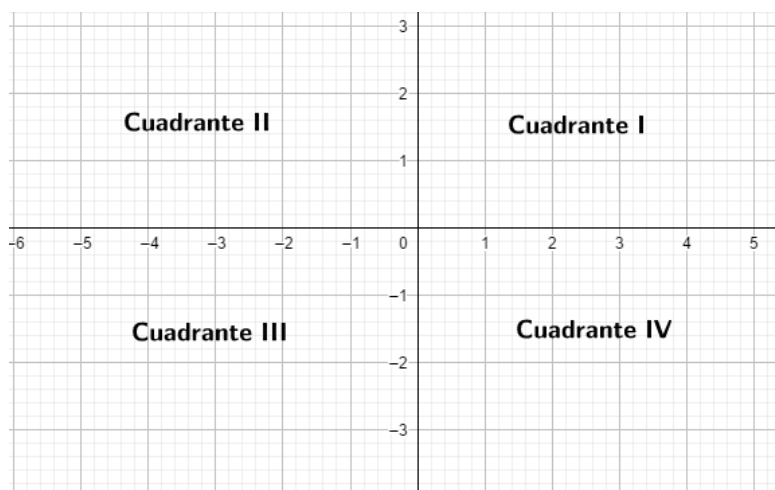


CAPÍTULO II: GEOMETRÍA ANALÍTICA

2.1 Sistema de Coordenadas Rectangulares

El sistema de coordenadas rectangulares divide al plano en cuatro cuadrantes por medio de dos rectas perpendiculares que se cortan en el punto 0. La recta horizontal se denomina eje X , la recta vertical eje Y , ambas constituyen los ejes de coordenadas. El punto 0, se llama origen del sistema. La distancia de un punto al eje Y se llama abscisa. La distancia de un punto al eje X es la ordenada y ambas constituyen las coordenadas de dicho punto y se representa por el símbolo (x, y) .



Par ordenado

Cada punto de un plano se asocia con una pareja de números llamados coordenadas, denotado por (a, b) que es un par ordenado si y solo si tiene la propiedad de que el elemento "a" puede ser distinguido como el primero (abscisa) y "b" como el segundo elemento (ordenada) del par.

Pares ordenados iguales

Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales, si y solo si $a = c$ y $b = d$

Es decir: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

El producto cartesiano $R \times R$

Si R es el conjunto de los números reales, el producto cartesiano $R \times R$ es el conjunto de las pares ordenados (x, y) tales que $x \in R \wedge y \in R$, esto es:

$$R \times R = R^2 = \{(x, y) / x \in R \wedge y \in R\}$$

Suma de pares ordenados

Dado dos pares ordenados (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de R^2 , la suma de (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es el par ordenado $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$; esto es:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

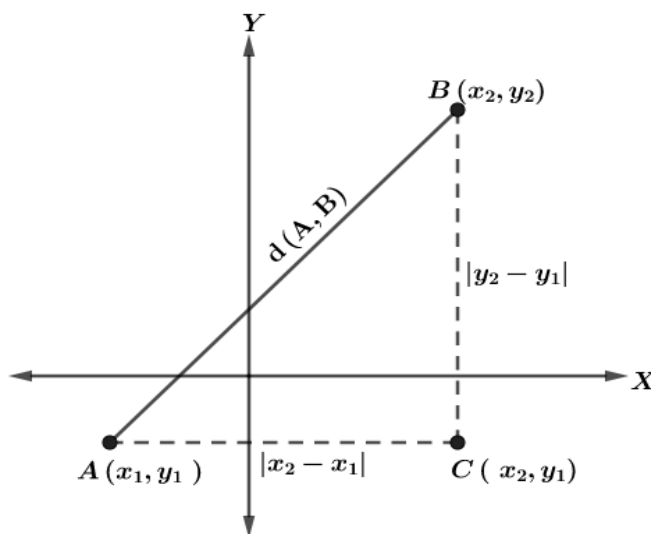
Producto de un número real por un par ordenada.

Dado el par ordenada (x, y) de R^2 y un número real r , el producto del número real r por el par ordenado (x, y) , es el par ordenado (rx, ry) ; esto es:

$$r(x, y) = (rx, ry)$$

Distancia entre dos puntos

La distancia entre el punto $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en el plano cartesiano, la podemos expresar como: $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



Como podemos observar en la gráfica, se tiene un triángulo rectángulo recto en C , por lo que podemos aplicar el teorema de Pitágoras:

$$d^2(A, B) = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

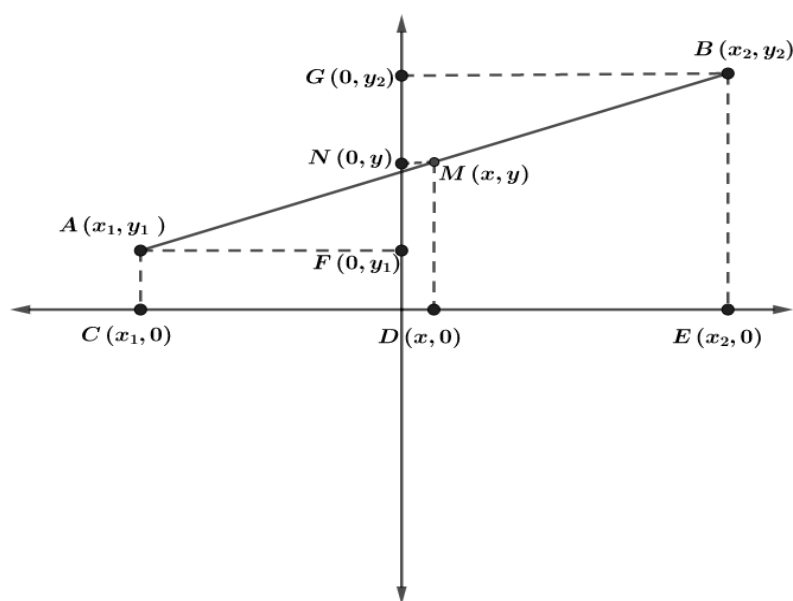
$$d^2(A, B) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\text{Por lo que se concluye que: } d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Punto medio

El punto medio del segmento entre $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, es:

$$M(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



En el gráfico, si trazamos una recta paralela al eje Y que pasa por el punto medio M del segmento AB , entonces la recta biseca al segmento CE en el punto D , es decir D es punto medio del segmento CE .

Entonces se cumple $CD = DE$

$$|x - x_1| = |x_2 - x|$$

$$x - x_1 = x_2 - x$$

$$2x = x_1 + x_2$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

De la misma forma, si trazamos una recta paralela al eje X que pasa por el punto medio M del segmento FG , entonces la recta biseca al segmento FG en el punto N , es decir N es punto medio del segmento FG .

Se cumple entonces que $FN = NG$

$$|y - y_1| = |y_2 - y|$$

$$y - y_1 = y_2 - y$$

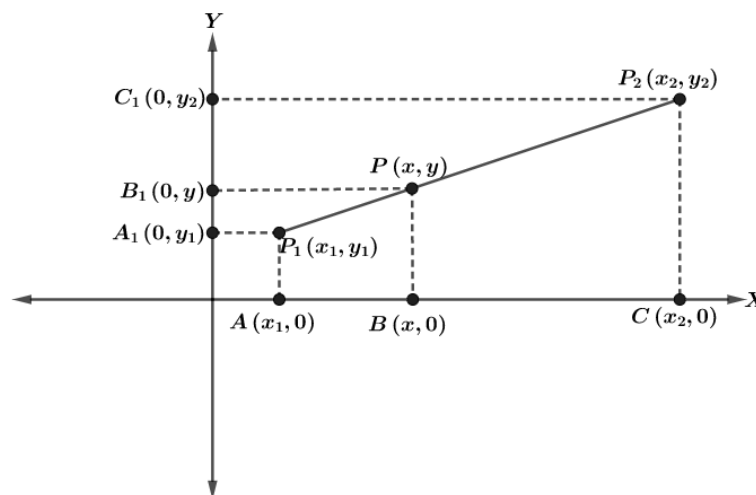
$$2y = y_1 + y_2$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Así tenemos que: $M(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

También lo podemos expresar como: $M = \frac{1}{2}(A + B)$

División de un segmento en una razón dada



En el gráfico si queremos obtener las coordenadas del punto P que divide al segmento P_1P_2 en una razón dada, sabemos por el teorema de Tales que las paralelas P_1A , PB y P_2C

P_2 Cortan segmentos proporcionales sobre las dos transversales P_1P_2 y AC , luego entonces tenemos que:

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

Calcularemos la longitud de los segmentos, tales como:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x - x_1)^2 + (0 - 0)^2} = |x - x_1|$$

$$\overline{AB} = x - x_1$$

De igual forma obtenemos: $\overline{BC} = x_2 - x$

Luego tenemos que: $r = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

$$r(x_2 - x) = x - x_1$$

$$rx_2 - rx = x - x_1$$

$$x + rx = rx_2 + x_1$$

$$x(1 + r) = x_1 + rx_2$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, r \neq -1$$

Por otro lado, en el gráfico por el teorema de Tales las paralelas P_1A_1 , PB_1 y P_2C_1 cortan segmentos proporcionales sobre las dos transversales P_1P_2 y A_1C_1 , luego entonces tenemos que:

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1C_1}}$$

Calculamos la longitud de los segmentos, tales como:

$$\overline{A_1B_1} = y - y_1$$

$$\overline{B_1C_1} = y_2 - y_1$$

Luego tenemos que: $r = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

$$r = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$r(y_2 - y_1) = y - y_1$$

$$ry_2 - ry_1 = y - y_1$$

$$y + ry_1 = ry_2 + y_1$$

$$y(1 + r) = y_1 + ry_2$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}, r \neq -1$$

Se puede concluir entonces que, si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son los extremos del segmento P_1P_2 , las coordenadas del punto $P(x, y)$ que divide a este segmento en la razón $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ son:

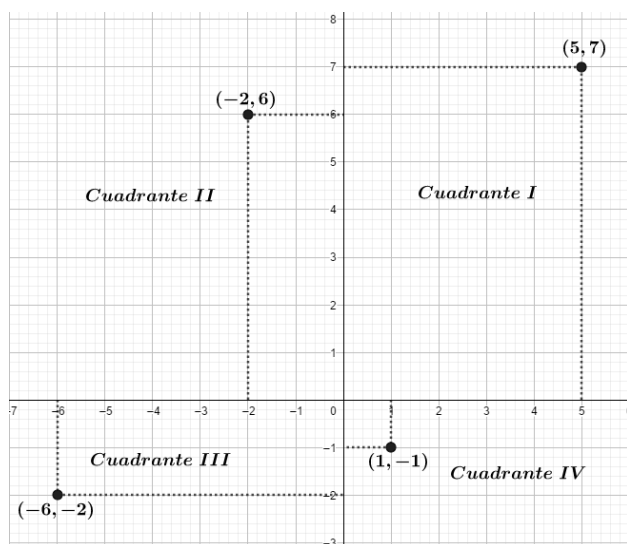
$$P(x, y) = \left(\frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \right), r \neq -1$$

Cuando $r < 0$, el punto de división está fuera del segmento P_1P_2 y si $r > 0$, $P(x, y)$ está dentro del segmento P_1P_2

Ejemplos.

1. Ubicar los puntos en un sistema de coordenadas rectangulares, indique el cuadrante al que pertenece cada punto
 $(-2, 6)$; $(1, -1)$; $(5, 7)$; $(-6, -2)$

Resolución



2. Se tienen los conjuntos: $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{5, 7\}$, calcular $A \times B$

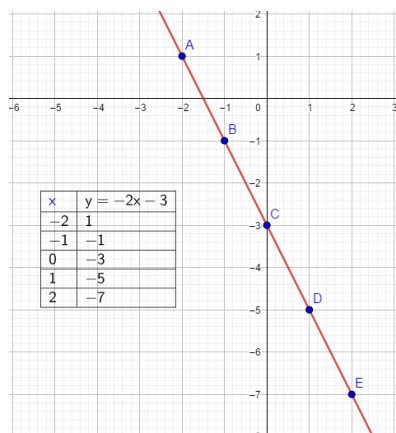
Resolución

$$A \times B = \{(1, 5), (1, 7), (2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7)\}$$

3. Obtener la gráfica de: $y = -3 - 2x$

Resolución

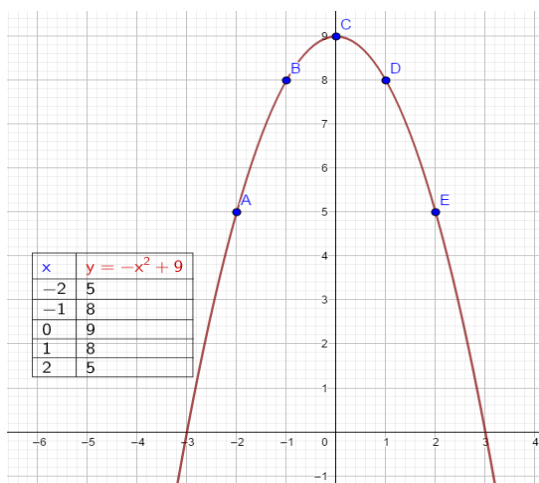
Asignando valores a x , obtenemos algunos puntos coordenados que graficamos, uniéndolos con una recta todos los puntos obtenidos.



4. Obtener la gráfica de: $y = 9 - x^2$

Resolución

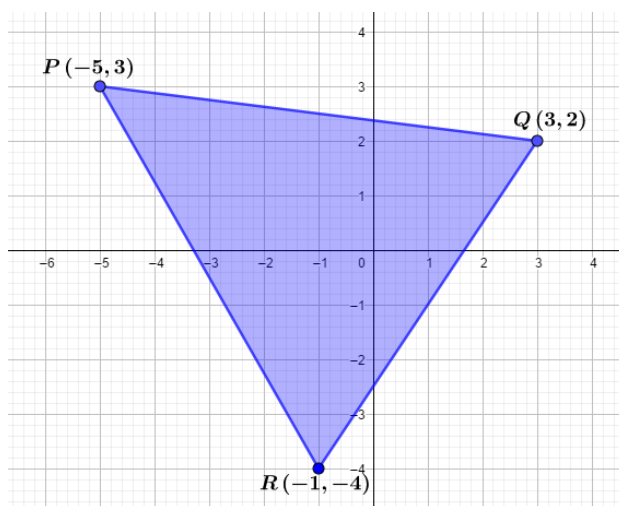
Asignando valores a x , obtenemos algunos puntos coordenados que graficamos, uniendo con una parábola todos los puntos obtenidos.



5. Demuestra que los puntos $P(-5, 3)$, $Q(3, 2)$ y $R(-1, -4)$ son los vértices de un triángulo isósceles, encontrar su perímetro y área.

Resolución

Graficamos los puntos en el plano



- a) Para demostrar que el triángulo es isósceles, tenemos que verificar que la longitud de dos lados del triángulo es igual.

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(-5 - 3)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{65}$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{65}$$

$$|\overline{PR}| = \sqrt{(-5 - (-1))^2 + (3 - (-4))^2} = \sqrt{65}$$

$$|\overline{PR}| = \sqrt{65}$$

$$|\overline{RQ}| = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (-4 - 2)^2} = \sqrt{52}$$

$$|\overline{RQ}| = \sqrt{52}$$

Como $|\overline{PQ}|$ y $|\overline{PR}|$ son de igual longitud, entonces el triángulo formado por los puntos P, Q y R es isósceles.

- b) Para encontrar el perímetro del triángulo formado por los puntos P, Q y R , solamente sumamos las longitudes de los lados del triángulo.

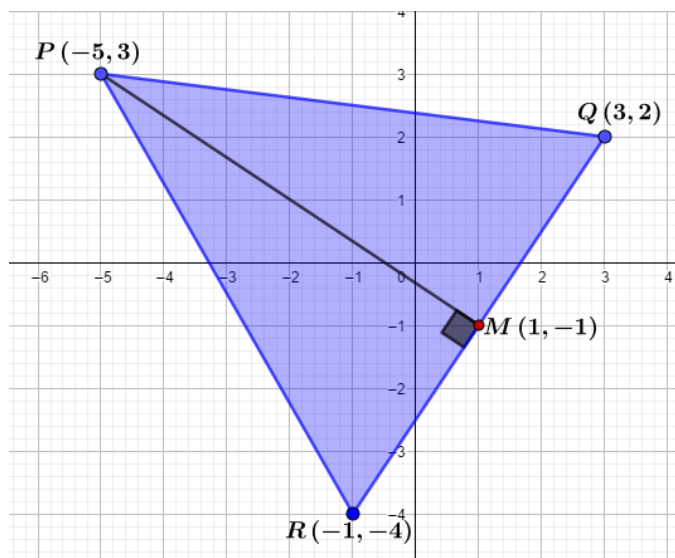
$$\text{Perímetro} = |\overline{PQ}| + |\overline{PR}| + |\overline{RQ}|$$

$$\text{Perímetro} = \sqrt{65} + \sqrt{65} + \sqrt{52} = 2\sqrt{65} + 2\sqrt{13}$$

$$\text{Perímetro} = 2\sqrt{5}\sqrt{13} + 2\sqrt{13} = 2\sqrt{13}(\sqrt{5} + 1)$$

$$\text{Perímetro} = 2\sqrt{13}(\sqrt{5} + 1)$$

- c) Para encontrar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R , necesitamos encontrar la altura desde el vértice P al punto medio de la base RQ , ya que es un triángulo isósceles.



Para determinar el punto medio del segmento $\overline{RQ}$, usamos el hecho de que

$$M = \frac{1}{2}(R + Q)$$

$$M = \frac{1}{2}((-1, -4) + (3, 2))$$

$$M = \frac{1}{2}(2, -2) = (1, -1)$$

$$M = (1, -1)$$

Para determinar la altura $|PM|$, encontraremos la distancia del punto P al punto M

$$|\overline{PM}| = \sqrt{(-5 - 1)^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{52}$$

$$|\overline{PM}| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$|\overline{PM}| = 2\sqrt{13}$$

Finalmente encontramos el área del triángulo formado por los puntos P , Q y R , usando el hecho

$$Area(\triangle) = \frac{(base)(altura)}{2}$$

En nuestro caso

$$Area(\triangle) = \frac{|\overline{RQ}||\overline{PM}|}{2}$$

$$Area(\Delta) = \frac{(\sqrt{52})(2\sqrt{13})}{2}$$

$$Area(\Delta) = \frac{(2\sqrt{13})(2\sqrt{13})}{2} = 2(13)$$

$$Area(\Delta) = 26 u^2$$

Observación

Otra forma de calcular el área de un triángulo es mediante, un medio del determinante que se forma con las coordenadas de los vértices ordenándolos en sentido contrario al de las manecillas de un reloj (sentido antihorario).

$$Area(\Delta) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

En nuestro caso el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R , sería:

Del grafico del triángulo, si empezamos de P , seguiría R , luego Q , ya que estamos yendo en sentido antihorario.

$$Area(\Delta) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -5 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Area(\Delta) = \frac{1}{2} (20 + 9 - 2 + 12 + 10 + 3)$$

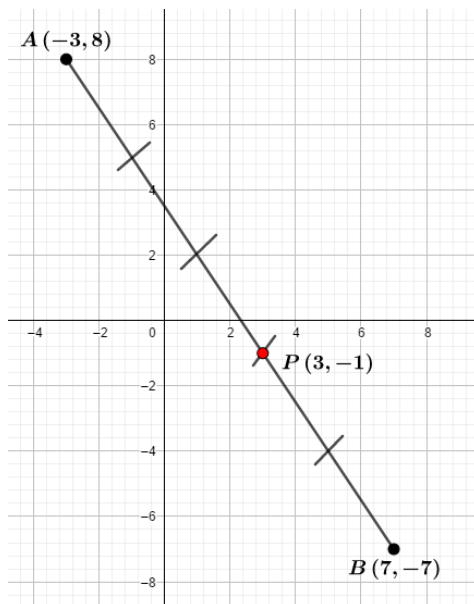
$$Area(\Delta) = \frac{1}{2} (52)$$

$$Area(\Delta) = 26 u^2$$

6. Dados los puntos $(-3,8)$, $(7,-7)$ y la razón 3:2 en que hay que dividir el segmento. Hallar el punto de división, representar en una gráfica.

