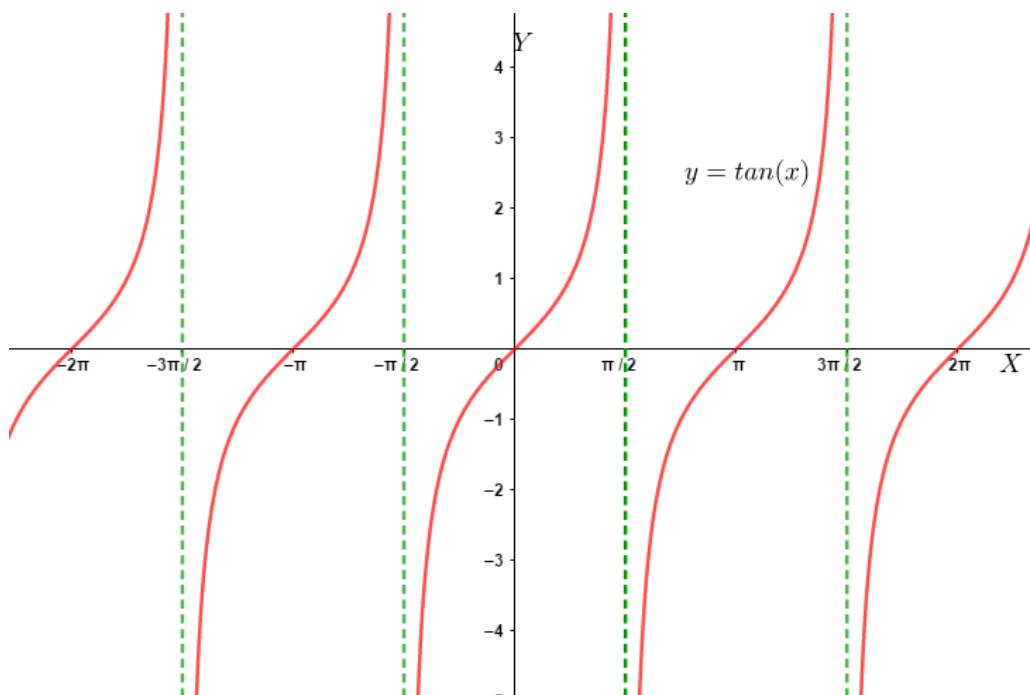
$$f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x)$$

$$\text{Ejemplo: } \cos(-\pi) = \cos(\pi)$$

Función Tangente

$$f(x) = \tan(x)$$

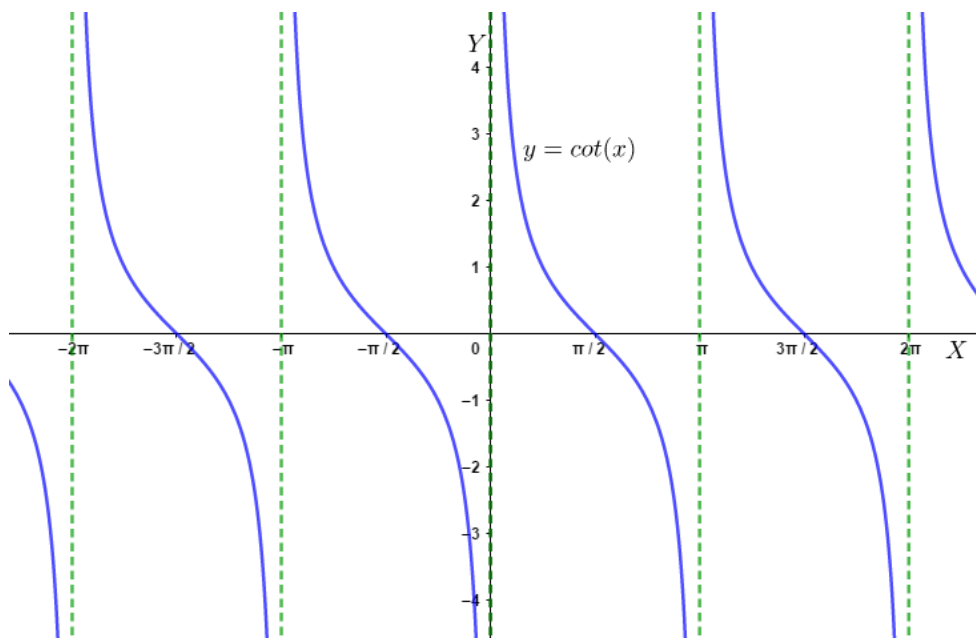
$$\text{Dom}(f) = \mathcal{R} - \left\{ n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \text{Ran}(f) = \mathcal{R}$$