Resolución

Sea $A(-3,8)$ el punto inicial y $B(7,-7)$ el punto final del segmento $\overline{AB}$ según nos indica los datos tenemos, que por el valor de la razón sabemos que, si dividimos al segmento dado en cinco segmentos iguales, el punto $P(x,y)$ está situado a tres segmentos del inicio del segmento y dos del final del segmento dado.



$$\begin{aligned}\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} &= \frac{3}{2} \\ \frac{P - A}{B - P} &= \frac{3}{2} \\ 2(P - A) &= 3(B - P) \\ 2P - 2A &= 3B - 3P \\ 2P + 3P &= 3B + 2A \\ 5P &= 3(7, -7) + 2(-3, 8) \\ 5P &= (21, -21) + (-6, 16) \\ 5P &= (15, -5) \\ P &= \frac{1}{5}(15, -5) \\ P &= (3, -1)\end{aligned}$$

Observación

También podemos aplicar la formula directamente para calcular las coordenadas del punto de división:

$$P(x, y) = \left(\frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \right), r \neq -1$$

Tenemos $A(x_1, y_1) = (-3, 8)$, $B(x_2, y_2) = (7, -7)$, $r = \frac{3}{2}$

$$P(x, y) = \left(\frac{-3 + \frac{3}{2}(7)}{1 + \frac{3}{2}}, \frac{8 + \frac{3}{2}(-7)}{1 + \frac{3}{2}} \right)$$

$$P(x, y) = \left(\frac{\frac{-6 + 21}{2}}{\frac{2 + 3}{2}}, \frac{\frac{16 - 21}{2}}{\frac{2 + 3}{2}} \right)$$

$$P(x, y) = \left(\frac{\frac{15}{2}}{\frac{5}{2}}, \frac{\frac{-5}{2}}{\frac{5}{2}} \right)$$

$$P(x, y) = \left(\frac{15}{5}, \frac{-5}{5} \right)$$

$$P(x, y) = (3, -1)$$

Ejercicios

- Ubicar los puntos en el sistema de coordenadas rectangulares, indique el cuadrante al que pertenece cada punto.
 - $(1, -8), (-2, 0), (0, -11), (-2, 9)$
 - $(-1, 0), (2, -2), (0, 9), \left(\frac{1}{2}, -4\right)$
- Obtener la gráfica de:
 - $y = 2 - 3x$
 - $y = x^2 + 2$
 - $y = \frac{1}{2}(x - 1)$
- Obtener las coordenadas del punto que divide al segmento que une cada pareja de puntos en la razón indicada en cada caso.
 - $P_1(0, -5), P_2(1, 6)$ y $r = 3$
 - $P_1(2, -3), P_2(7, 8)$ y $r = \frac{3}{5}$

c) $P_1\left(\frac{3}{2}, -3\right), P_2\left(\frac{7}{3}, 8\right)$ y $r = \frac{2}{3}$

d) $P_1(-6, 5), P_2(3, 11)$ y $r = -\frac{3}{5}$

4. Un automóvil que avanza en línea recta se encuentra a 350 km del punto de partida y a 250 km de su punto de llegada. ¿Cuáles son las coordenadas del sitio en donde se encuentra, si las coordenadas del punto de partida son $P_1(3, 4)$ y $P_2(14, -2)$ las del punto de llegada?
5. Calcular la longitud de las tres medianas del triángulo formado por los vértices $A(-5, 2), B(4, 8)$ y $C(-1, -6)$
6. $M(3, 5)$ es el punto medio del segmento que une los puntos $A(x, 9)$ y $B(8, y)$. Calcular los valores de x y y
7. Calcular el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos $A(-3, 1), B(0, 7), C(-8, -3)$ y $D(-5, 4)$.
8. Calcular el área de las siguientes figuras.
- a) Triángulo cuyos vértices son los puntos $A(-3, 5), B(0, -4)$ y $C(2, 7)$.
- b) Cuadrilátero cuyos vértices son los puntos
 $P(0, 5), Q(-2, -1), R(3, 1)$, y $S(5, 7)$
- c) Triángulo cuyos vértices son los puntos $A(5, 1), B(-3, 4)$ y $C(-1, -2)$.
- d) Cuadrilátero cuyos vértices son los puntos
 $P(-3, 7), Q(6, 5), R(2, 12)$, y $S(-2, 0)$
9. Demostrar que los puntos $(-2, 8), (1, -1), (3, -7)$ están en una recta, probando que el triángulo cuyos vértices son estos puntos, es cero.
10. Hallar la razón en la cual el punto $(2, 3)$ divide al segmento que une $(3, 8)$ con $(-1, -12)$.

2.2 Lugares Geométricos

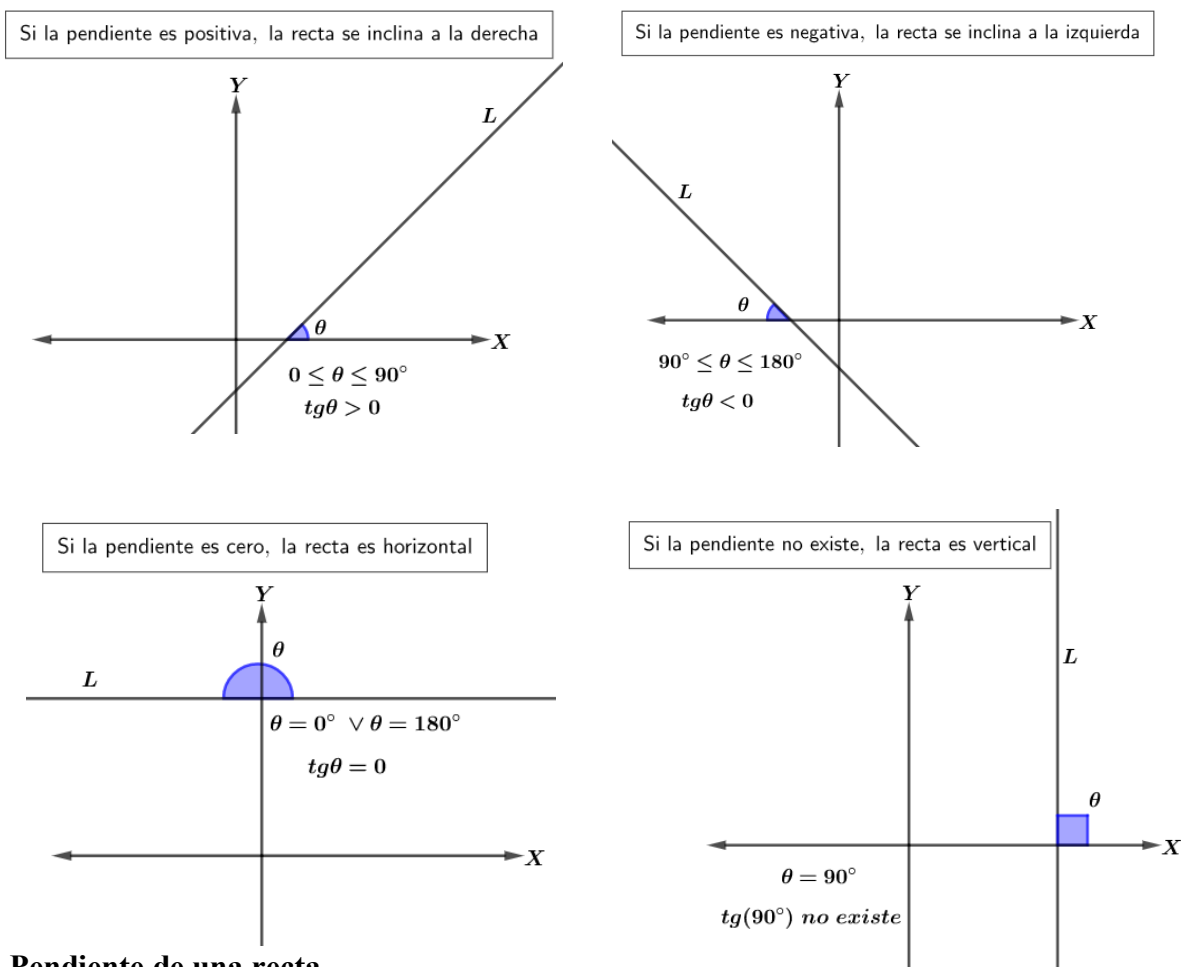
2.2.1 La Recta

Ángulo de inclinación de la recta

Sea L una recta en el plano R^2 , se llama ángulo de inclinación de la recta L , el ángulo formado con la parte positiva del EJE X , y la recta L , en sentido antihorario.

Si θ es el ángulo de inclinación de la recta L , su variación es

$$0 \leq \theta \leq 180^\circ$$



Pendiente de una recta

La pendiente de una recta L , es la tangente de su ángulo de Inclinación θ , esto es:

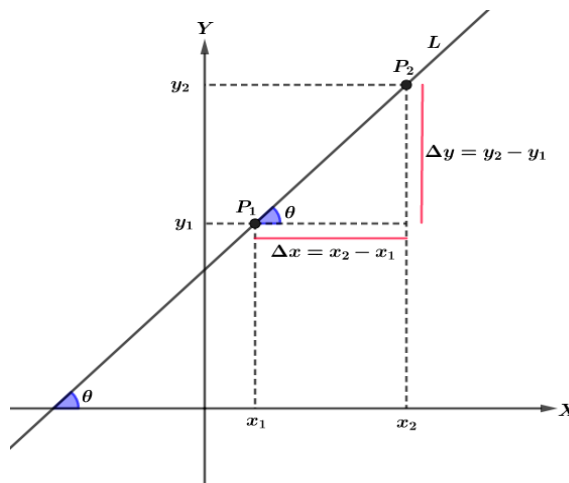
$$m = tg\theta, \quad \theta \neq 90^\circ$$

$$m = \text{pendiente de } L$$

Teorema 1

Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera de una recta L no vertical, entonces la pendiente de la recta L es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_2 \neq x_1$$



Como podemos ver en el grafico

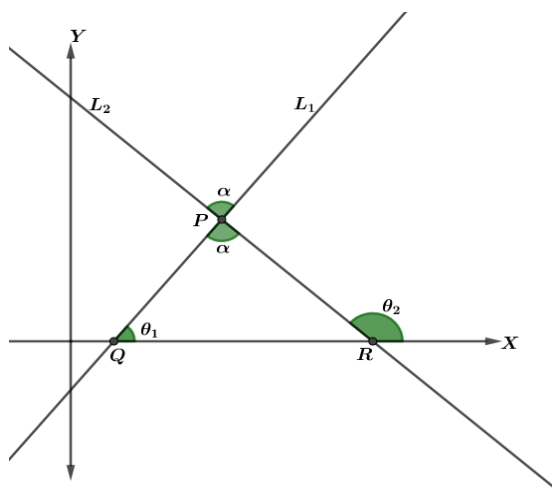
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Pero $m = \operatorname{tg} \theta$

Por tanto

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_2 \neq x_1$$

Ángulo entre dos rectas



En el gráfico tenemos las rectas L_1 y L_2 que se interceptan en el punto P , θ_1 es el ángulo de inclinación de la recta L_1 y θ_2 es el ángulo de inclinación de la recta L_2 ; α

es el ángulo entre las rectas L_1 y L_2 , que se mueve en sentido antihorario desde la recta L_1 hasta L_2 .

L_1 es la recta inicial y L_2 es la recta final, por otro lado, podemos observar en el grafico:

La pendiente de la recta inicial L_1 es $m_1 = tg\theta_1$

La pendiente de la recta final L_2 es $m_2 = tg\theta_2$

Teorema 2

Si α es el ángulo entre las rectas L_1 y L_2 , entonces

$$tg\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}; m_1 m_2 \neq -1$$

donde m_1 , es la pendiente la recta inicial L_1 y m_2 la pendiente de la recta final L_2 , correspondiente al ángulo α .

Prueba

Del gráfico en el triángulo PQR , se tiene al ángulo exterior θ_2 relativo al vértice R , además θ_1 y α ángulos interiores del triángulo PQR no adyacente de θ_2 .

Sabemos que un ángulo exterior de un triángulo, es la suma de dos ángulos interiores del triángulo, no adyacente al ángulo exterior.

Luego tenemos que,

$$\theta_2 = \theta_1 + \alpha$$

Despejando α , tenemos: $\alpha = \theta_2 - \theta_1$

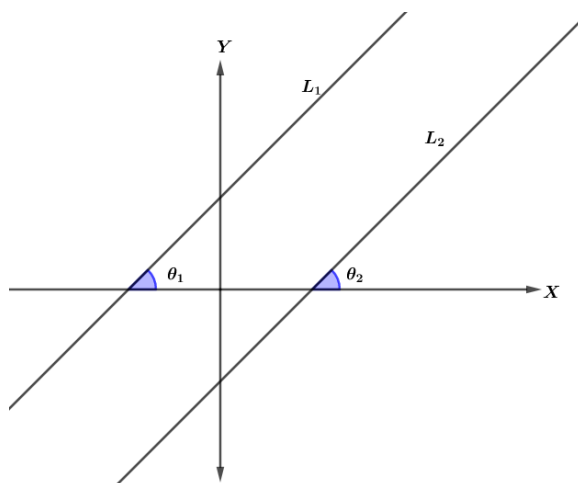
Aplicando la tangente: $tg\alpha = tg(\theta_2 - \theta_1)$

$$tg\alpha = \frac{tg\theta_2 - tg\theta_1}{1 + tg\theta_1 tg\theta_2}$$

Pero sabemos que $m_1 = tg\theta_1$, $m_2 = tg\theta_2$ luego se tiene:

$$tg\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}; m_1 m_2 \neq -1$$

Rectas Paralelas



Dos rectas son paralelas si tienen el mismo ángulo de inclinación, en el gráfico $L_1 // L_2$ (L_1 es paralelo a L_2), entonces $\theta_1 = \theta_2$

Luego aplicando tangente tenemos $tg\theta_1 = tg\theta_2$

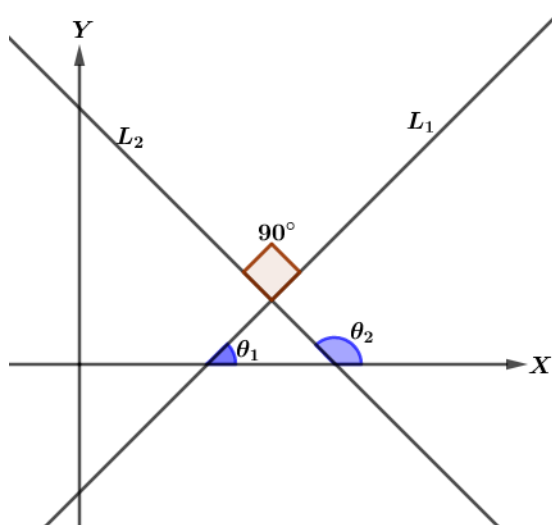
Pero sabemos que $m_1 = tg\theta_1$, $m_2 = tg\theta_2$ luego se tiene:

$$m_1 = m_2$$

En conclusión, tenemos:

$$L_1 // L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

Rectas perpendiculares



Dos rectas son perpendiculares si el ángulo formado entre ellas es de 90° , pero $tg 90^\circ = \infty$ es decir no existe, por lo que conviene utilizar $ctg 90^\circ = 0$. Luego por teorema 2, se tiene que:

$$ctg 90^\circ = \frac{1 + tg \theta_1 tg \theta_2}{tg \theta_2 - tg \theta_1}$$

$$0 = \frac{1 + tg \theta_1 tg \theta_2}{tg \theta_2 - tg \theta_1}$$

$$1 + tg \theta_1 tg \theta_2 = 0$$

$$tg \theta_1 tg \theta_2 = -1$$

Pero sabemos que $m_1 = tg \theta_1$, $m_2 = tg \theta_2$ luego se tiene:

$$m_1 m_2 = -1$$

En conclusión, si L_1 es perpendicular a L_2 si y solo si el producto de sus pendientes es igual a -1.

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$$

Ejemplos

1. Determinar la pendiente y la inclinación de la recta que pasa por los puntos $A(0,7)$ y $B(-1,9)$

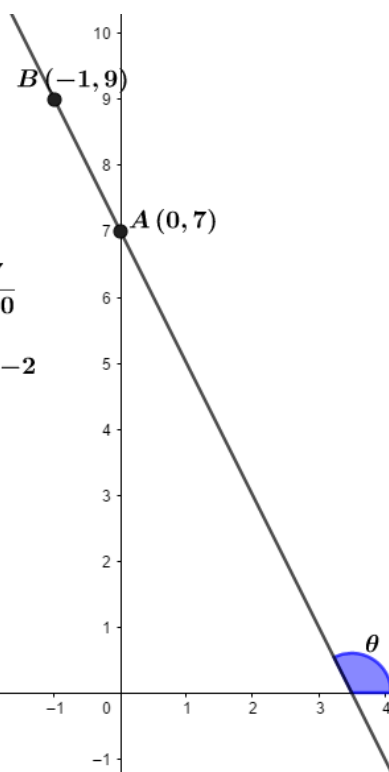
Resolución

$$m = \frac{9 - 7}{-1 - 0}$$

$$m = \frac{2}{-1} = -2$$

$$m = -2$$

La pendiente es m utilizamos el hecho que $m =$ inclinación θ ,



$$\operatorname{tg} \theta = -2$$

$$\theta = \operatorname{arctg}(-2)$$

2. Graficar la recta que pasa por el punto $A(2,3)$ y tiene pendiente $m = \frac{3}{5}$

Resolución

Sabemos que la pendiente de una recta es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_2 \neq x_1, \text{ en nuestro caso } m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{5}$$

De donde $\Delta y = 3 \wedge \Delta x = 5$, ahora sea

$A(2,3) = P_1(x_1, y_1)$ ahora encontraremos $P_2(x_2, y_2)$

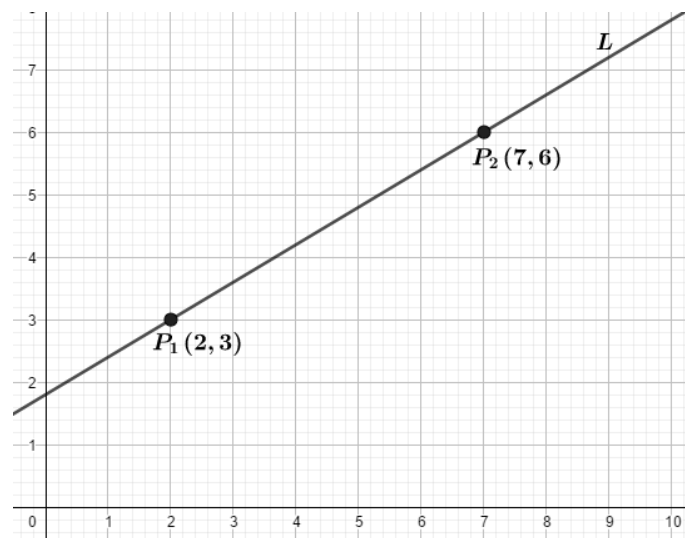
$$\Delta y = y_2 - y_1 \wedge \Delta x = x_2 - x_1$$

$$3 = y_2 - 3 \wedge 5 = x_2 - 2$$

$$y_2 = 6 \wedge x_2 = 7$$

Luego $P_2(x_2, y_2) = (7,6)$

Como ya tenemos dos puntos de la recta es suficiente para trazar la gráfica de la recta.



3. Una motocicleta tiene 25 meses de uso y su valor de venta es de \$18 700, sin embargo, siete meses antes su valor era de \$22 620. Si el valor de la motocicleta varía linealmente con el tiempo:
- ¿Cuál es la variación mensual del precio de venta de la motocicleta?
 - ¿Cuál será el valor de venta a los 38 meses de uso?

Resolución

- a) Como la pregunta se refiere a la variación, entonces se refiere a la pendiente, para ello identificaremos que puntos nos da como datos:

N° de mes	18	25
Valor de venta \$	22 620	18 700

Luego tenemos dos puntos $P_1(18, 22\,620) \wedge P_2(25, 18\,700)$

Por tanto, la variación es

$$m = \frac{18\,700 - 22\,620}{25 - 18} = -\frac{3920}{7}$$

$$m = -560 \frac{\$}{\text{mes}}$$

- b) Si partimos del mes 25, que su valor de venta es \$18 700, y la variación por mes es $-560 \frac{\$}{\text{mes}}$, luego tenemos:

Valor de venta, mes 38 = valor de venta, mes 25 – depreciación

$$\text{Valor de venta, mes 38} = 18\,700 - 13(560)$$

$$\text{Valor de venta, mes 38} = 18\,700 - 7\,280$$

$$\text{Valor de venta, mes 38} = \$11\,420$$

Ejercicios

- Determina la pendiente y el ángulo de inclinación de las rectas que unen los siguientes pares de puntos.
 - $A(5,2)$ y $B(3,4)$
 - $C(1,4)$ y $D(-5,2)$
 - $E(0,0)$ y $F(-2,-5)$
- Trazar la gráfica de la recta que pase por el punto dado y que tenga la pendiente indicada.
 - $A(-3,0)$, $m = -\frac{4}{3}$
 - $B(-4,2)$, $m = -\frac{2}{5}$

c) $C(4,1)$, $m = -\frac{7}{3}$

3. Una compañía estima que producir 200 artículos tiene un costo de \$3 500, mientras que producir 750 artículos le cuesta \$8 700. Si el costo varía linealmente con la cantidad de artículos producidos:

a) ¿Cuál es la variación del costo por unidad?

b) ¿Cuánto le cuesta a la empresa producir 1 300 artículos?

4. Investiga sobre la presión hidrostática y contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Qué significa presión hidrostática?

b) ¿Qué relación hay entre la presión ejercida por el líquido y la profundidad a la que está un objeto?

c) ¿Cuál es la presión hidrostática en una alberca a una profundidad 2.3 m ?

d) ¿A qué profundidad la presión hidrostática en la alberca es de 13 600 Pa?

5. Utiliza el concepto de pendiente para demostrar que los puntos $(2, -4)$, $(6,1)$ y $(10,6)$ son colineales.

Ecuación punto-pendiente de la recta.

Sea la recta L , que pasa por un punto $P_1(x_1, y_1)$ y tiene una pendiente m cuya trayectoria de un punto cualquiera $P(x, y)$ se mueva de tal manera que la pendiente de P_1P es siempre m .

Por lo que la ecuación de esa trayectoria es

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Forma punto-pendiente

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-5, -3)$, $(4,4)$.

Resolución

Como tenemos dos puntos de la recta, encontraremos la pendiente

$$m = \frac{4 - (-3)}{4 - (-5)} = \frac{7}{9}$$

$$m = \frac{7}{9}$$

Sea $P_1(-5, -3)$, y por la ecuación punto-pendiente, obtenemos la ecuación de la recta solicitada

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-3) = \frac{7}{9}(x - (-5))$$

$$y + 3 = \frac{7}{9}(x + 5)$$

O también

$$9y + 27 = 7x + 35$$

$$7x - 9y + 8 = 0$$

2. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $(-3, -2)$ y $m = -\frac{3}{4}$

Resolución

Aplicamos la forma punto-pendiente, donde $P_1(-3, -2)$ y $m = -\frac{3}{4}$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-2) = -\frac{3}{4}(x - (-3))$$

Así tenemos la ecuación punto pendiente

$$y + 2 = -\frac{3}{4}(x + 3)$$

O también lo podemos desarrollar

$$4y + 8 = -3x - 9$$

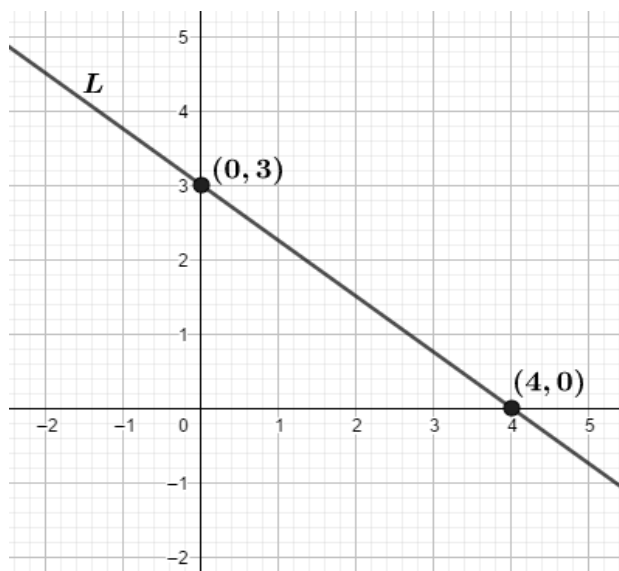
$$3x + 4y + 17 = 0$$

3. Traza la gráfica de la siguiente recta, $3x + 4y = 12$

Resolución

Para trazar la gráfica de la recta, es suficiente dos puntos, para ello damos valores:

Si $x = 0 \Rightarrow 4y = 12$	Si $y = 0 \Rightarrow 3x = 12$
$\Rightarrow y = 3$	$\Rightarrow x = 4$
Luego tenemos el punto $(0,3)$	Luego tenemos el punto $(4,0)$



4. Un equipo de sonido tiene un valor venta de S/32 400 a los ocho años de uso y de S/19 200 después de 11 años.
- Determinar el modelo que expresa la relación de su valor con el tiempo de uso.
 - Hallar el valor del equipo de sonido a los cuatro años de uso.
 - ¿A los cuantos años se deprecia totalmente el equipo?

Resolución

- a) Para modelar la relación del valor con el tiempo, identificaremos que puntos nos da como datos:

Nº de año $\rightarrow x$	8	11
Valor de venta S/ $\rightarrow y$	32 400	19 200

Luego tenemos dos puntos $P_1(8, 32\,400) \wedge P_2(11, 19\,200)$

Por tanto, la pendiente es

$$m = \frac{19\,200 - 32\,400}{11 - 8} = -\frac{13\,200}{3}$$

$$m = -4\,400 \frac{\text{S/}}{\text{año}}$$

Aplicamos la forma punto-pendiente, donde

$P_1(8, 32\ 400)$ (también se podría usar P_2) y $m = -4\ 400$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 32\ 400 = -4\ 400(x - 8)$$

$$y - 32\ 400 = -4\ 400x + 35\ 200$$

$$y = -4\ 400x + 67\ 600$$

b) Para $x = 4$ años, tenemos que el valor del equipo es:

$$y = -4\ 400(4) + 67\ 600$$

$$y = S/50\ 000$$

c) El equipo de sonido ya no tendrá valor cuando $y = 0$

$$y = -4\ 400x + 67\ 600$$

$$0 = -4\ 400x + 67\ 600$$

$$4\ 400x = 67\ 600$$

$$x = \frac{67\ 600}{4\ 400}$$

$$x = 15,36 \text{ años}$$

Ejercicios

1. Encontrar la ecuación de la recta que cumpla las condiciones dadas:

a) Pasa por $(-2, 2)$ y $m = -\frac{2}{5}$

b) Pasa por $(-2, 0)$ y $m = -2$

c) Pasa por $(\frac{1}{2}, 3)$ y $(3, -2)$

d) Pasa por $(2, -3)$ y tiene una inclinación de 120°

2. Trazar la gráfica de cada una de las rectas dadas

a) $3y + 5x = 15$

b) $2x + 3y - 10 = 0$

c) $3x + 2y = 0$

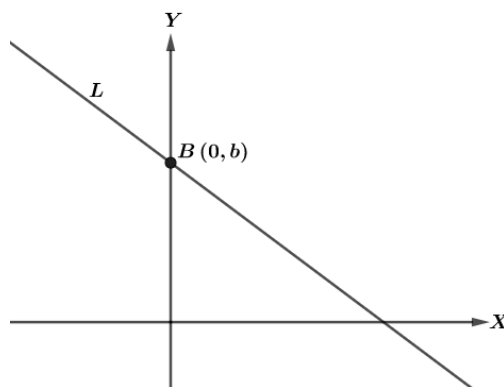
d) $5x - 4y + 24 = 0$

3. El valor de una pantalla de plasma nueva es de $S/4\ 690$. Si se deprecia su valor linealmente 8.5% por año, encontrar:

- a) Una ecuación que ayude a determinar el valor de la pantalla de plasma a los t años de uso.
- b) ¿Cuál será el valor de la pantalla de plasma después de 4 años de uso?
- c) ¿En cuántos años se deprecia completamente la pantalla de plasma?
- 4. Investiga la relación que hay entre las escalas para medir la temperatura Celsius y Fahrenheit y contestar las siguientes preguntas:
 - a) ¿Qué tipo de relación hay entre las dos escalas?
 - b) ¿Qué temperatura indica la escala Fahrenheit cuando la escala Celsius marca 100°C ?
 - c) ¿Qué temperatura marca una escala Celsius cuando un termómetro en escala Fahrenheit marca 170°F ?

Ecuación pendiente-ordenada al origen

Cuando una recta corta al eje Y en el punto $B(0, b)$, se le llama ordenada al origen de la recta. Para obtener la ecuación consideramos la pendiente m y $B(0, b)$.



De la ecuación punto- pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - b = m(x - 0)$$

$$y = mx + b$$

Forma pendiente - ordenada al origen

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen, si tenemos: $(0, 4)$ y $m = -3$

Resolución

Según los datos que tenemos, $b = 4$ y $m = -3$

Utilizando la forma de la ecuación pendiente ordenada al origen.

$$y = mx + b$$

Obtenemos la ecuación de la recta solicitada:

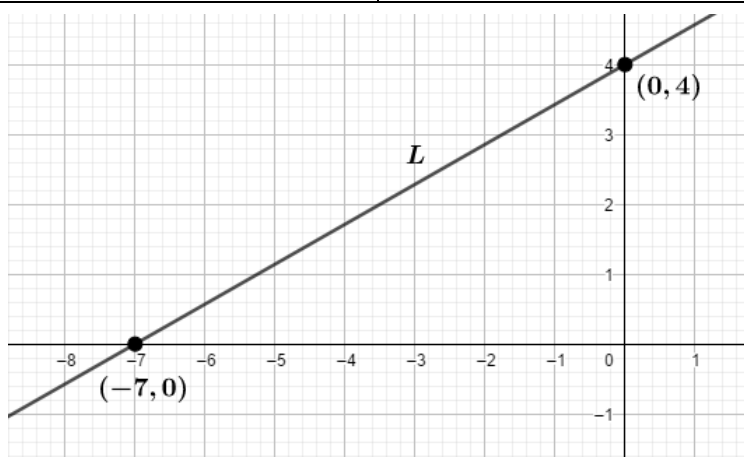
$$y = -3x + 4$$

2. Trazar la gráfica de la recta $4x - 7y + 28 = 0$, mediante sus coordenadas al origen.

Resolución

Para trazar la gráfica de la recta, es suficiente dos puntos, para ello damos valores para $x=0 \wedge y=0$ y despejamos la variable respectiva.

Si $x = 0 \Rightarrow -7y = -28$ $\Rightarrow y = 4$ Luego tenemos el punto $(0,4)$	Si $y = 0 \Rightarrow 4x = -28$ $\Rightarrow x = -7$ Luego tenemos el punto $(-7,0)$
---	--



3. En una empresa presupuesta que dentro de cuatro años el valor de una de sus máquinas será de \$20 100 cuando esa misma máquina dos años antes costaba \$27 600.

Con esta información determinar:

- El modelo matemático que relaciona el valor de la máquina con el tiempo de uso en años en forma pendiente-ordenada al origen.
- ¿Cuál será el valor de la máquina dentro de 10 años a partir de este momento?

Resolución

- a) Para modelar la relación del valor de la máquina con el tiempo de uso, identificaremos que puntos nos da como datos:

Nº de año $\rightarrow x$	Inicio= 0	Hoy=2	6
Valor de venta \$ $\rightarrow y$	27 600		20 100

Luego tenemos dos puntos $P_1(0, 27\ 600) \wedge P_2(6, 20\ 100)$

Por tanto, la pendiente es

$$m = \frac{20\ 100 - 27\ 600}{6 - 0} = -\frac{7\ 500}{6}$$
$$m = -1\ 250 \frac{\$}{\text{año}}$$

Con $b = 27\ 600$ y $m = -1\ 250$ tenemos la ecuación de la recta de forma pendiente-ordenada al origen.

$$y = mx + b$$

$$y = -1\ 250x + 27\ 600$$

- b) Para saber el valor de la máquina dentro de 10 años a partir de este momento, tenemos que dar valor a $x = 12$, entonces

$$y = -1\ 250(12) + 27\ 600$$

$$y = \$12\ 600$$

Ejercicios

- Encontrar la ecuación de cada una de las siguientes rectas en su forma pendiente-ordenada al origen.
 - $(0, -3)$ y $m = -3$
 - $(-3, 0)$ y $(0, 4)$
 - $(0, 1)$ y $m = -\frac{4}{5}$
 - $(-4, 0)$ y $(0, 2)$
- Trazar la gráfica de cada una de las siguientes rectas mediante sus coordenadas al origen.

a) $3x - 2y = 12$

b) $x - 4y = -4$

c) $2x + 5y - 10 = 0$

d) $4y + 12 = 0$

3. Un emprendedor invierte por cada artículo que produce \$4.50 y tiene gastos fijos mensuales de \$5 800. Si sus gastos totales crecen en forma lineal, Encontrar:

a) Un modelo que relacione el total de sus gastos con el número de artículos producidos en un mes.

b) ¿Cuánto invierte por la producción de 650 artículos?

c) ¿Cuántos artículos produce en el mes en que sus gastos ascienden a \$15 600?

4. El costo de conducir un automóvil es directamente proporcional a la distancia recorrida. Supongamos que el dueño de un automóvil gasta en el mes de enero \$1 596 por 1 568km y en el mes de marzo, \$2 394 por 2 352km. Encontrar:

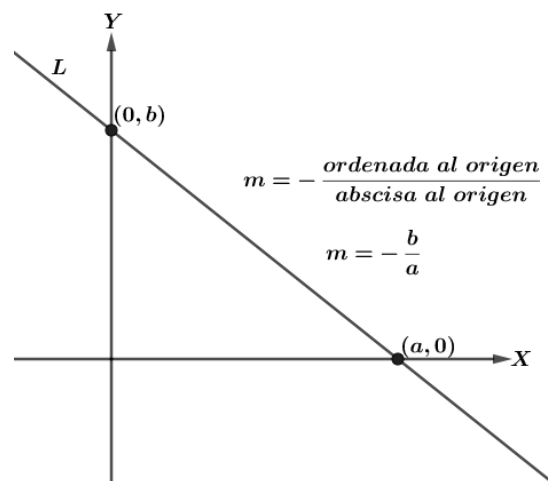
a) Un modelo lineal que relacione el costo en función de la distancia recorrida.

b) El costo por conducir 2 120km.

c) El kilometraje recorrido durante el mes en el que invirtió \$1 710.

Ecuación simétrica de la recta.

La forma simétrica de la recta considera sus intersecciones con los ejes coordenados, ver el grafico:



Ahora partiendo de la ecuación de la recta en la forma pendiente-ordenada al origen:
 $y = mx + b$

Como tenemos que $m = -\frac{b}{a}$, luego entonces:

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

$$ay = -bx + ab$$

$$ay + bx = ab$$

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Forma simétrica

Ecuación general de la recta

La ecuación general de la recta es la expresión algebraica de la forma:

$$Ax + By + C = 0 \text{ donde } A \neq 0 \text{ o } B \neq 0$$

Si partimos de la ecuación general de la recta, y despejamos y , podemos establecer su equivalencia con la forma pendiente-ordenada al origen.

$$Ax + By + C = 0$$

$$By = -Ax - C$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

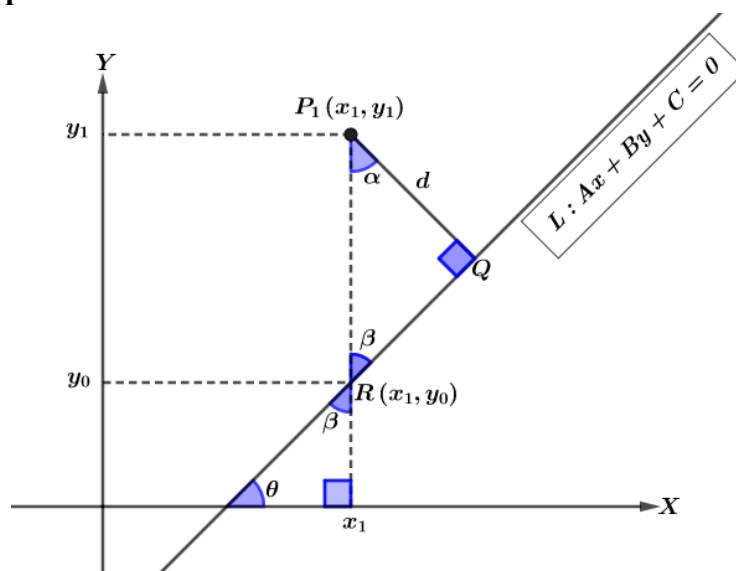
De donde obtenemos que $m = -\frac{A}{B}$ y $b = -\frac{C}{B}$

Observación

En la ecuación general de la recta: $Ax + By + C = 0$

- a) Si $A = 0$, entonces, $By + C = 0$ representa una recta horizontal.
- b) Si $B = 0$, entonces, $Ax + C = 0$ representa una recta vertical.
- c) Si $C = 0$, entonces, $Ax + By = 0$ es una recta que pasa por el origen del plano cartesiano.

Distancia de un punto a la recta



En el gráfico tenemos la recta $L: Ax + By + C = 0$ y $P_1(x_1, y_1)$, donde la distancia del P_1 a la recta L es $d = |\overline{P_1Q}|$

En el triángulo P_1QR recto en Q , tenemos que:

$$d = |\overline{P_1R}| \cos \alpha \quad (*)$$

Pero $|\overline{P_1R}| = |y_1 - y_0| \quad (**)$

Además $R \in L$, entonces tenemos que $Ax_1 + By_0 + C = 0$

Despejando y_0 , obtenemos:

$$y_0 = -\frac{Ax_1 + C}{B}$$

Ahora reemplazamos y_0 en $(**)$

$$|\overline{P_1R}| = \left| y_1 + \frac{Ax_1 + C}{B} \right|$$

$$|\overline{P_1R}| = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{B} \right|$$

$$|\overline{P_1R}| = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{|B|} \quad (***)$$

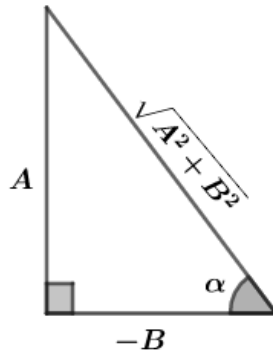
Luego reemplazamos $(***)$ en $(*)$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{|B|} \cos \alpha$$

Por otro lado, sabemos que $tg\theta = -\frac{A}{B}$, que es la pendiente de la recta L .

Del gráfico podemos deducir que $\theta = \alpha$, entonces $tg\alpha = -\frac{A}{B}$

$$tg\alpha = \frac{A}{-B}, A > 0$$



Del triángulo tenemos que, $\cos\alpha = -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Ahora si $B > 0 \Rightarrow \cos\alpha < 0$

Si $B < 0 \Rightarrow \cos\alpha > 0$

Luego podemos deducir que: $\cos\alpha = \frac{|B|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Finalmente tenemos que:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{|B|} \cos\alpha$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{|B|} \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Así, la distancia del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta L , está dada por:

$$d(P_1, L) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la recta en su forma general, si pasa por (2,5) y (5,4)

Resolución

Encontramos la pendiente

$$m = \frac{4-5}{5-2} = -\frac{1}{3}$$

Aplicamos la forma punto-pendiente,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = -\frac{1}{3}(x - 2)$$

$$3y - 15 = -x + 2$$

$$x + 3y - 17 = 0$$

2. Celimar ofrece banquetes a grupos de personas. Si en dos de ellos cobró por sus servicios S/9 170 por 130 comensales y S/5 650 por 75 comensales.
- a) Encontrar un modelo matemático que permita calcular el costo de sus servicios, considerando que el comportamiento del costo es lineal.
- b) ¿Cuánto cobrará por un servicio de banquete para 100 personas?

Resolución

- a) Para modelar la relación del costo de los servicios con el número de los comensales, identificaremos que puntos nos da como datos:

N° de comensal $\rightarrow x$	75	130
Servicios S $\rightarrow y$	5 650	9 170

Luego tenemos dos puntos $P_1(75, 5\,650) \wedge P_2(130, 9\,170)$

Por tanto, la pendiente es

$$m = \frac{9\,170 - 5\,650}{130 - 75} = \frac{3\,520}{55}$$

$$m = 64 \frac{\text{S /}}{\text{comensal}}$$

Aplicamos la forma punto-pendiente,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5\,650 = 64(x - 75)$$

$$y - 5\,650 = 64x - 4\,800$$

$$y = 64x + 850$$

- b) El costo del servicio para $x = 100$ personas será:

Resolución

$$\begin{aligned}y &= 64x + 850 \\y &= 64(100) + 850 \\y &= S/. 7\,250\end{aligned}$$

3. Determinar el punto de intersección de las rectas que pasan por los puntos $A(2, -1)$ y $B(3, 4)$ y la recta que tiene pendiente 2 y pasa por el punto $(1, 1)$

Resolución

Sea la recta L_1 , que pasa por los puntos $A(2, -1)$ y $B(3, 4)$, entonces la $m = \frac{4 - (-1)}{3 - 2} = 5$

$$m = 5$$

Ahora aplicando la forma punto-pendiente,

$$\begin{aligned}y - y_1 &= m(x - x_1) \\y - 4 &= 5(x - 3)\end{aligned}$$

Desarrollando, para llevarlo a la forma general

$$\begin{aligned}y - 4 &= 5x - 15 \\L_1: 5x - y - 11 &= 0\end{aligned}$$

Por otro lado, encontramos L_2 , con $m = 2$ y pasa por el punto $(1, 1)$; aplicando la forma punto-pendiente,

$$\begin{aligned}y - y_1 &= m(x - x_1) \\y - 1 &= 2(x - 1)\end{aligned}$$

Ahora desarrollamos, para llevarlo a la forma general

$$\begin{aligned}y - 1 &= 2x - 2 \\L_2: 2x - y - 1 &= 0\end{aligned}$$

Luego tenemos las rectas:

$$L_1: 5x - y - 11 = 0 \quad \text{y} \quad L_2: 2x - y - 1 = 0$$

Para encontrar el punto de intersección, de las rectas $L_1 \wedge L_2$, resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x - y = 11 & (1) \\ 2x - y = 1 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} & 5x - y = 11 \\ - & 2x - y = 1 \\ \hline & 3x \quad / = 10 \end{array}$$

$$x = \frac{10}{3}$$

Ahora reemplazamos el valor de x encontrado en (2) para encontrar el valor de y ,

$$2\left(\frac{10}{3}\right) - y = 1$$

$$y = \frac{20}{3} - 1$$

$$y = \frac{17}{3}$$

Luego el punto de intersección es: $\left(\frac{10}{3}, \frac{17}{3}\right)$

4. $L_1 \wedge L_2$ son dos rectas paralelas entre sí, $L_1: y = 4x + 3$; L_2 pasa por el punto $(0,0)$.
Hallar la ecuación de L_2 .