Función Cotangente

$$f(x) = \cot(x)$$

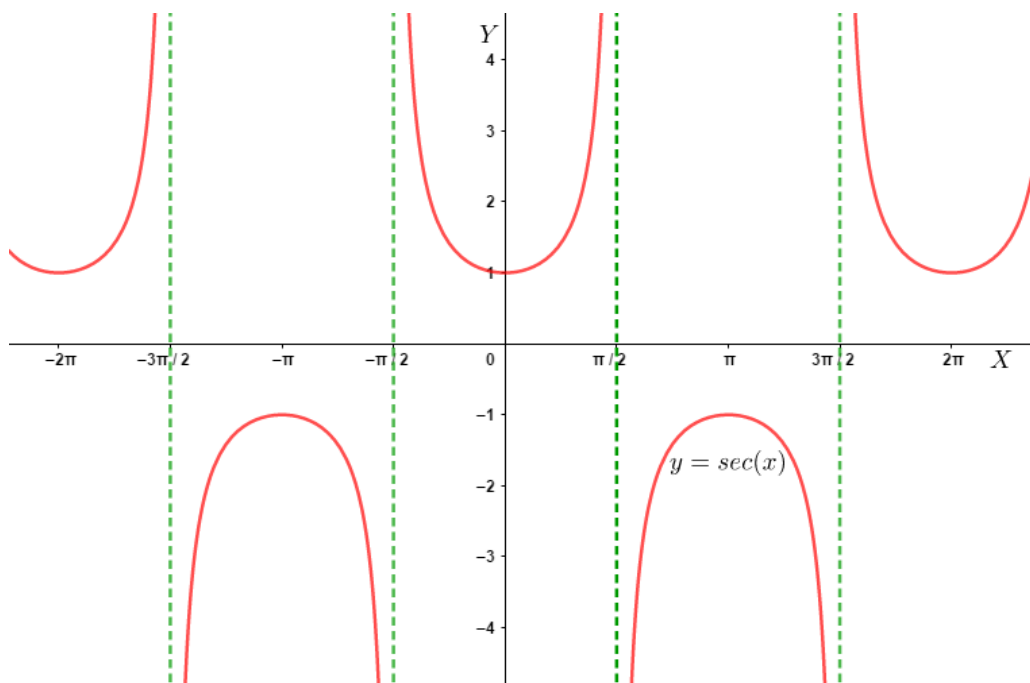
$$\text{Dom}(f) = \mathcal{R} - \{ n\pi, n \in \mathbb{Z} \}, \quad \text{Ran}(f) = \mathcal{R}$$



Función Secante

$$f(x) = \sec(x)$$

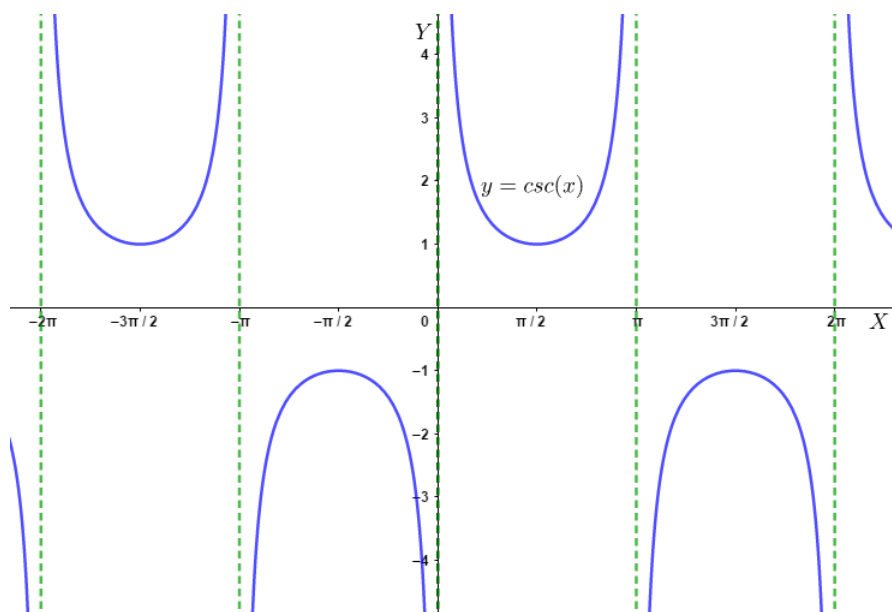
$$\text{Dom}(f) = \mathcal{R} - \left\{n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \text{Ran}(f) = \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$



Función Cosecante

$$f(x) = \csc(x)$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}, \quad \text{Ran}(f) = \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$