Resolución

De $L_1: y = 4x + 3$, podemos deducir que su pendiente $m_1 = 4$

Como $L_1 // L_2 \Rightarrow m_1 = m_2$

Luego $m_2 = 4$

aplicando la forma punto-pendiente,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = 4(x - 0)$$

así tenemos la recta $L_2: y = 4x$

5. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $5x - 3y = -2 \wedge 8x - 7y = 44$ y es perpendicular a la recta que está definida por la ecuación

$$y = \frac{2}{3}x + 1$$

Resolución

$$\begin{cases} 5x - 3y = -2 & (1) \\ 8x - 7y = 44 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} 7 & 5x - 3y = -2 \\ -3 & 8x - 7y = 44 \\ \hline & 11x \quad / = -146 \end{array}$$

$$x = -\frac{146}{11}$$

Ahora reemplazamos el valor de x encontrado en (1) para encontrar el valor de y ,

$$5\left(-\frac{146}{11}\right) - 3y = -2$$

$$3y = 5\left(-\frac{146}{11}\right) + 2$$

$$3y = -\frac{730}{11} + 2$$

$$3y = -\frac{708}{11}$$

$$y = -\frac{236}{11}$$

Luego el punto de intersección es: $\left(-\frac{146}{11}, -\frac{236}{11}\right)$ que sería el punto de paso de la recta que queremos encontrar.

Por otro lado, tenemos la recta definida por la ecuación

$$L: y = \frac{2}{3}x + 1, \text{ con pendiente } m = \frac{2}{3}$$

Que es perpendicular a la recta L_1 que queremos encontrar.

Por dato sabemos que $L \perp L_1 \Rightarrow m \cdot m_1 = -1$

$$\frac{2}{3}m_1 = -1$$

$$m_1 = -\frac{3}{2}$$

Luego aplicando la forma punto-pendiente,

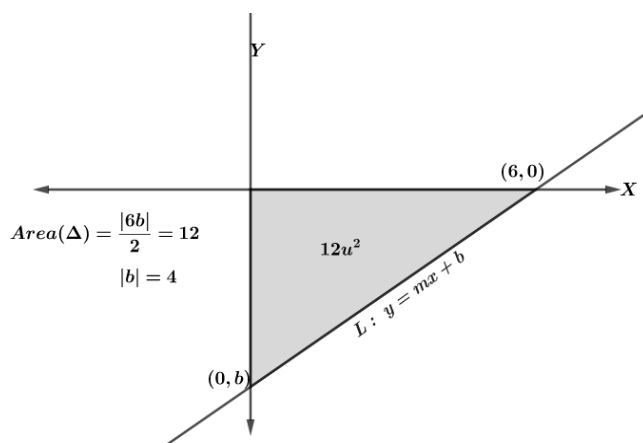
$$y + \frac{236}{11} = -\frac{3}{2}\left(x + \frac{146}{11}\right)$$

$$11y + 236 = -\frac{33}{2}x - 438$$

así tenemos $L_1: \frac{33}{2}x + 11y + 674 = 0$

6. Una recta pasa por $(6,0)$ formando un triángulo de $12u^2$ en el cuarto cuadrante con los ejes coordenados. Hallar la ecuación de dicha recta.

Resolución



Del gráfico tenemos que $|b| = 4 \Leftrightarrow b = 4 \vee b = -4$, pero podemos observar en el gráfico que b está en el cuarto cuadrante, luego

$$b = -4$$

Ahora encontraremos la pendiente m de la recta L ,

$$m = -\frac{b}{6} = -\frac{-4}{6}$$

$$m = \frac{2}{3}$$

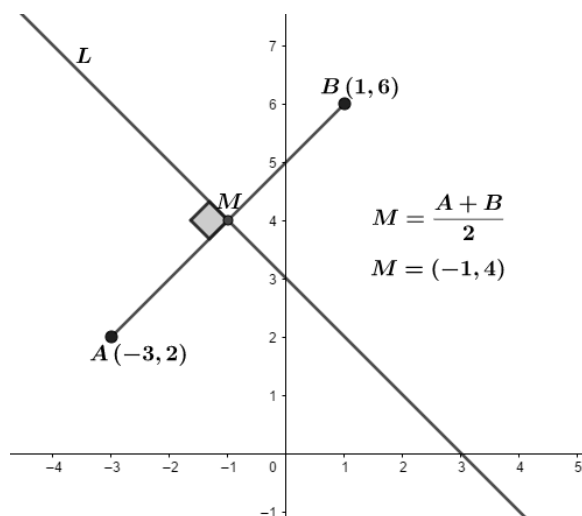
Luego aplicando la forma pendiente-ordenada al origen

$$y = mx + b$$

$$L: y = \frac{2}{3}x - 4$$

7. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento que forma $A(-3,2)$ y $B(1,6)$

Resolución



Una mediatriz divide a un segmento por el punto medio y perpendicularmente, del gráfico tenemos que el punto medio

$M = (-1, 4)$, para encontrar la ecuación de la mediatriz L , necesitamos la pendiente m .

Como podemos observar en el gráfico el segmento $\overline{AB}$ es perpendicular a la mediatriz L , entonces:

$$\overline{AB} \perp L \Leftrightarrow m_{\overline{AB}} \cdot m = -1$$

Pero la pendiente del segmento $\overline{AB}$

$$m_{\overline{AB}} = \frac{6 - 2}{1 - (-3)} = \frac{4}{4}$$

$$m_{\overline{AB}} = 1$$

Luego reemplazando $m_{\overline{AB}} = 1$ en $m_{\overline{AB}} \cdot m = -1$, obtenemos

$$m = -1$$

Ahora aplicando la forma punto-pendiente, con $M = (-1, 4)$ y

$$m = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = -(x + 1)$$

$$L: x + y - 3 = 0$$

Que sería la ecuación de la recta mediatriz del segmento dado.

Ejercicios

1. Determinar la ecuación de cada una de las rectas de acuerdo con las condiciones dadas y exprésala en forma general.
 - a) $(5,2)$ y $(1,7)$
 - b) $(-4,-5)$ y $(0,3)$
 - c) $(\frac{2}{3}, \frac{7}{4})$, y $m = -\frac{3}{4}$
 - d) $(-2,-3)$, y $m = -1$
2. Los costos de producción por cierta cantidad de artículos se encuentran en la siguiente tabla:

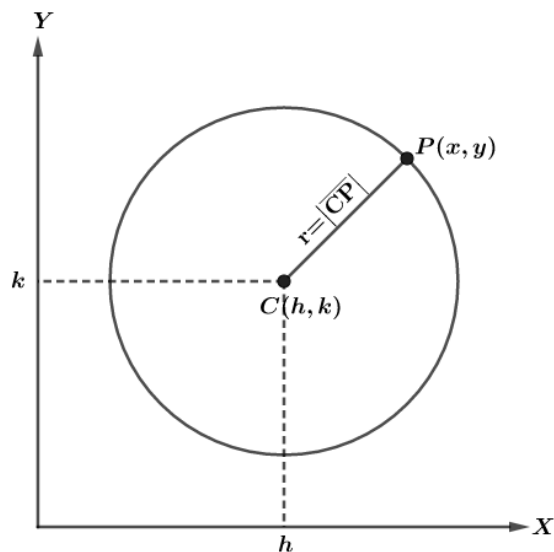
Nº de artículos → x	10	20	25
Costo de producción → y	95	y	180

- a) Determinar la ecuación de costos, suponiendo que es lineal.
 - b) Encontrar el costo de producir 20 artículos al día.
 - c) ¿Cuáles son los costos fijos y los costos variables?
3. La ordenada al origen de una recta es el recíproco de su abscisa al origen y la recta pasa por el punto $(-1, 5)$. Hallar la ecuación de la recta.
 4. Para alquilar un automóvil, Fernando paga $S / 250$ diarios y $S/3$ adicionales por kilómetro.
 - a) Expresar el costo de alquiler en función de la cantidad de kilómetros recorridos.
 - b) Representa de manera gráfica la ecuación obtenida.
 - c) ¿Cuánto se debe pagar por alquilar un automóvil durante un día para un viaje de 70km ?
 5. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es $-\frac{5}{2}$ y que forma con los semiejes de coordenadas positivas un triángulo de 15 unidades de perímetro.
 6. Hallar las coordenadas del punto Q de la recta $L: 3x - y + 3 = 0$ que equidista de los puntos $A(2,4)$ y $B(6,-2)$

7. Calcular la distancia entre el punto y la recta dada:
- $2x - 3y + 4 = 0$ y $(2,7)$
 - $y - 5x = 2$ y $(0, -5)$
 - $y + 2x + 21 = 0$ y $(-6, -11)$
8. Encontrar la recta que pasa por la intersección de las rectas:
 $7x - 2y = 0$ y $4x - y - 1 = 0$ y es perpendicular a la recta
 $3x + 8y = 19$.
9. Hallar la tangente del ángulo que forma la recta que pasa por $(-5,6)$ y $(1,2)$ con la que pasa por $(-4,7)$ y $(8,7)$.
10. Hallar los valores de k , para que la recta $L: 5x - 12y + 3 + k = 0$ y el punto $(-3,2)$ disten 4 unidades.
11. ¿Para qué valor de k , la recta $L_1: 2x + ky = 3$ es perpendicular a la recta $L_2: 4x + y = 1$? ¿Para qué valor de k , son paralelas dichas rectas?
12. Si la recta $L_1: (x - 2y + 1)a + (3x - 2)b - 20 = 0$ pasa por el punto $P(1, -2)$ y es perpendicular a $L_2: 2x + 3y - 5 = 0$, hallar el valor de a, b
13. Una recta pasa por el punto $P(2,3)$ y la suma de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es 10 *unidades*. Hallar la ecuación de la recta.
14. Hallar el valor de k para que la rectas $L_1: \frac{7}{3}x + \frac{5}{3}$ y $L_2: (k - 3)x + 2 = (2k - 2)y$
- Sean paralelos
 - Sean perpendiculares

2.2.2 La Circunferencia

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ que están a una distancia constante de otro punto fijo al que llamamos centro $C(h,k)$, la distancia constante es el radio $r = |\overline{CP}|$ de la circunferencia.



Ecuación forma ordinaria de la circunferencia

De la gráfica tenemos que el radio de la circunferencia es:

$$r = |\overline{CP}|$$

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

Elevando al cuadrado, obtenemos:

$$C: (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Forma ordinaria

Ecuación forma canónica de la circunferencia

Si $C(h, k) = (0, 0)$, entonces la ecuación de la circunferencia es de la forma:

$$C: x^2 + y^2 = r^2$$

Ecuación forma general de la circunferencia

Si desarrollamos la ecuación de forma ordinaria, tenemos:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

Ordenando $x^2 + y^2 + (-2h)x + (-2k)y + k^2 + h^2 - r^2 = 0$

$$x^2 + y^2 + \underbrace{(-2h)}_D x + \underbrace{(-2k)}_E y + \underbrace{k^2 + h^2 - r^2}_F = 0$$

Luego tenemos:

$$C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

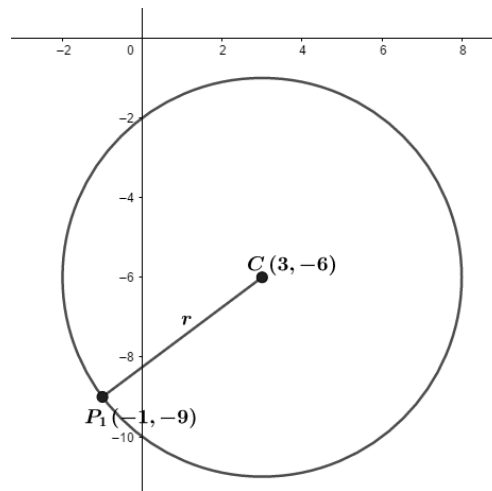
Forma general

Observación: Para transformar una ecuación de forma general de la circunferencia, a su forma ordinaria, simplemente se completa cuadrados.

Ejemplos

1. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(3, -6)$ y que pasa por el punto $(-1, -9)$.

Resolución



Reemplazamos el centro $C(3, -6)$ en la ecuación de forma ordinaria

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 3)^2 + (y - (-6))^2 = r^2$$

$$(x - 3)^2 + (y + 6)^2 = r^2 \quad (*)$$

Estaría faltando el radio, pero por dato tenemos el punto $P_1(-1, -9)$ entonces $r = |\overline{CP_1}|$

$$r = \sqrt{(-1-3)^2 + (-9-(-6))^2}$$

$$r = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25}$$

$$r = 5$$

Finalmente reemplazamos el radio $r = 5$ en (*)

$$(x-3)^2 + (y+6)^2 = 5^2$$

$$C: (x-3)^2 + (y+6)^2 = 25$$

que es la ecuación ordinaria de la circunferencia.

2. Calcular la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en $(-1,4)$ y es tangente al eje Y .

Resolución

Como nos da como dato el centro

$C(-1,4)$, además que es tangente

al eje Y , entonces $r = 1$

luego en la ecuación ordinaria tenemos

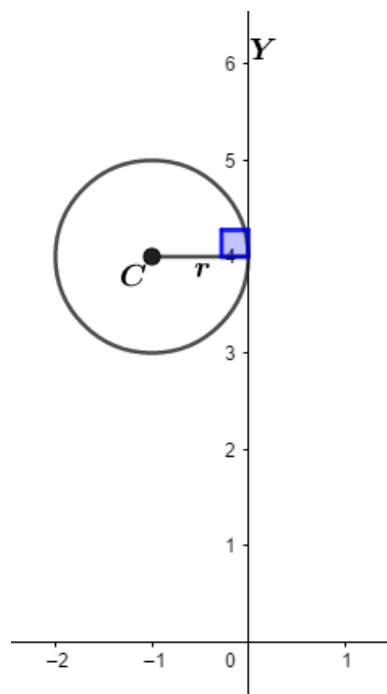
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-(-1))^2 + (y-4)^2 = (1)^2$$

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 1$$

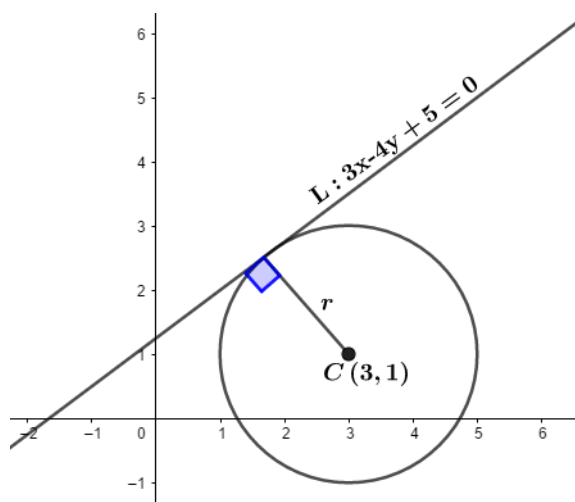
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = 1$$

$$C: x^2 + y^2 + 2x - 8y + 16 = 0$$



3. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto $C(3,1)$ y es tangente a la recta $3x - 4y + 5 = 0$

Resolución



Como la recta L es tangente a la circunferencia de centro $C(3,1)$, entonces para determinar el radio de la circunferencia, hallaremos la distancia del $C(3,1)$ a la recta $L: 3x - 4y + 5 = 0$

Sabemos que la distancia del punto $P_1(x_1, y_1)$ a una recta L , está dada por:

$$d(P_1, L) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Entonces $r = d(C, L)$

$$r = \frac{|3(3) - 4(1) + 5|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{25}}$$

$$r = \frac{|10|}{5} = 2$$

$$r = 2$$

Luego usaremos la ecuación de la circunferencia de la forma ordinaria:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Donde reemplazamos el centro $C(3,1)$ y radio $r = 2$

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$

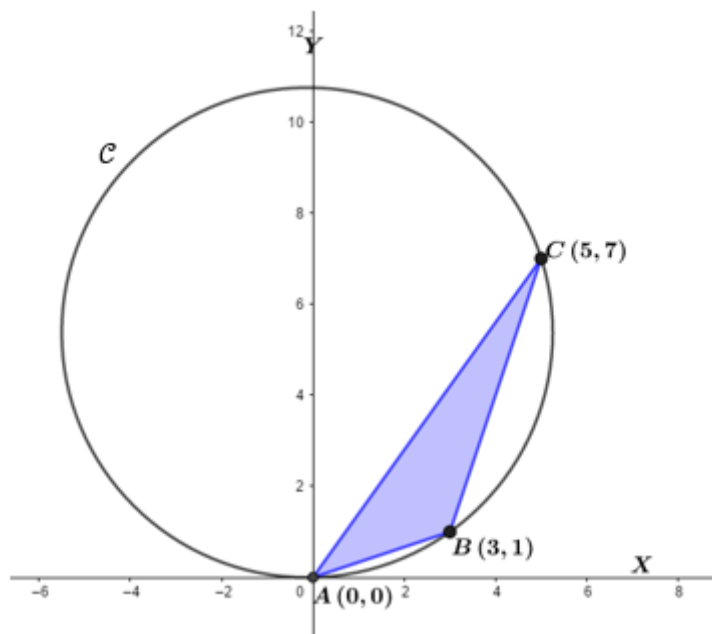
$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 4$$

$$C: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$$

4. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices: $A(0,0)$, $B(3,1)$ y $C(5,7)$.

Resolución



$$A(0,0) \in C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow: 0^2 + 0^2 + (0)D + (0)E + F = 0 \\ \Rightarrow F = 0 \quad (1)$$

$$B(3,1) \in C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow: (3)^2 + (1)^2 + (3)D + (1)E + F = 0 \\ \Rightarrow 3D + E + F = -10 \quad (2)$$

$$C(5,7) \in C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow: (5)^2 + (7)^2 + (5)D + (7)E + F = 0 \\ \Rightarrow 5D + 7E + F = -74 \quad (3)$$

Ahora reemplazamos (1) en (2) y (3), obtenemos:

$$3D + E = -10 \quad (4)$$

$$5D + 7E = -74 \quad (5)$$

Resolviendo (4) y (5),

$$\begin{array}{r|l} -7 & 3D + E = -10 \\ & 5D + 7E = -74 \\ \hline & -16D / = -4 \end{array}$$

$$D = \frac{1}{4}$$

Reemplazando el valor de D , en (4)

$$3\left(\frac{1}{4}\right) + E = -10$$

$$E = -10 - \frac{3}{4}$$

$$E = -\frac{43}{4}$$

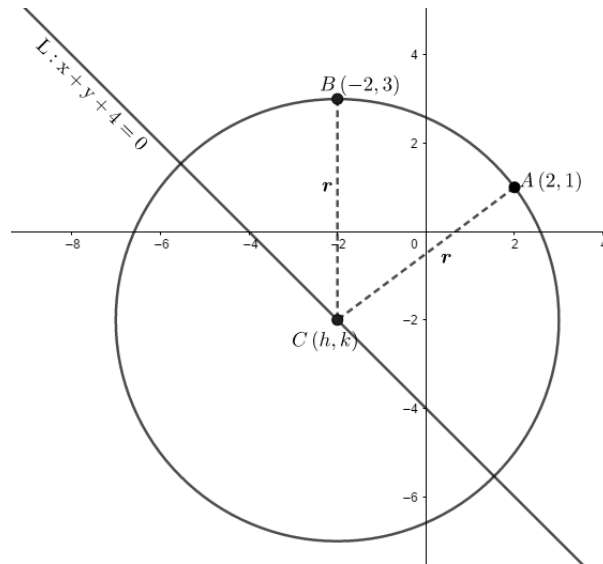
Luego tenemos en la ecuación de forma general de la circunferencia

$$C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$C: x^2 + y^2 + \frac{1}{4}x - \frac{43}{4}y = 0$$

5. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2,1)$, $B(-2,3)$ y tiene su centro sobre la recta $L: x + y + 4 = 0$

Resolución



Del gráfico (que se hizo en base a los datos dados) tenemos:

$$d(C, A) = d(C, B)$$

$$\sqrt{(-2 - h)^2 + (3 - k)^2} = \sqrt{(2 - h)^2 + (1 - k)^2}$$

Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned}
 (-2-h)^2 + (3-k)^2 &= (2-h)^2 + (1-k)^2 \\
 4 + 4h + h^2 + 9 - 6k + k^2 &= 4 - 4h + h^2 + 1 - 2k + k^2 \\
 8h - 4k &= -8 \\
 2h - k &= -2 \quad (1)
 \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que $C(h, k) \in L$, entonces satisface la ecuación de la recta $L: x + y + 4 = 0$, es decir:

$$\begin{aligned}
 C(h, k) \in L &\Rightarrow h + k + 4 = 0 \\
 h + k &= -4 \quad (2)
 \end{aligned}$$

luego resolveremos el sistema de ecuaciones formado por (1) y (2)

$$\begin{cases} 2h - k = -2 & (1) \\ h + k = -4 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l}
 2h - k = -2 \\
 h + k = -4 \\
 \hline
 3h \quad / = -6
 \end{array}$$

$$h = -2$$

reemplazando $h = -2$ en (2)

$$\begin{aligned}
 -2 + k &= -4 \\
 k &= -2
 \end{aligned}$$

Tenemos así el centro de la circunferencia, $C(h, k) = (-2, -2)$

Por otro lado, determinaremos el radio de la circunferencia, que del gráfico:

$$\begin{aligned}
 r &= d(C, A) \\
 r &= \sqrt{(2 - (-2))^2 + (1 - (-2))^2} \\
 r &= \sqrt{25} = 5 \\
 r &= 5
 \end{aligned}$$

Luego para determinar la ecuación de la circunferencia, usaremos la forma ordinaria:

$$\begin{aligned}
 C: (x - h)^2 + (y - k)^2 &= r^2 \\
 C: (x - (-2))^2 + (y - (-2))^2 &= 5^2 \\
 C: (x + 2)^2 + (y + 2)^2 &= 25 \\
 C: x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 - 25 &= 0
 \end{aligned}$$

$$C: x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$$

6. Trazar la gráfica de la siguiente ecuación de la circunferencia

$$C: x^2 + y^2 + 8x + 8y - 4 = 0$$

Resolución

Para trazar la gráfica de la circunferencia, tenemos que encontrar el centro y radio, para ello nos conviene tener la ecuación de la circunferencia de la forma ordinaria, para ello completamos cuadrados.

$$C: x^2 + y^2 + 8x + 8y - 4 = 0$$

$$x^2 + 8x + y^2 + 8y - 4 = 0$$

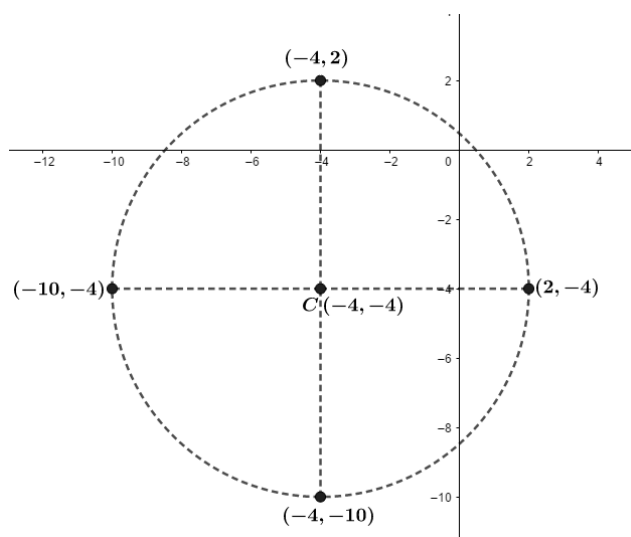
$$\underbrace{x^2 + 8x + 16}_{(x+4)^2} - 16 + \underbrace{y^2 + 8y + 16}_{(y+4)^2} - 16 - 4 = 0$$

$$(x + 4)^2 - 16 + (y + 4)^2 - 16 - 4 = 0$$

$$(x + 4)^2 + (y + 4)^2 = 36$$

$$C: (x + 4)^2 + (y + 4)^2 = 6^2$$

Luego tenemos el centro $C(h, k) = (-4, -4)$ y radio $r = 6$; ahora en el plano cartesiano ubicamos el centro, a partir de ahí ubicamos los 4 puntos a la derecha, izquierda, arriba y abajo, a una distancia $r = 6$, por esos 4 puntos pasa la circunferencia.



Ejercicios

1. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $(-2,3)$ y radio 4.
2. Calcular la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en $(-1,4)$ y es tangente al eje de las abscisas.
3. Determinar las coordenadas del centro y la longitud del radio de cada una de las siguientes circunferencias representadas por su ecuación.
 - a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$
 - b) $x^2 + y^2 - 8x - 8y - 7 = 0$
 - c) $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 4 = 0$
 - d) $5x^2 + 5y^2 - 10x + 20y - 30 = 0$
4. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices: $A(-4, -7)$, $B(5,8)$ y $C(-3,6)$.
5. Determinar el valor de k para que la recta $L: 6x - 3y = 5 - k$ sea tangente a la circunferencia $4x^2 + 4y^2 - 12x + 16y - 11 = 0$
6. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(3, -2)$, $B(-1, -6)$, cuyo centro está sobre la recta $L: x - 3y + 3 = 0$
7. Hallar las ecuaciones de las circunferencias que tienen sus centros en la recta $L: 4x - 5y = 3$, son tangentes a las rectas $L_1: 2x - 3y = 10$ y $L_2: 3x - 2y + 5 = 0$
8. Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en la recta $L_1: 3x + 4y - 1 = 0$, tangente a la recta $L_2: 3x - 4y + 8 = 0$ y radio de longitud de 5 *unidades*.
9. Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo cuyos lados son $L_1: x - y = 0$, $L_2: x - 7y = 0$ y $L_3: 7x + y = 20$.
10. Determinar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en $C(-1,4)$ y es tangente a la recta que pasa por los puntos $A(3, -2)$ y $B(-9,3)$
11. La longitud de la tangente trazada del punto $P(3, y)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 + 10x - 2y - 10 = 0$ mide $\sqrt{53}$ *unidades*. Hallar la ordenada de P .
12. Se tiene dos rectas que pasan por el punto $P(-2, -1)$ y son tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$. Hallar la distancia de P a los puntos de tangencia.

13. Obtener la ecuación de la forma general de cada una de las circunferencias que pasan por los puntos dados.

- a) $(3,2)$, $(0,4)$ y $(-6,0)$
- b) $(3,5)$, $(-2,1)$ y $(-6,0)$
- c) $(-3,2)$, $(0,-4)$ y $(1,-2)$
- d) $(1,2)$, $(-2,4)$ y $(5,-3)$

14. En una feria, uno de los juegos mecánicos consiste en cuatro tazas que giran y a su vez describen una trayectoria circular. Hallar la ecuación que representa esa trayectoria si sabemos que el diámetro del juego es de $8m$. ¿Cuál será la ecuación de la circunferencia de cada taza del juego si su radio es de $1.5 m$?

15. Calcular la longitud de la tangente trazada desde el punto $A(1, -2)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 + x - 3y - 3 = 0$

16. Hallar las ecuaciones de las circunferencias que pasan por el origen de las coordenadas y son tangentes a las dos rectas concurrentes: $L_1: x + 2y - 9 = 0$ y $L_2: 2x - y + 2 = 0$

17. Dadas las coordenadas de los extremos de uno de sus diámetros. Obtener la ecuación de la circunferencia.

- a) $A(-4, 3)$ y $B(4, -1)$
- b) $D(-1, -3)$ y $E(1, 2)$
- c) $F(2, -4)$ y $G(6, 0)$
- d) $H(-3, -4)$ y $(5, -6)$

18. Determinar cuáles de las ecuaciones representan una circunferencia, o un punto, o no tienen gráfica.

- a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$
- b) $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$
- c) $x^2 + y^2 - 5x - 3y + \frac{34}{4} = 0$
- d) $x^2 + y^2 + 7x + 5y + 16 = 0$

19. Los lados de un triángulo están sobre las rectas

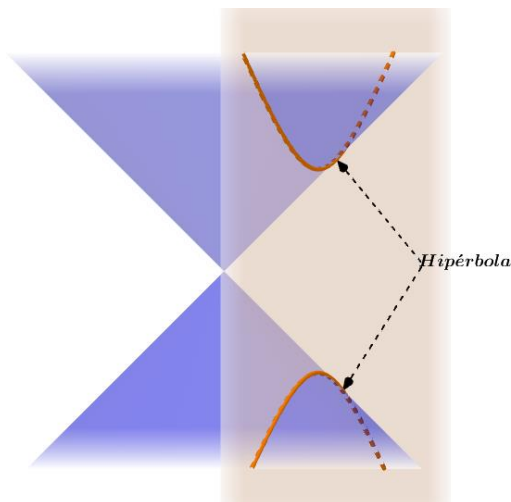
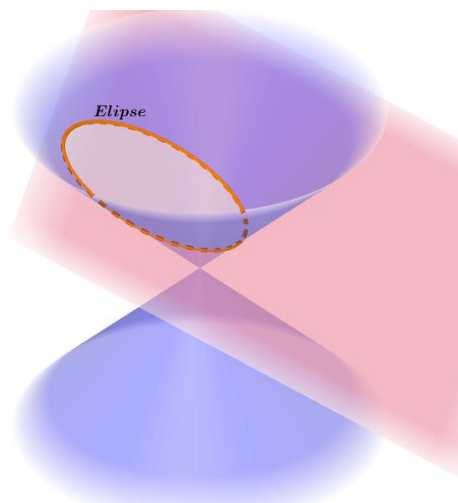
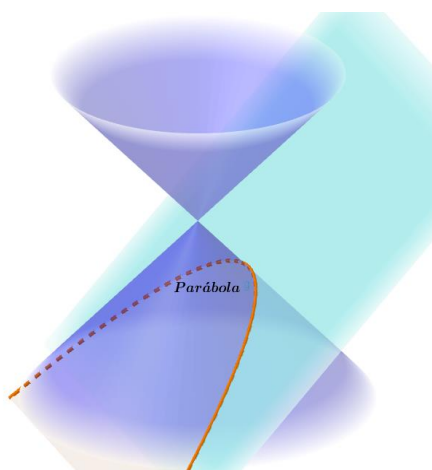
$3x + 4y + 8 = 0$, $3x - 4y - 32 = 0$ y $x = 8$. Encontrar la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo.

20. Determinar la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $4x + 3y = 4$ en el punto $(4, -4)$ y el centro está en la recta $x - y = 7$.

2.3 Secciones Cónicas

La gráfica de una ecuación de segundo grado, que se puede expresar de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ en las coordenadas x y y se llama sección cónica o simplemente cónica.

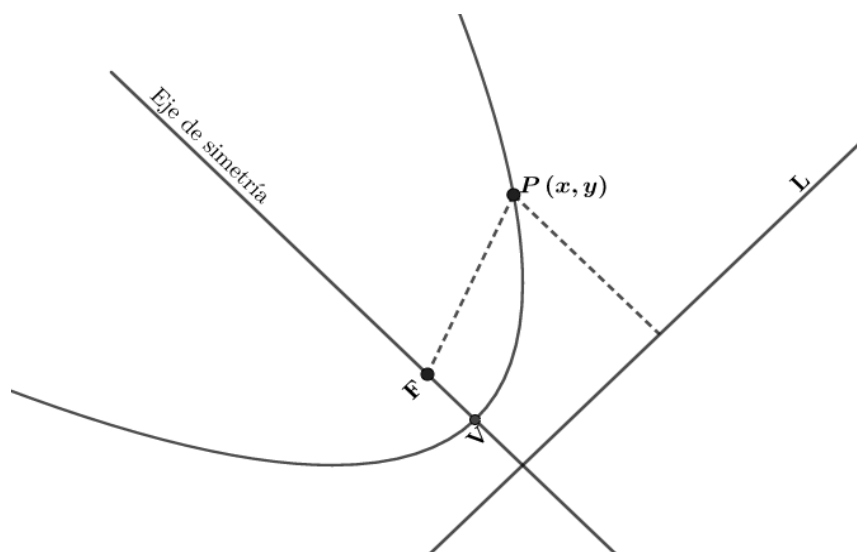
Esta denominación viene del hecho de que la curva se puede obtener como la intersección de un cono circular recto y un plano.



2.3.1 La Parábola

Es el conjunto de puntos $P(x, y) \in R^2$, que equidistan de un punto fijo F (foco) y una recta fija L (directriz).

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in R^2 / d(P, F) = d(P, L)\}$$

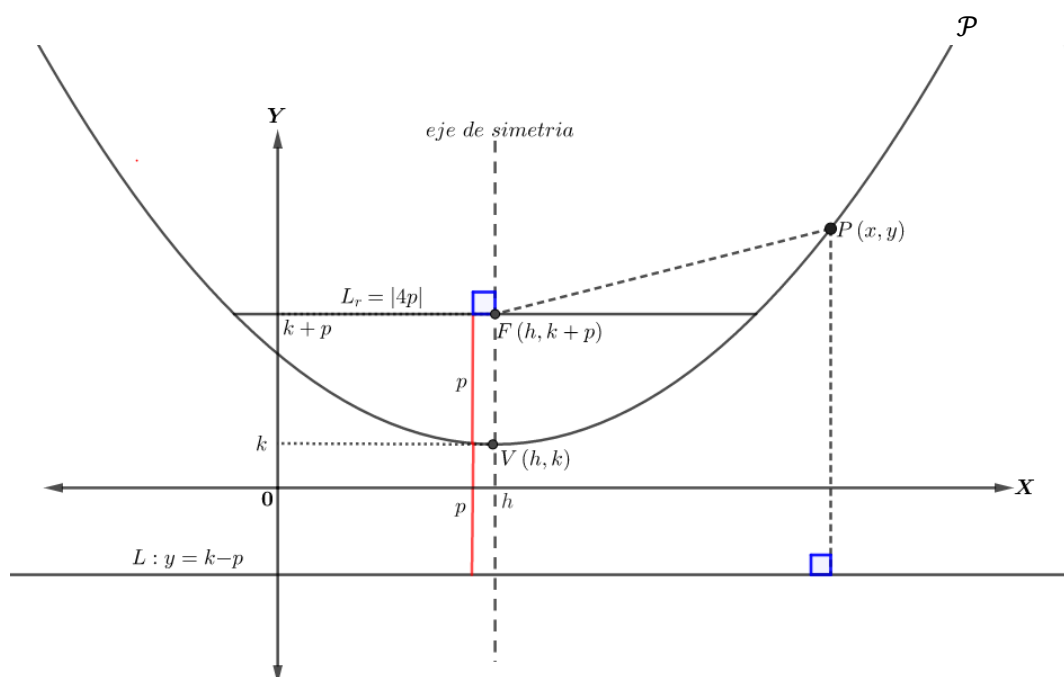


V: Vértice

F: Foco

L: Directriz

Ecuación ordinaria o por traslación de la parábola vertical



Elementos de la parábola vertical

$V(h, k)$; *vértice*

$F(h, k + p)$; *foco*

$L: y = k - p$; *recta directriz*

$$d(V, F) = d(V, L) = |p|$$

$$L_r = |4p|$$

$x = h$; *eje de simetría = eje focal*

$$e = \frac{d(P, F)}{d(P, L)} = 1; \text{ excentricidad}$$

Para encontrar la ecuación ordinaria de la parábola partimos de la definición:

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in R^2 / d(P, F) = d(P, L)\}$$

$$d(P, F) = d(P, L)$$

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - (k + p))^2} = \frac{|y - k + p|}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$$

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k - p)^2} = |y - k + p|$$

Elevando al cuadrado, y desarrollando:

$$(x - h)^2 + [(y - k) - p]^2 = [(y - k) + p]^2$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 - 2p(y - k) + p^2 = (y - k)^2 + 2p(y - k) + p^2$$

$$(x - h)^2 - 2p(y - k) = 2p(y - k)$$

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

$$\mathcal{P}: (x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Ecuación ordinaria de la parábola vertical

Si $p > 0 \Rightarrow$ la *parábola es cóncava hacia arriba*

Si $p < 0 \Rightarrow$ la *parábola es cóncava hacia abajo*

Observación: Si el vértice de la parábola es el origen, $V(h, k) = (0, 0)$

Entonces la ecuación de la parábola se llama **Canónica**, y se reduce a:

$$\mathcal{P}: x^2 = 4py$$

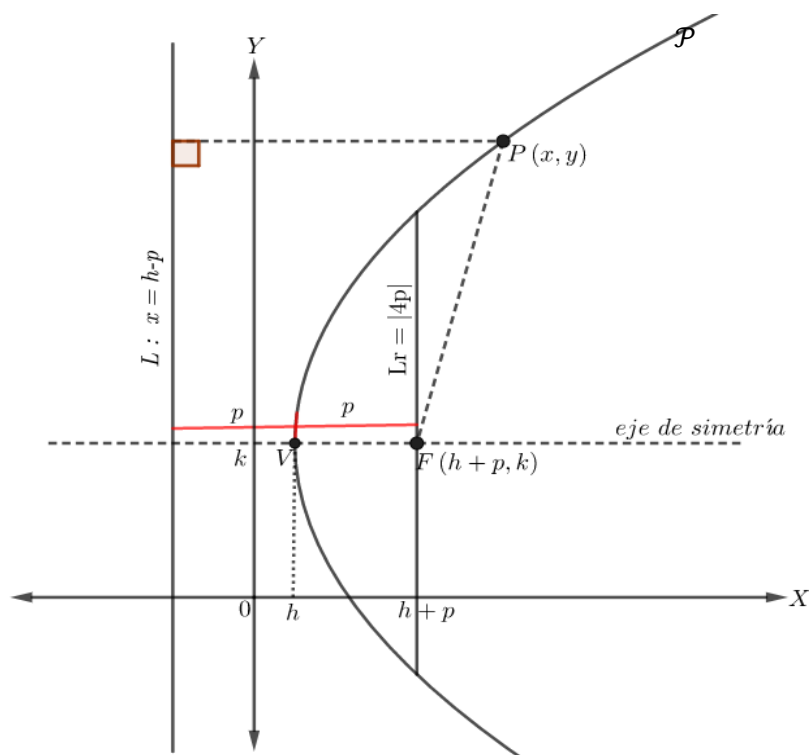
Donde el foco es $F(0, p)$

Recta directriz: $L: y = -p$

Eje de simetría: eje Y

Ecuación ordinaria o por traslación de la parábola horizontal

Para obtener la ecuación de una parábola horizontal seguimos un proceso similar



Elementos de la parábola horizontal

$V(h, k)$; vértice

$F(h + p, k)$; foco

$L: x = h - p$; recta directriz

$$d(V, F) = d(V, L) = |p|$$

$$L_r = |4p|$$

$y = k$; eje de simetría = eje focal

$$e = \frac{d(P, F)}{d(P, L)} = 1; \text{ excentricidad}$$

Partimos de la de la definición:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \{(x, y) \in R^2 / d(P, F) = d(P, L)\} \\ d(P, F) &= d(P, L) \\ \sqrt{(x - (h + p))^2 + (y - k)^2} &= \frac{|x - h + p|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \\ \sqrt{(x - h - p)^2 + (y - k)^2} &= |x - h + p|\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado, y desarrollando:

$$\begin{aligned}[(x - h) - p]^2 + (y - k)^2 &= [(x - h) + p]^2 \\ (x - h)^2 - 2p(x - h) + p^2 + (y - k)^2 &= (x - h)^2 + 2p(x - h) + p^2 \\ (y - k)^2 - 2p(x - h) &= 2p(x - h) \\ (y - k)^2 &= 4p(x - h)\end{aligned}$$

$$\mathcal{P}: (y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Ecuación ordinaria de la parábola horizontal

Si $p > 0 \Rightarrow$ la parábola es cóncava hacia la derecha

Si $p < 0 \Rightarrow$ la parábola es cóncava hacia la izquierda

Observación: Si el vértice de la parábola es el origen, $V(h, k) = (0, 0)$

Entonces la ecuación de la parábola se llama **Canónica**, y se reduce a:

$$\mathcal{P}: y^2 = 4px$$

Donde el foco es $F(p, 0)$

Recta directriz: $L: x = -p$

Eje de simetría: eje X

Ecuación general de la parábola

Partiendo de la ecuación ordinaria de la parábola,

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$ $x^2 - 2hx + h^2 - 4py + 4kp = 0$ $x^2 + \underbrace{(-2h)}_D x + \underbrace{(-4p)}_E y + \underbrace{(h^2 + 4kp)}_F = 0$ $\mathcal{P}: x^2 + Dx + Ey + F = 0$ Ecuación general de la parábola	$(y - k)^2 = 4p(x - h)$ $y^2 - 2ky + k^2 - 4px + 4hp = 0$ $y^2 + \underbrace{(-2k)}_D y + \underbrace{(-4p)}_E x + \underbrace{(k^2 + 4hp)}_F = 0$ $\mathcal{P}: y^2 + Dy + Ex + F = 0$ Ecuación general de la parábola
--	--

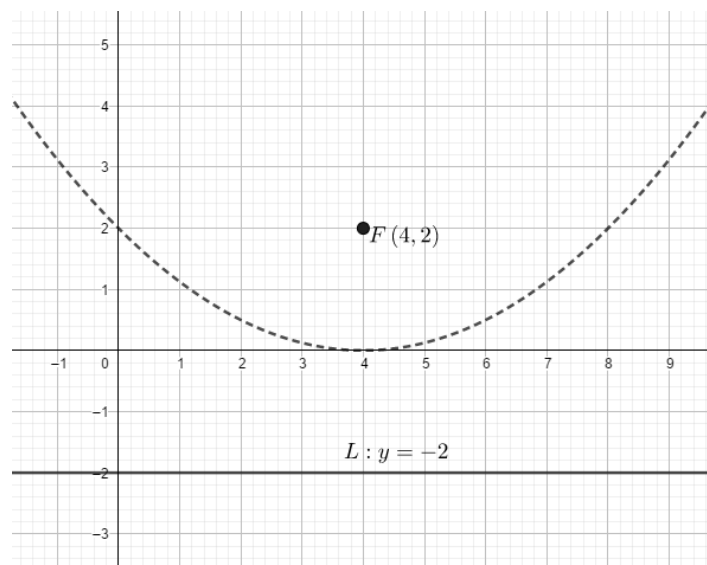
Observación: Si tenemos la ecuación general de la parábola, completando cuadrados llegamos a la forma ordinaria.