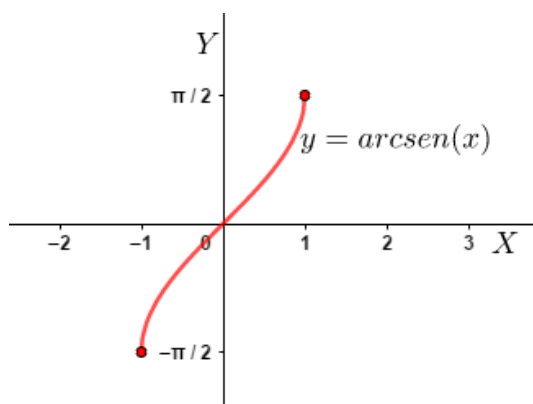
3.5.4 Funciones Trigonómicas Inversas

Las funciones trigonométricas son periódicas, por ende, no son inyectivas; pero restringiendo el dominio adecuadamente, se consigue que sean inyectivas en ese dominio restringido. Luego admitirá la inversa en ese dominio restringido.

Función Seno Inverso (arco seno)

$$y = \arcsen(x) \Leftrightarrow x = \sen(y)$$

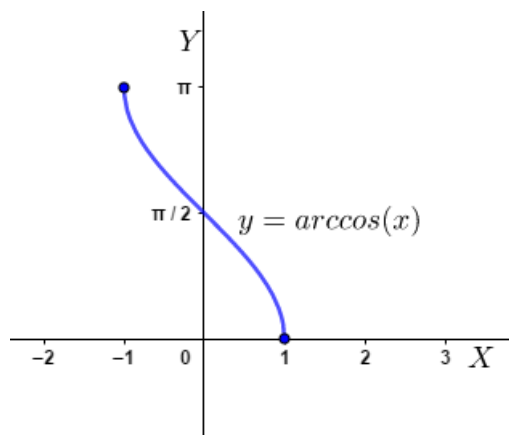
$$\text{Dom}(f) = [-1, 1], \quad \text{Ran}(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Función Coseno Inverso (arco coseno)

$$y = \arccos(x) \Leftrightarrow x = \cos(y)$$

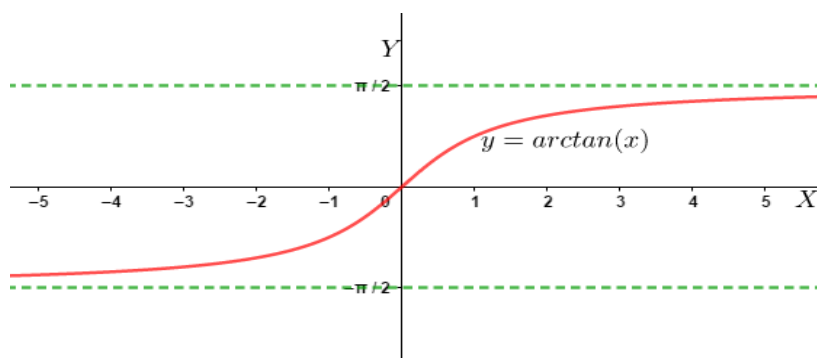
$$\text{Dom}(f) = [-1, 1], \quad \text{Ran}(f) = [0, \pi]$$



Función Tangente Inversa (arco tangente)

$$y = \arctan(x) \Leftrightarrow x = \tan(y)$$

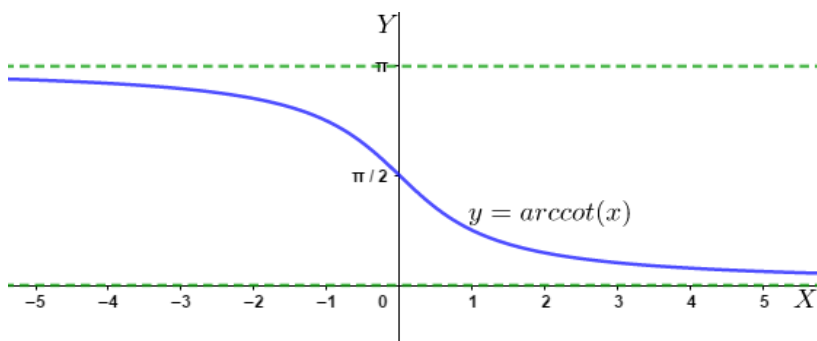
$$\text{Dom}(f) = \mathcal{R}, \quad \text{Ran}(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$



Función Cotangente Inversa (arco cotangente)

$$y = \text{arccot}(x) \Leftrightarrow x = \cot(y)$$

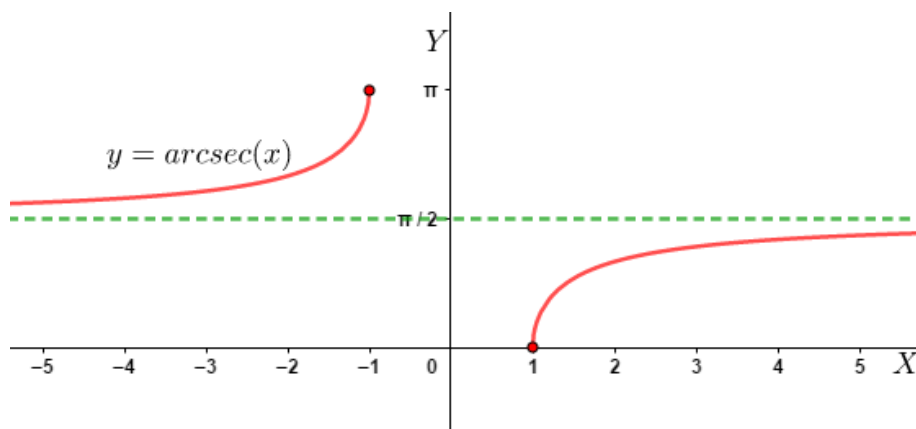
$$\text{Dom}(f) = \mathcal{R}, \quad \text{Ran}(f) = \langle 0, \pi \rangle$$



Función Secante Inversa (arco secante)

$$y = \operatorname{arcsec}(x) \Leftrightarrow x = \sec(y)$$

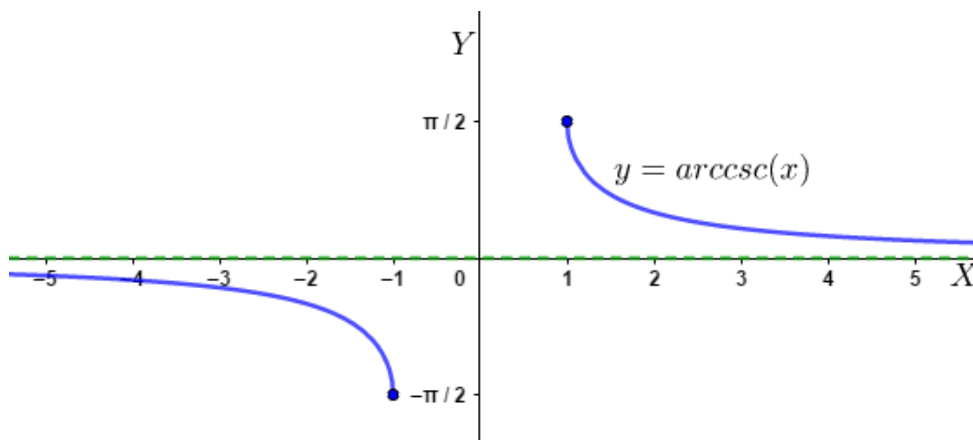
$$\operatorname{Dom}(f) = \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty), \quad \operatorname{Ran}(f) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$



Función Cosecante Inversa (arco cosecante)

$$y = \operatorname{arccsc}(x) \Leftrightarrow x = \csc(y)$$

$$\operatorname{Dom}(f) = \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty), \quad \operatorname{Ran}(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

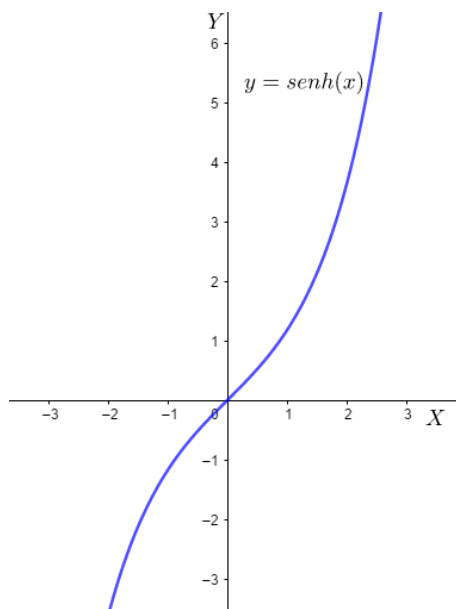


3.5.5 Funciones Hiperbólicas

Función Seno Hiperbólico

$$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{Dom}(f) = \mathcal{R}, \text{Ran}(f) = \mathcal{R}$$



Función Coseno Hiperbólico

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{Dom}(f) = \mathcal{R}, \text{Ran}(f) = [1, +\infty)$$