Ejemplos

1. Hallar la ecuación de la parábola si se tiene la recta directriz $L: y = -2$ y el foco $F(4,2)$.

Resolución

Ubicamos los datos dados en el plano cartesiano



Según la gráfica se nos sugiere utilizar la ecuación ordinaria vertical cóncava hacia arriba

$$\mathcal{P}: (x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Además, tenemos que:

$$F(h, k + p) = (4, 2) \quad y \quad L: y = k - p = -2$$

$$h = 4 \wedge k + p = 2 \quad y \quad k - p = -2$$

resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} k + p = 2 \\ k - p = -2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} k + p = 2 & \\ k - p = -2 & \\ \hline 2k & = 0 \end{array}$$

$$k = 0 \Rightarrow p = 2$$

así tenemos el vértice $V(4, 0)$ y $p = 2$, luego reemplazamos en la ecuación ordinaria vertical

$$\mathcal{P}: (x - h)^2 = 4p(y - k)$$

$$(x - 4)^2 = 4(2)(y - 0)$$

$$\mathcal{P}: (x - 4)^2 = 8y$$

Observación: notemos que podríamos, haber reemplazado directamente del gráfico.

2. Hallar los elementos de la parábola que tiene por ecuación: $y^2 = 8x$

Resolución

Notemos que nos dan una ecuación canónica horizontal

$$\mathcal{P}: y^2 = 4px$$

$$y^2 = 8x$$

$$y^2 = 4(2)x$$

De donde nos resulta que $p = 2$

Luego los **elementos** son:

Vértice: $V(0, 0)$

Foco: $F(p, 0) = (2, 0)$

Recta directriz: $L: x = -p$

$$L: x = -2$$

Eje de simetría: eje X

Lado recto: $L_r = |4p|$

$$L_r = 8$$

3. Calcular las coordenadas del vértice y del foco, la ecuación de la directriz de la siguiente parábola: $x^2 - 2x - 6y - 5 = 0$

Resolución

$$x^2 - 2x - 6y - 5 = 0$$

Completando cuadrados, obtendremos la ecuación ordinaria:

$$\underbrace{x^2 - 2x + 1 - 1}_{(x-1)^2} - 6y - 5 = 0$$

$$(x - 1)^2 - 1 - 6y - 5 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 6y + 6$$

$$(x - 1)^2 = 6(y + 1)$$

Ahora tenemos la ecuación ordinaria vertical

De donde deducimos que:

$$4p = 6 \Rightarrow p = \frac{3}{2}$$

$$\text{Vértice: } V(h, k) = (1, -1)$$

$$\text{Foco: } F(h, k + p) = \left(1, -1 + \frac{3}{2}\right) \Rightarrow F = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Recta directriz: } L: y = k - p \Rightarrow y = -1 - \frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{5}{2}$$

4. Determinar y mostrar la gráfica de la ecuación $y^2 - 6y + 8x + 41 = 0$ y determine sus elementos.

Resolución

Completando cuadrados, obtendremos la ecuación ordinaria:

$$y^2 - 6y + 8x + 41 = 0$$

$$\underbrace{y^2 - 6y + 9 - 9}_{(y-3)^2} + 8x + 41 = 0$$

$$(y - 3)^2 - 9 + 8x + 41 = 0$$

$$(y - 3)^2 = -8x - 32$$

$(y - 3)^2 = -8(x + 4)$, ecuación ordinaria horizontal, de donde deduciremos sus **elementos**:

$4p = -8 \Rightarrow p = -2$, por lo que la parábola es cóncava hacia la izquierda.

Vértice: $V(h, k) = (-4, 3)$

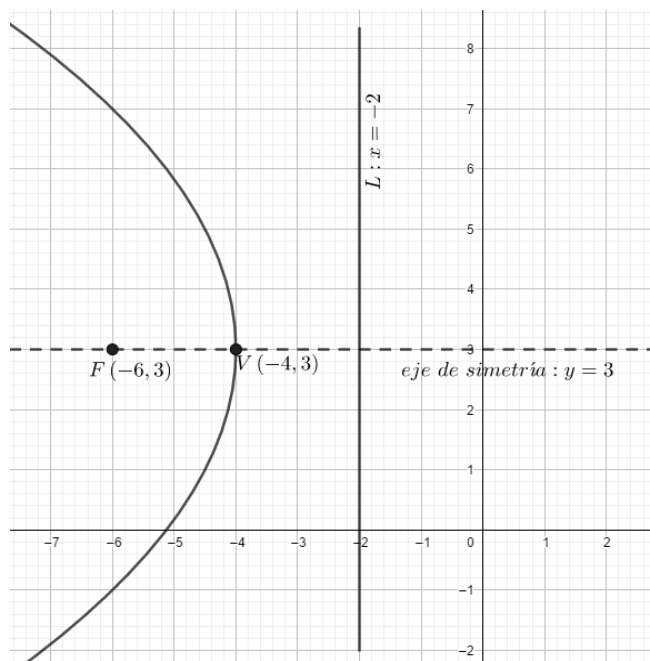
Foco: $F(h + p, k) = (-4 + (-2), 3) \Rightarrow F = (-6, 3)$

Recta directriz: $L: x = h - p \Rightarrow x = -4 - (-2); x = -2$

Lado recto: $L_r = |4p| \Rightarrow L_r = |4(-2)| = 8$

Eje de simetría: $y = k \Rightarrow y = 3$

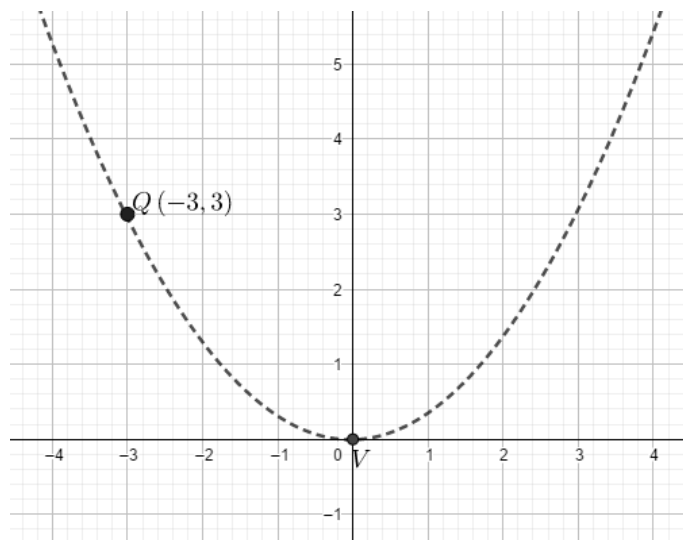
Excentricidad: $e = \frac{d(P,F)}{d(P,L)} = 1$



5. Determinar la ecuación de la parábola con vértice $(0,0)$, que tiene al eje Y como eje de simetría y que pasa por el punto $Q(-3,3)$.

Resolución

Ubicamos los datos dados en el plano cartesiano



Con los datos dados se sugiere que la parábola es de la forma canónica vertical, es decir: $\mathcal{P}: x^2 = 4py$

Nos faltaría encontrar el valor de p , pero tenemos un punto

$$Q(-3,3) \in \mathcal{P} \Rightarrow (-3)^2 = 4p(3)$$

$$9 = 12p$$

$$p = \frac{3}{4}$$

Luego tenemos que:

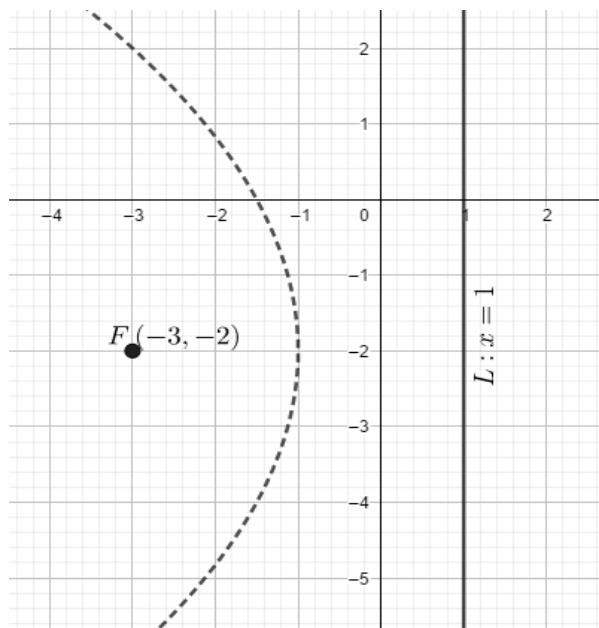
$$\mathcal{P}: x^2 = 4\left(\frac{3}{4}\right)y$$

$$\mathcal{P}: x^2 = 3y$$

6. Hallar la ecuación de la parábola que tiene foco en el punto de coordenadas $(-3, -2)$ y directriz con ecuación $x = 1$.

Resolución

Ubicamos los datos dados en el plano cartesiano



Con los datos dados, se puede notar que la parábola es cóncava hacia la izquierda, es decir:

$$\mathcal{P}: (y - k)^2 = 4p(x - h)$$

$$\text{Sabemos que } d(F, L) = |2p| \Rightarrow |-3 - 1| = |2p|$$

$$2p = 4 \vee 2p = -4$$

$$p = 2 \vee p = -2$$

Pero por los datos que nos dan, se sugiere que la parábola es cóncava hacia la izquierda, luego $p = -2$

$$\text{Por otro lado, tenemos el foco } F(h + p, k) = (-3, -2)$$

$$h + p = -3 \quad \wedge \quad k = -2$$

$$h + (-2) = -3 \quad \wedge \quad k = -2$$

$$h = -1 \quad \wedge \quad k = -2$$

$$\text{así el vértice es } V(h, k) = (-1, -2)$$

por lo tanto, la ecuación de la parábola es:

$$\mathcal{P}: (y - k)^2 = 4p(x - h)$$

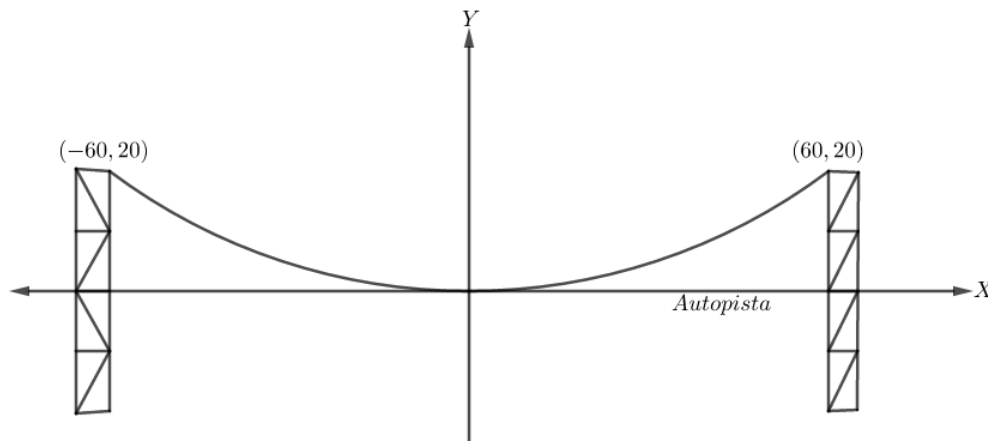
$$(y - (-2))^2 = 4(-2)(x - (-1))$$

$$\mathcal{P}: (y + 2)^2 = -8(x + 1)$$

7. Cada uno de los cables de sujeción de un puente colgante se halla suspendido (con forma de parábola) entre dos torres separadas $120m$ entre si y tienen una altura de $20m$ sobre la autopista. Los cables tocan la autopista en el punto medio entre las torres. Hallar la ecuación o modelo matemático que represente este problema.

Resolución

Nos planteamos un gráfico con los datos dados en el plano cartesiano, considerando la autopista como el eje X , y el vértice de la parábola con el origen del plano cartesiano.



Así tenemos la ecuación canónica vertical $\mathcal{P}: x^2 = 4py$, donde nos faltaría encontrar el valor de p , pero tenemos puntos que pertenecen a la parábola por tanto satisfacen su ecuación, tenemos entonces:

$$(60,20) \in \mathcal{P} \Rightarrow (60)^2 = 4p(20)$$

$$3600 = 80p$$

$$p = 45$$

Luego la ecuación que representa este problema es:

$$\mathcal{P}: x^2 = 4(45)y$$

$$\mathcal{P}: x^2 = 180y$$

8. Si el vértice de una parábola es el punto $V(-2, -3)$, la longitud del lado recto es $4\sqrt{5}$ y la recta tangente a la parábola en él V es $L_T: 2x - y + 1 = 0$, determinar la ecuación de la parábola.

Resolución

Según los datos tenemos dos posibilidades para la ecuación de la parábola, como nos da la longitud del lado recto tenemos:

$$L_r = |4p| = 4\sqrt{5} \Rightarrow |p| = \sqrt{5}$$

$$p = \pm\sqrt{5}$$

Tenemos por dato que la recta $L_T: 2x - y + 1 = 0$ es tangente a la parábola en el vértice, entonces la recta normal a ésta será el eje de simetría, luego:

$$L_T \perp L_N \Leftrightarrow m_T \cdot m_N = -1$$

$$2m_N = -1 \Rightarrow m_N = -\frac{1}{2}$$

Además, el vértice $V(-2, -3)$ pertenece a la recta normal L_N , tenemos entonces por la ecuación punto pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

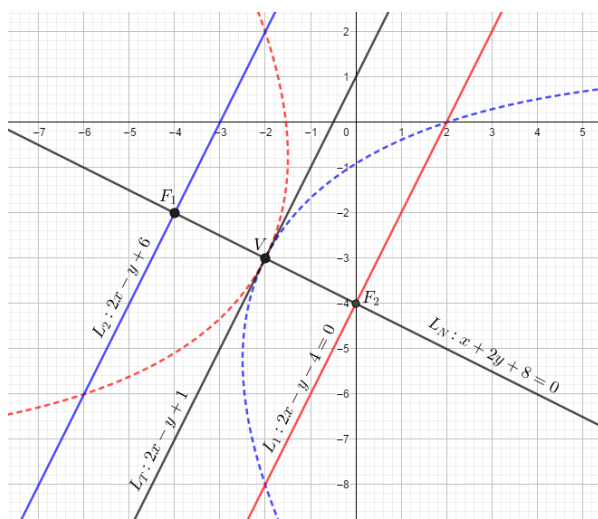
$$L_N: y - (-3) = -\frac{1}{2}(x - (-2))$$

$$L_N: y + 3 = -\frac{1}{2}(x + 2)$$

$$L_N: 2y + 6 = -x - 2$$

$$L_N: x + 2y + 8 = 0$$

Así tenemos que la recta L_N es el eje focal o eje de simetría de la parábola, luego el foco pertenece a la recta L_N



Sea el foco $F(a, b)$, tenemos entonces:

$$F(a, b) \in L_N: x + 2y + 8 = 0$$

$$a + 2b + 8 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Además } |\overline{VF}| = |P| \Rightarrow |\overline{VF}| = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a - (-2))^2 + (b - (-3))^2} = \sqrt{5}$$

Elevando al cuadrado tenemos:

$$(a + 2)^2 + (b + 3)^2 = 5 \quad (**)$$

De (*) obtenemos $a = -2b - 8$ reemplazamos en (**)

$$\text{Obtenemos } (-2b - 8 + 2)^2 + (b + 3)^2 = 5$$

$$(-2b - 6)^2 + (b + 3)^2 = 5$$

$$4(b + 3)^2 + (b + 3)^2 = 5$$

$$5(b + 3)^2 = 5$$

$$(b + 3)^2 = 1$$

$$b + 3 = \pm 1$$

$$b + 3 = 1 \vee b + 3 = -1$$

$$b = -2 \vee b = -4$$

$$\text{Luego si } b = -2 \Rightarrow a = -4; F_1(a, b) = (-4, -2)$$

$$\text{si } b = -4 \Rightarrow a = 0; F_2(a, b) = (0, -4)$$

Primer caso: Si el foco fuese; $F_1(a, b) = (-4, -2)$, usando la definición de la parábola $\mathcal{P} = \{(x, y) \in R^2 / d(P, F) = d(P, L)\}$, tenemos entonces

$d(P, F_1) = d(P, L_1)$, donde $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la parábola, nos estaría faltando la recta directriz L_1 , pero $F_2(0, -4) \in L_1$ (mirar la gráfica) además $L_1 // L_T \Rightarrow m_1 = m_T$, así $m_1 = 2$ entonces con la ecuación punto pendiente tenemos:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$L_1: y - (-4) = 2(x - 0)$$

$$L_1: y + 4 = 2x$$

$$L_1: 2x - y - 4 = 0$$

Retomando

$$d(P, F_1) = d(P, L_1),$$

$$\sqrt{(x - (-4))^2 + (y - (-2))^2} = \frac{|2x - y - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

$$\sqrt{(x + 4)^2 + (y + 2)^2} = \frac{|2x - y - 4|}{\sqrt{5}}$$

Elevando al cuadrado: $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = \frac{(2x - y - 4)^2}{5}$

$$5x^2 + 40x + 80 + 5y^2 + 20y + 20 = (2x - y + 4)^2$$

$$5x^2 + 40x + 5y^2 + 20y + 100 = 4x^2 + y^2 + 16 - 4xy + 16x - 8y$$

$$\mathcal{P}_1: x^2 + 4y^2 + 4xy + 24x + 28y + 84 = 0$$

Que sería la ecuación de una parábola que no es vertical ni horizontal.

segundo caso: si el foco fuese ; $F_2(a, b) = (0, -4)$, usando la definición de la parábola $\mathcal{P} = \{(x, y) \in R^2 / d(P, F) = d(P, L)\}$, tenemos entonces

$d(P, F_2) = d(P, L_2)$, donde $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la parábola, nos estaría faltando la recta directriz L_2 , pero $F_1(-4, -2) \in L_2$ (mirar la gráfica) además $L_2 \parallel L_T \Rightarrow m_2 = m_T$, así $m_2 = 2$ entonces con la ecuación punto pendiente tenemos:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$L_2: y - (-2) = 2(x - (-4))$$

$$L_2: y + 2 = 2x + 8$$

$$L_2: 2x - y + 6 = 0$$

Retomando

$$d(P, F_2) = d(P, L_2),$$

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - (-4))^2} = \frac{|2x - y + 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

$$\sqrt{x^2 + (y + 4)^2} = \frac{|2x - y + 6|}{\sqrt{5}}$$

Elevando al cuadrado: $x^2 + (y + 4)^2 = \frac{(2x - y + 6)^2}{5}$

$$5x^2 + 5y^2 + 40y + 80 = (2x - y + 6)^2$$

$$5x^2 + 5y^2 + 40y + 80 = 4x^2 + y^2 + 36 - 4xy + 24x - 12y$$

$$\mathcal{P}_2: x^2 + 4y^2 + 4xy - 24x + 52y + 44 = 0$$

Que sería la ecuación de una parábola que no es vertical ni horizontal.

Ejercicios

1. Encontrar las coordenadas del vértice, foco, ecuación del eje focal, directriz, longitud del lado recto y grafique la parábola
$$(x + 1)^2 = 12(y - 4)$$
2. Hallar la ecuación de la parábola, se sabe que su eje de simetría es paralelo al eje de las abscisas, que su vértice es $V(1, -2)$ y que pasa por el punto $Q(4,1)$.
3. Encontrar los elementos y graficar cada una de las siguientes parábolas representadas por su ecuación general.
 - a) $y^2 + 6y - 4x + 13 = 0$
 - b) $x^2 - 4y - 4 = 0$
 - c) $y^2 + 14y - 6x + 9 = 0$
 - d) $2y^2 - 8x + 5 = 0$
 - e) $9y^2 + 48x - 80 = 0$
4. Un cable sostenido por dos postes tiene forma de un arco parabólico, los postes que lo sostienen están separados $40m$ y tienen una altura de $10m$. Si el cable toca el piso a la mitad de la distancia entre los postes, calcular la altura del cable a $8m$ del centro del arco.
5. Una parábola cuya directriz es el eje X es tal que su foco está en la recta $L_1: 2x + 5y + 12 = 0$ y su vértice está en la recta $L_2: 3x + 5y - 6 = 0$. Hallar la ecuación de la parábola.
6. Si el vértice de una parábola es $V(-2, -3)$ y un extremo del lado recto es el punto $(0, -7)$; encontrar la ecuación de la parábola.
7. Micaela vende 80 audífonos diariamente. Si cuando los vende a $S/30$ se los compran todos y por cada aumento de $S/0.60$ en el precio deja de vender un audífono. Determinar:
 - a) El precio de cada audífono para que Alejandra obtenga la ganancia máxima al día.
 - b) ¿Cuál es el ingreso máximo por su venta de audífonos?
 - c) ¿Cuántos audífonos deja de vender cuando su ingreso es máximo?
8. Hallar la longitud de la cuerda focal (cuerda que pasa por el foco) de la parábola $x^2 + 8y = 0$ que es paralela a la recta $3x + 4y - 7 = 0$.

9. Suponga que el agua al salir del extremo de un tubo horizontal que se encuentra a $7m$ arriba del suelo, describe una curva parabólica, estando el vértice en el extremo del tubo. Si en un punto a $2m$ por debajo del nivel del tubo, el flujo del agua se ha curvado hacia afuera $3m$ más allá de una recta vertical que pasa por el extremo del tubo. ¿A qué distancia de esta vertical llegará el agua al suelo?
10. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el vértice y los puntos extremos del lado recto de la parábola $x^2 = 4y$.

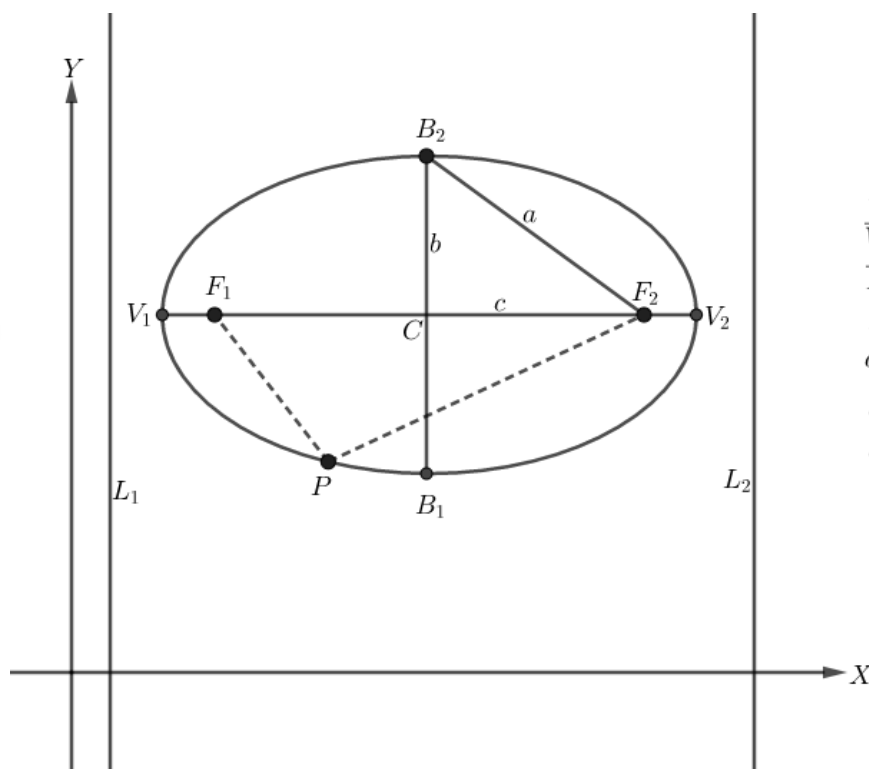
2.3.2 La Elipse

Dados dos puntos fijos F_1 y F_2 llamados focos, separados por una distancia $2c$, y dada una constante a tal que $a > c > 0$, se define la elipse como el conjunto de todos los puntos P tales que la suma de las distancias de P a los focos F_1 y F_2 es igual a $2a$, es decir:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

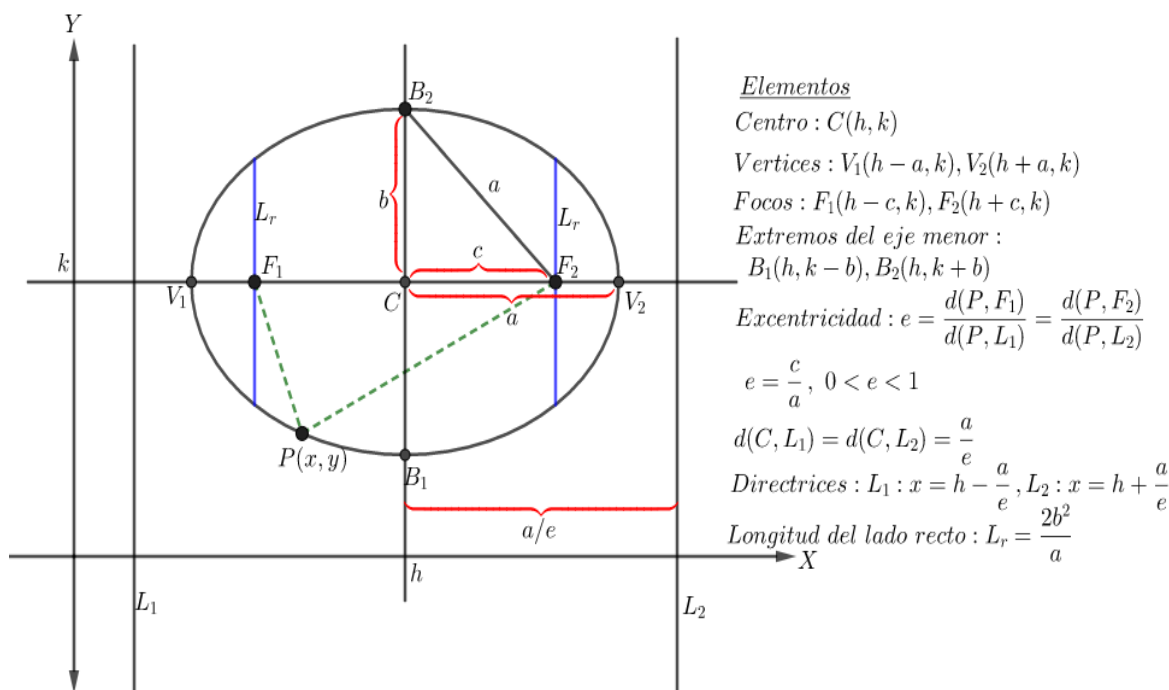
Luego tenemos que:

$$\mathcal{E} = \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 / d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$



C : Centro
 V_1, V_2 : Vértices
 F_1, F_2 : Focos
 $\overline{V_1V_2}$: Eje mayor o eje focal
 $\overline{B_1B_2}$: Eje menor
 L_1, L_2 : Rectas directrices
 $d(C, V_1) = d(C, V_2) = a$
 $d(C, B_1) = d(C, B_2) = b$
 $d(C, F_1) = d(C, F_2) = c$
 $a^2 = b^2 + c^2$

Ecuación ordinaria o por traslación de la elipse horizontal



De la definición tenemos $\mathcal{E} = \{P(x, y) \in R^2 / d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x - (h - c))^2 + (y - k)^2} + \sqrt{(x - (h + c))^2 + (y - k)^2} = 2a$$

$$\sqrt{((x - h) + c)^2 + (y - k)^2} + \sqrt{((x - h) - c)^2 + (y - k)^2} = 2a$$

$$\sqrt{((x - h) - c)^2 + (y - k)^2} = 2a - \sqrt{((x - h) + c)^2 + (y - k)^2}$$

Elevando al cuadrado obtenemos

$$((x - h) - c)^2 + (y - k)^2$$

$$= 4a^2 - 4a\sqrt{((x - h) + c)^2 + (y - k)^2} + ((x - h) + c)^2 + (y - k)^2$$

$$((x - h) - c)^2 - ((x - h) + c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{((x - h) + c)^2 + (y - k)^2}$$

$$-4c(x - h) = 4a^2 - 4a\sqrt{((x - h) + c)^2 + (y - k)^2}$$

$$-4c(x - h) - 4a^2 = -4a\sqrt{((x - h) + c)^2 + (y - k)^2}$$

$$c(x - h) + a^2 = a\sqrt{((x - h) + c)^2 + (y - k)^2}$$

Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned}
 (c(x-h) + a^2)^2 &= a^2 \left(((x-h) + c)^2 + (y-k)^2 \right) \\
 c^2(x-h)^2 + 2ca^2(x-h) + a^4 &= a^2[(x-h)^2 + 2c(x-h) + c^2 + y^2 - 2yk + k^2] \\
 c^2(x-h)^2 + 2ca^2(x-h) + a^4 &= a^2(x-h)^2 + 2ca^2(x-h) + a^2c^2 + a^2y^2 - 2ka^2y + a^2k^2 \\
 c^2(x-h)^2 + a^4 &= a^2(x-h)^2 + a^2c^2 + a^2y^2 - 2ka^2y + a^2k^2 \\
 a^4 - a^2c^2 &= a^2(x-h)^2 - c^2(x-h)^2 + a^2y^2 - 2ka^2y + a^2k^2 \\
 a^2(a^2 - c^2) &= (x-h)^2(a^2 - c^2) + a^2(y^2 - 2ky + k^2) \\
 a^2(a^2 - c^2) &= (x-h)^2(a^2 - c^2) + a^2(y-k)^2
 \end{aligned}$$

Pero de $a^2 = b^2 + c^2$ (ver el gráfico), deducimos que $b^2 = a^2 - c^2$ y reemplazando obtenemos:

$$a^2b^2 = b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2$$

Dividiendo entre a^2b^2

$$\begin{aligned}
 \frac{a^2b^2}{a^2b^2} &= \frac{b^2(x-h)^2}{a^2b^2} + \frac{a^2(y-k)^2}{a^2b^2} \\
 1 &= \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} \\
 \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} &= 1
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}: \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Ecuación ordinaria horizontal de la elipse

Observación: Si el centro de la elipse es el origen, $C(h, k) = (0,0)$

Entonces la ecuación de la elipse se llama **Canónica**, y se reduce a:

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

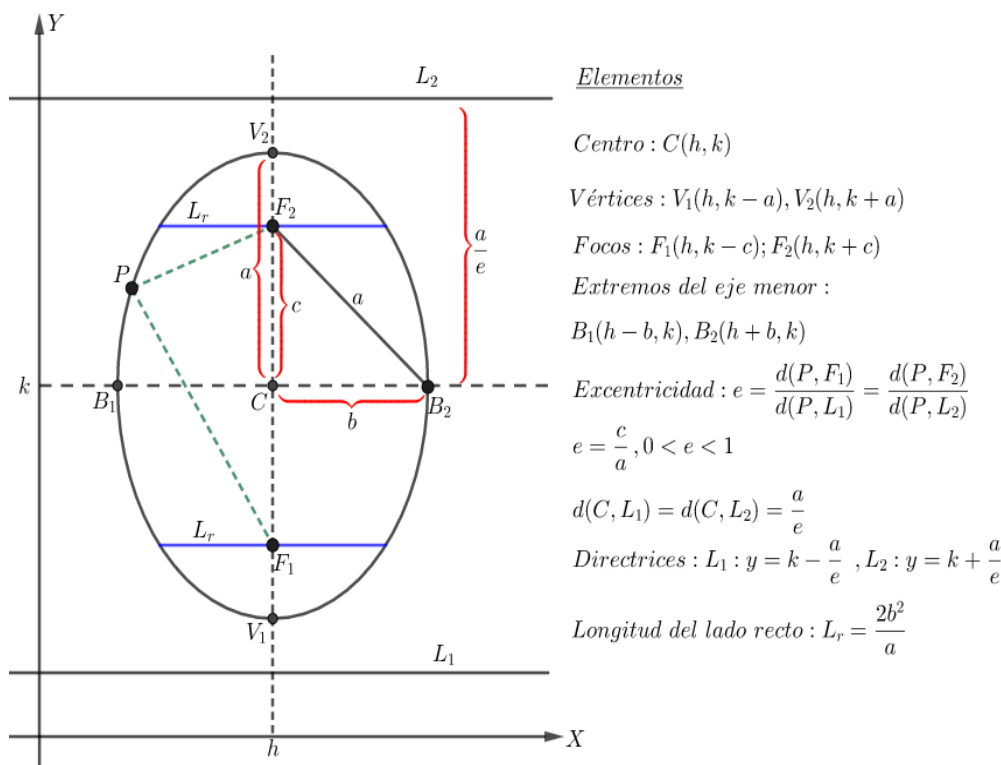
Vértices: $V_1(-a, 0)$, $V_2(a, 0)$

Focos: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$

Extremos del eje menor: $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$

Directrices: $L_1: x = -\frac{a}{e}$, $L_2: x = \frac{a}{e}$

Ecuación ordinaria o por traslación de la elipse vertical



De la definición tenemos $\mathcal{E} = \{P(x, y) \in R^2 / d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - (k - c))^2} + \sqrt{(x - h)^2 + (y - (k + c))^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x - h)^2 + ((y - k) + c))^2} + \sqrt{(x - h)^2 + ((y - k) - c))^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x - h)^2 + ((y - k) - c))^2} = 2a - \sqrt{(x - h)^2 + ((y - k) + c))^2}$$

Elevando al cuadrado obtenemos

$$(x - h)^2 + ((y - k) - c))^2$$

$$= 4a^2 - 4a\sqrt{(x - h)^2 + ((y - k) + c))^2} + (x - h)^2 + ((y - k) + c))^2$$

$$\begin{aligned}
((y-k)-c)^2 - ((y-k)+c)^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + ((y-k)+c)^2} \\
-4c(y-k) &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + ((y-k)+c)^2} \\
-4c(y-k) - 4a^2 &= -4a\sqrt{(x-h)^2 + ((y-k)+c)^2} \\
c(y-k) + a^2 &= a\sqrt{(x-h)^2 + ((y-k)+c)^2}
\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned}
(c(y-k) + a^2)^2 &= a^2 \left((x-h)^2 + ((y-k)+c)^2 \right) \\
c^2(y-k)^2 + 2ca^2(y-k) + a^4 &= a^2[(x-h)^2 + (y-k)^2 + 2c(y-k) + c^2] \\
c^2(y-k)^2 + 2ca^2(y-k) + a^4 &= a^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 + 2ca^2(y-k) + a^2c^2 \\
c^2(y-k)^2 + a^4 &= a^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 + a^2c^2 \\
a^4 - a^2c^2 &= a^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 - c^2(y-k)^2 \\
a^2(a^2 - c^2) &= a^2(x-h)^2 + (y-k)^2(a^2 - c^2)
\end{aligned}$$

Pero sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$ (ver el gráfico), entonces $b^2 = a^2 - c^2$ y reemplazando obtenemos:

$$a^2b^2 = a^2(x-h)^2 + b^2(y-k)^2$$

Dividiendo entre a^2b^2

$$\begin{aligned}
\frac{a^2b^2}{a^2b^2} &= \frac{a^2(x-h)^2}{a^2b^2} + \frac{b^2(y-k)^2}{a^2b^2} \\
1 &= \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} \\
\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} &= 1
\end{aligned}$$

$$\mathcal{E}: \frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Ecuación ordinaria vertical de la elipse

Observación: Si el centro de la elipse es el origen, $C(h, k) = (0,0)$

Entonces la ecuación de la elipse se llama **Canónica**, y se reduce a:

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Vértices: $V_1(0, -a)$, $V_2(0, a)$

Focos: $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$

Extremos del eje menor: $B_1(-b, 0)$, $B_2(b, 0)$

Directrices: $L_1: y = -\frac{a}{e}$, $L_2: y = \frac{a}{e}$

Ecuación general de la elipse

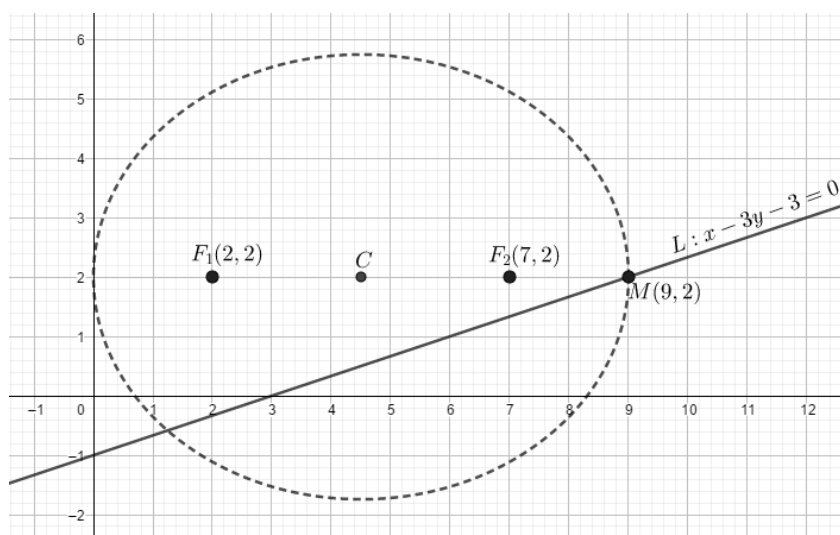
La ecuación $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, donde los coeficientes A y B son del mismo signo, representa una elipse de ejes paralelos a los ejes coordenados, o bien un punto o no representa ningún lugar geométrico real.

Ejemplos

1. Los focos de una elipse son $(2,2)$ y $(7,2)$. Hallar la ecuación de la elipse, si uno de los vértices esta sobre la recta: $L: x - 3y - 3 = 0$

Resolución

Con los datos que nos dan, hacemos un bosquejo de la gráfica



Como podemos observar del gráfico, se trata de una elipse horizontal, por lo que usaremos la ecuación ordinaria horizontal:

$$\mathcal{E}: \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Donde el centro $C = \frac{F_1+F_2}{2} \Rightarrow C(h, k) = \frac{1}{2}[(2,2) + (7,2)]$

$$C(h, k) = \frac{1}{2}(9,4) = \left(\frac{9}{2}, 2\right)$$

$$C(h, k) = \left(\frac{9}{2}, 2\right)$$

Además, tenemos el punto $M(9,2)$ que pertenece al eje focal, luego

$$d(M, C) = a \Rightarrow a = \sqrt{\left(9 - \frac{9}{2}\right)^2 + (2 - 2)^2}$$

$$a = \frac{9}{2}$$

De igual forma $d(F_1, C) = c \Rightarrow \sqrt{\left(2 - \frac{9}{2}\right)^2 + (2 - 2)^2} = c$

$$c = \frac{5}{2}$$

Luego de $a^2 = b^2 + c^2$, tenemos $\left(\frac{9}{2}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$

$$b^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$b^2 = \frac{56}{4}$$

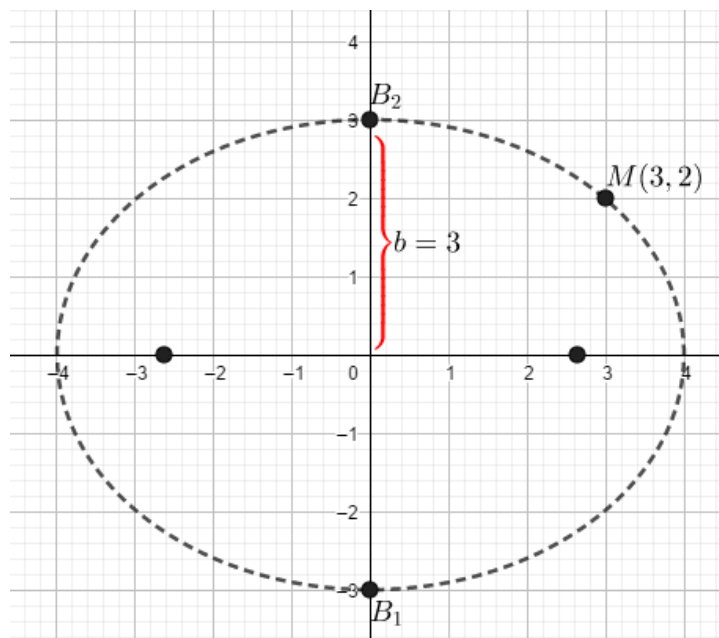
Así tenemos la ecuación ordinaria horizontal de la elipse:

$$\mathcal{E}: \frac{\left(x - \frac{9}{2}\right)^2}{\frac{81}{4}} + \frac{(y - 2)^2}{\frac{56}{4}} = 1$$

- Determinar la ecuación de una elipse con el eje horizontal y centro en el origen, que pasa por el punto $M(3,2)$ y cuyo eje menor mide 6 unidades.

Resolución

Con los datos que nos dan, hacemos un bosquejo de la gráfica



Como podemos observar en el grafico se trata de una elipse canónica horizontal,

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Pero tenemos $M(3,2) \in \mathcal{E} \Rightarrow \frac{3^2}{a^2} + \frac{2^2}{9} = 1$

$$\frac{9}{a^2} + \frac{4}{9} = 1$$

$$\frac{9}{a^2} = 1 - \frac{4}{9}$$

$$\frac{9}{a^2} = \frac{5}{9}$$

$$a^2 = \frac{81}{5}$$

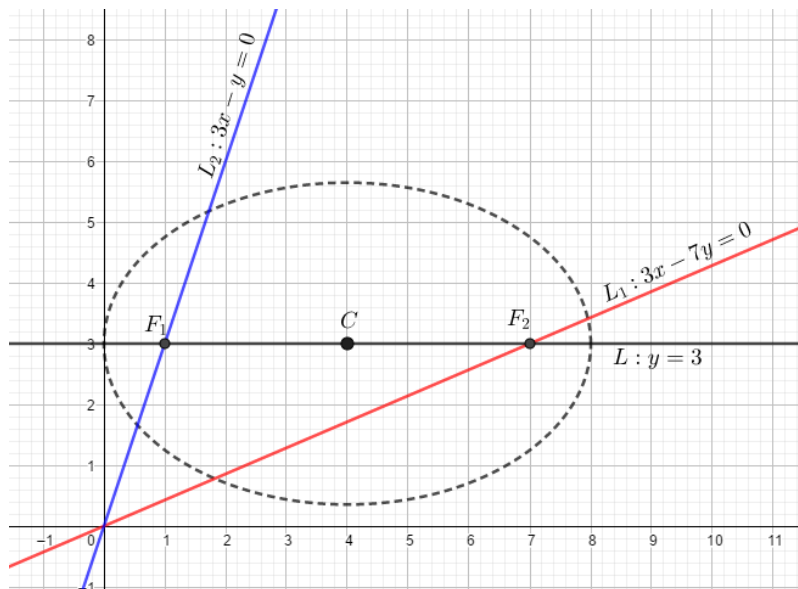
Luego tenemos

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{\frac{81}{5}} + \frac{y^2}{9} = 1$$

3. Los focos de una elipse están sobre las rectas $L_1: 3x - 7y = 0$ y $L_2: 3x - y = 0$, el eje focal es la recta $L: y = 3$. Hallar la ecuación de dicha elipse, si su eje mayor mide 8 unidades.

Resolución

Con los datos, hacemos un bosquejo de la gráfica



Del grafico $F_1(x, 3) \in L_2 \Rightarrow 3x - 3 = 0$

$$\Rightarrow x = 1$$

Así tenemos $F_1(1, 3)$

Del grafico $F_2(x, 3) \in L_1 \Rightarrow 3x - 7(3) = 0$

$$\Rightarrow 3x = 21$$

$$x = 7$$

Así tenemos $F_2(7, 3)$

Luego el centro: $C = \frac{F_1 + F_2}{2} \Rightarrow C(h, k) = \frac{1}{2}[(1, 3) + (7, 3)]$

$$C(h, k) = \frac{1}{2}(8, 6) = (4, 3)$$

$$C(h, k) = (4, 3)$$

Por otro lado $|CF_1| = |CF_2| = c = 3$, del grafico $a = 4$

Ahora de $a^2 = b^2 + c^2$, tenemos $4^2 = b^2 + 3^2$

$$b^2 = 16 - 9 = 7$$

$$b^2 = 7$$

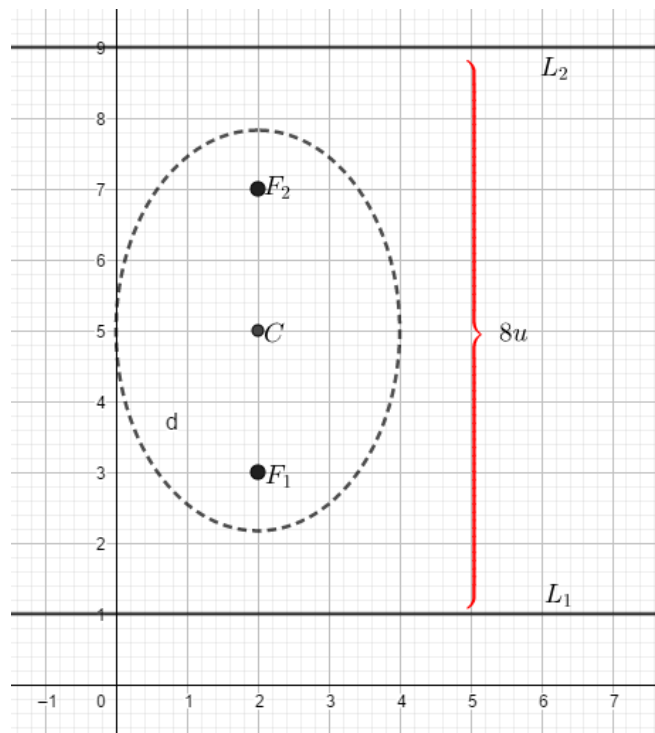
Así tenemos

$$\mathcal{E}: \frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{7} = 1$$

4. La distancia entre las directrices de una elipse es $8u$. Hallar la ecuación si los focos son $(2,3)$ y $(2,7)$

Resolución

Con los datos, hacemos un bosquejo de la gráfica



Como tenemos los focos, encontramos el centro de la elipse

$$C = \frac{F_1 + F_2}{2} \Rightarrow C(h, k) = \frac{1}{2}[(2, 3) + (2, 7)]$$

$$C(h, k) = \frac{1}{2}(4, 10) = (2, 5)$$

$$C(h, k) = (2, 5)$$

Por otro lado, tenemos que $d(L_1, L_2) = 8 \Rightarrow \frac{a}{e} = 4$

También de la gráfica $|\overline{CF_1}| = |\overline{CF_2}| = c = 2$

Ahora de $\frac{a}{e} = 4$, pero $e = \frac{c}{a}$ luego tenemos que:

$$\frac{a}{e} = \frac{a}{\frac{c}{a}} = 4$$

$$\frac{a^2}{c} = 4$$

$$\frac{a^2}{2} = 4$$

$$a^2 = 8$$

Luego de $a^2 = b^2 + c^2$, tenemos $8 = b^2 + 2^2$

$$b^2 = 8 - 4 = 4$$

$$b^2 = 4$$

Así tenemos la ecuación ordinaria vertical de la elipse

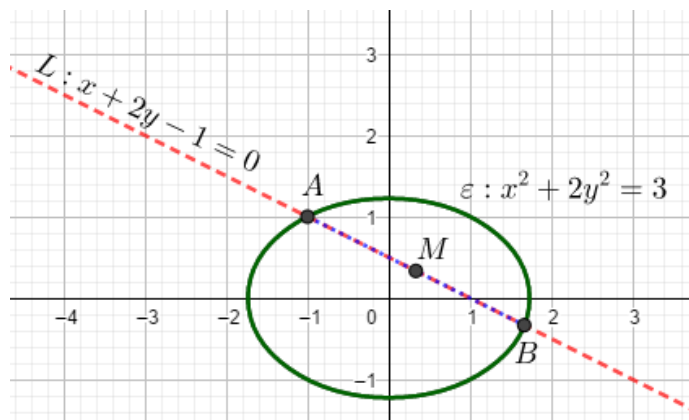
$$\mathcal{E}: \frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

$$\mathcal{E}: \frac{(y - 5)^2}{8} + \frac{(x - 2)^2}{4} = 1$$

5. Hallar las coordenadas del punto medio de la cuerda que intercepta la recta $L: x + 2y - 1 = 0$ en la elipse de ecuación $\mathcal{E}: x^2 + 2y^2 = 3$.

Resolución

Bosquejando la recta y la elipse en una gráfica



Para encontrar los puntos de intersección tenemos que resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 & (1) \\ x^2 + 2y^2 = 3 & (2) \end{cases}$$

De la ecuación (1) obtenemos $x = 1 - 2y$, ahora reemplazamos en (2)

$$\begin{aligned} (1 - 2y)^2 + 2y^2 &= 3 \\ 1 - 4y + 4y^2 + 2y^2 &= 3 \\ 6y^2 - 4y - 2 &= 0 \\ 3y^2 - 2y - 1 &= 0 \\ (3y + 1)(y - 1) &= 0 \\ 3y + 1 = 0 \vee y - 1 = 0 \\ y = -\frac{1}{3} \vee y &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{Ahora si } y = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = 1 - 2\left(-\frac{1}{3}\right); x = \frac{5}{3}$$

$$\text{si } y = 1 \Rightarrow x = 1 - 2(1); x = -1$$

luego tenemos los puntos de intersección:

$$A(-1,1) \text{ y } B\left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Luego el punto medio que forma la cuerda $\overline{AB}$ será:

$$\begin{aligned} M &= \frac{A + B}{2} \\ M &= \frac{(-1,1) + \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)}{2} \\ M &= \frac{\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)}{2} \\ M &= \left(\frac{2}{6}, \frac{2}{6}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

6. Hallar las rectas directrices de la elipse de la ecuación

$$4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0$$

Resolución

Como tenemos la ecuación general de la elipse, completaremos cuadrados para transformar la ecuación a ordinaria.

$$4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0$$

$$4x^2 - 16x + 9y^2 + 54y + 61 = 0$$

$$4(x^2 - 4x) + 9(y^2 + 6y) + 61 = 0$$

$$4[(x - 2)^2 - 4] + 9[(y + 3)^2 - 9] + 61 = 0$$

$$4(x - 2)^2 - 16 + 9(y + 3)^2 - 81 + 61 = 0$$

$$4(x - 2)^2 + 9(y + 3)^2 = 36$$

$$\frac{4}{36}(x - 2)^2 + \frac{9}{36}(y + 3)^2 = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y + 3)^2}{4} = 1$$

De donde podemos deducir que:

$$C(h, k) = (2, -3)$$

$$a = 3 \text{ y } b = 2$$

Luego de $a^2 = b^2 + c^2$, tenemos $3^2 = 2^2 + c^2$

$$\text{entonces } c = \sqrt{5}, \text{ y } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Así tenemos las rectas directrices:

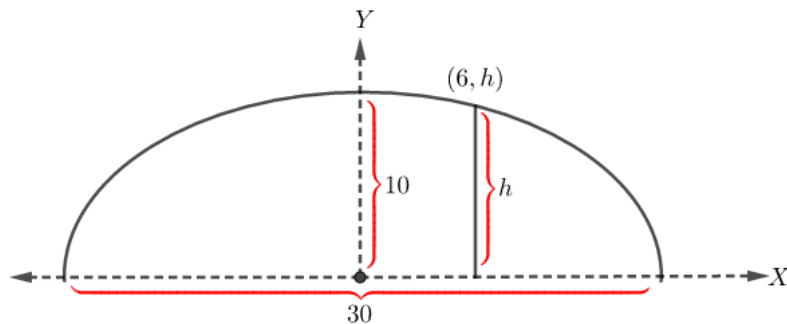
$$L_1: x = h - \frac{a}{e} = 2 - \frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \Rightarrow x = 2 - \frac{9}{\sqrt{5}}$$

$$L_2: x = h + \frac{a}{e} = 2 + \frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \Rightarrow x = 2 + \frac{9}{\sqrt{5}}$$

7. Un arco de un puente tiene forma semielíptica con eje mayor horizontal, la base del arco mide 30 *pies* y la parte más alta esta 10 *pies* por encima de la carretera horizontal que pasa por debajo del puente. Calcular la altura del arco sobre el punto del suelo que está a 6 *pies* del centro.

Resolución

Adaptamos los datos en el plano cartesiano haciendo coincidir el centro de la elipse con el origen del plano, por lo que bosquejamos una gráfica:



Del grafico nos sugiere que usaremos la ecuación canónica horizontal de la elipse

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Pero $a = 15$ y $b = 10$, entonces tenemos la ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{(15)^2} + \frac{y^2}{(10)^2} = 1$$

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{100} = 1$$

Pero tenemos $(6, h) \in \mathcal{E} \Rightarrow \frac{6^2}{225} + \frac{h^2}{100} = 1$

$$\frac{h^2}{100} = 1 - \frac{36}{225}$$

$$\frac{h^2}{100} = \frac{189}{225}$$

$$\frac{h^2}{4} = \frac{189}{9}$$

$$\frac{h^2}{4} = 21$$

$$h^2 = 84$$

$$h = \pm 2\sqrt{21}$$

para nuestro contexto $h = 2\sqrt{21}$

Ejercicios

1. Hallar la ecuación canónica de la elipse con focos en el eje X, la longitud del eje mayor igual a 7 veces la longitud del eje menor y que pasa por el punto (4,4).

2. Hallar la ecuación de la elipse cuya suma de las distancias de un punto P de la elipse a los focos $F_1(-4, -5)$ y $F_2(6, -5)$ es igual a 16.
3. Determinar la ecuación de la elipse de centro $C(2, -3)$, eje mayor paralela a eje Y y de longitud 12, eje menor de longitud 8.
4. Un satélite viaja alrededor de la Tierra en una órbita elíptica, donde la Tierra es un foco y la excentricidad es $\frac{1}{3}$, la distancia más corta a la que se acerca el satélite a la Tierra es 300 millas. Encuentre la distancia mas grande a la que se aleja el satélite de la Tierra.
5. El arco de un puente en forma de semielipse tiene una extensión horizontal de 40 pies y una altura de 16 pies en su centro. ¿Qué altura tiene el arco a 9 pies hacia la derecha o izquierda del centro?
6. Hallar las coordenadas de los vértices y focos, el lado recto, la excentricidad y las ecuaciones de las directrices de la curva que represente cada ecuación dada:
 - a) $16x^2 + 25y^2 + 64x + 50y - 311 = 0$
 - b) $25x^2 + 9y^2 - 200x + 90y + 400 = 0$
 - c) $144x^2 + 169y^2 - 676y - 23660 = 0$
 - d) $9x^2 + 2y^2 - 18x - 16y + 59 = 0$
 - e) $8x^2 + 7y^2 + 96x + 70y + 463 = 0$
7. Los focos de una elipse son $(6,0)$ y $(10,0)$ respectivamente. La suma de las distancias del foco a cualquier punto $P(x, y)$ de la elipse, es 8. Hallar la ecuación de la elipse.
8. El arco de un puente tiene la forma de una semielipse; la luz es de 12 metros y la altura máxima es de 13 metros. Hallar la altura del arco sobre el punto del suelo que está a 1.5 metros del centro.
9. Encontrar la ecuación de la trayectoria de un punto $P(x, y)$ que se mueve de modo que su distancia a $(5,0)$ es la mitad de su distancia a la recta $x = 20$.
10. La órbita del cometa Halley es una elipse cuyo eje mayor tiene 3.34×10^9 millas de longitud, y cuyo eje menor tiene 8.5×10^8 millas de longitud. ¿Cuál es la excentricidad de a órbita del cometa?

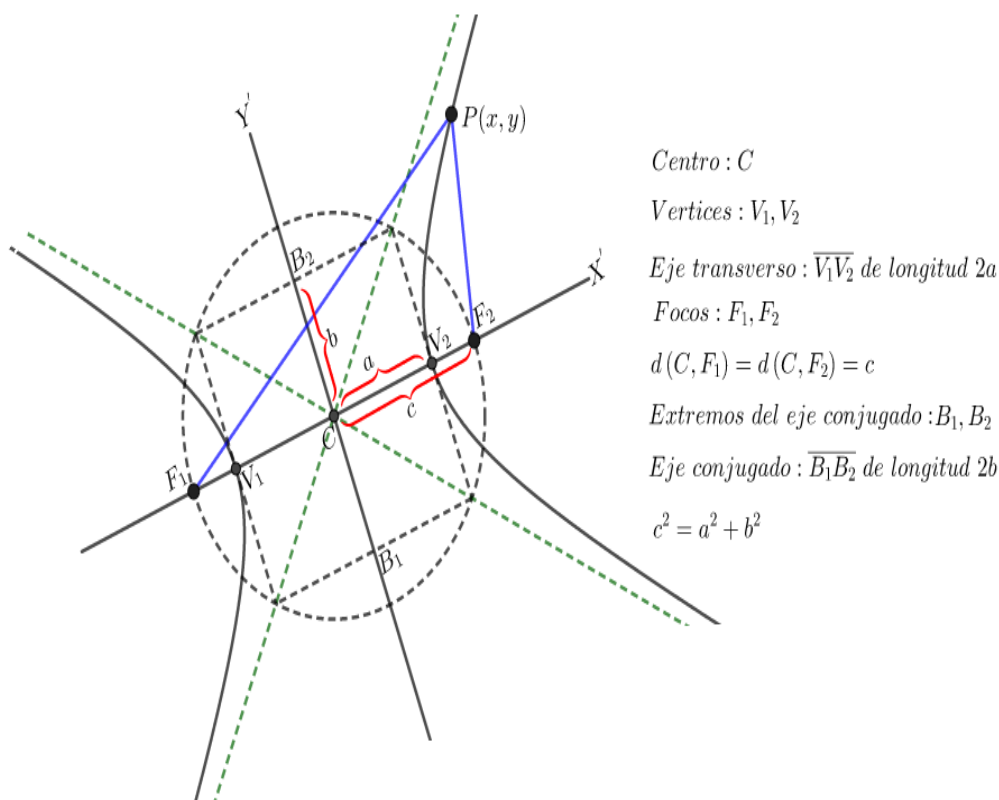
2.3.3 La Hipérbola

Dados dos puntos fijos F_1 y F_2 llamados focos, separados por una distancia $2c$, y dada una constante a tal que $0 < a < c$, se define la hipérbola como el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ tales que la diferencia de las distancias de P a los focos F_1 y F_2 en valor absoluto, es igual a $2a$, es decir:

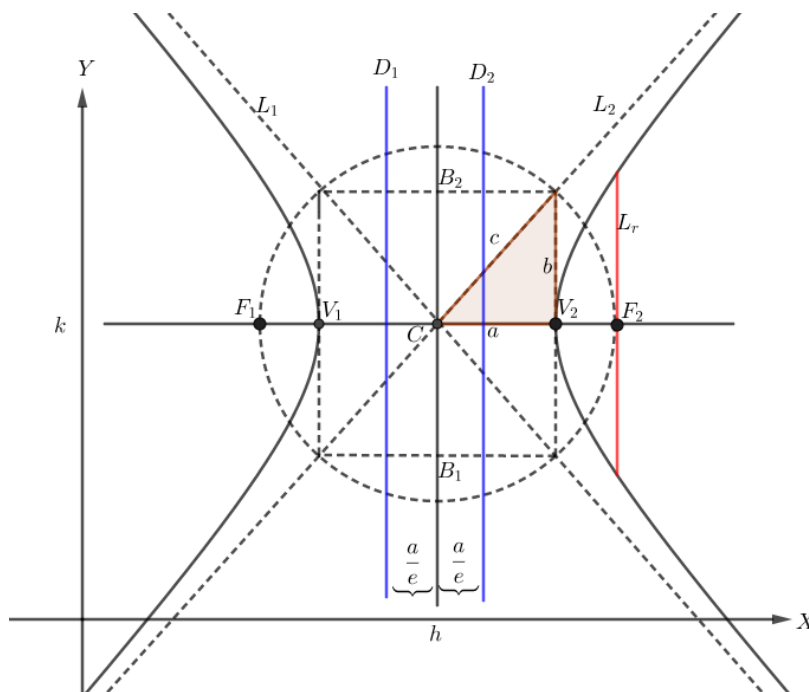
$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

Luego tenemos que:

$$\mathcal{H} = \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$$



Ecuación ordinaria o por traslación de la hipérbola horizontal



Elementos de la hipérbola horizontal

Centro: $C(h, k)$

Vértices: $V_1(h - a, k), V_2(h + a, k)$

Focos: $F_1(h - c, k), F_2(h + c, k)$

Extremos del eje conjugado: $B_1(h, k - b), B_2(h, k + b)$

Excentricidad: $e = \frac{d(P, F_1)}{d(P, D_1)} = \frac{d(P, F_2)}{d(P, D_2)}$

$e = \frac{c}{a}, e > 1; d(C, D_1) = d(C, D_2) = \frac{a}{e}$

Longitud del eje transverso: $d(V_1, V_2) = 2a$

Longitud del eje conjugado: $d(B_1, B_2) = 2b$

Longitud del lado recto: $L_r = \frac{2b^2}{a}$

Directrices: $D_1: x = h - \frac{a}{e}, D_2: x = h + \frac{a}{e}$

Asíntotas: $L_1: y = k - \frac{b}{a}(x - h), L_2: y = k + \frac{b}{a}(x - h)$

Para determinar la ecuación de la hipérbola, partiremos de la definición

$$\mathcal{H} = \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$$

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

$$\left| \sqrt{(x - (h - c))^2 + (y - k)^2} - \sqrt{(x - (h + c))^2 + (y - k)^2} \right| = 2a$$

$$\sqrt{(x - (h - c))^2 + (y - k)^2} - \sqrt{(x - (h + c))^2 + (y - k)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x - (h - c))^2 + (y - k)^2} = 2a + \sqrt{(x - (h + c))^2 + (y - k)^2}$$

Elevando al cuadrado

$$(x - (h - c))^2 + (y - k)^2 =$$

$$4a^2 + 4a\sqrt{(x - (h + c))^2 + (y - k)^2} + (x - (h + c))^2 + (y - k)^2$$

$$(x - (h - c))^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x - (h + c))^2 + (y - k)^2} + (x - (h + c))^2$$

$$((x - h) + c)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{((x - h) - c)^2 + (y - k)^2} + ((x - h) - c)^2$$

$$((x - h) + c)^2 - ((x - h) - c)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{((x - h) - c)^2 + (y - k)^2}$$

$$4c(x - h) = 4a^2 + 4a\sqrt{((x - h) - c)^2 + (y - k)^2}$$

$$c(x - h) - a^2 = a\sqrt{((x - h) - c)^2 + (y - k)^2}$$

Elevando al cuadrado nuevamente

$$c^2(x - h)^2 - 2ca^2(x - h) + a^4 = a^2 \left[((x - h) - c)^2 + (y - k)^2 \right]$$

$$c^2(x - h)^2 - 2ca^2(x - h) + a^4 =$$

$$a^2(x - h)^2 - 2ca^2(x - h) + a^2c^2 + a^2(y - k)^2$$

$$c^2(x - h)^2 + a^4 = a^2(x - h)^2 + a^2c^2 + a^2(y - k)^2$$

$$c^2(x - h)^2 - a^2(x - h)^2 - a^2(y - k)^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$(x - h)^2(c^2 - a^2) - a^2(y - k)^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

De $c^2 = a^2 + b^2$, tenemos que $b^2 = c^2 - a^2$

$$b^2(x - h)^2 - a^2(y - k)^2 = a^2b^2$$

$$\frac{b^2(x-h)^2}{a^2b^2} - \frac{a^2(y-k)^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\mathcal{H}: \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Ecuación ordinaria de la hipérbola horizontal

Observación: Si el centro de la hipérbola es el origen, $C(h, k) = (0, 0)$
Entonces la ecuación de la hipérbola se llama **Canónica**, y se reduce a:

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vértices: $V_1(-a, 0)$, $V_2(a, 0)$

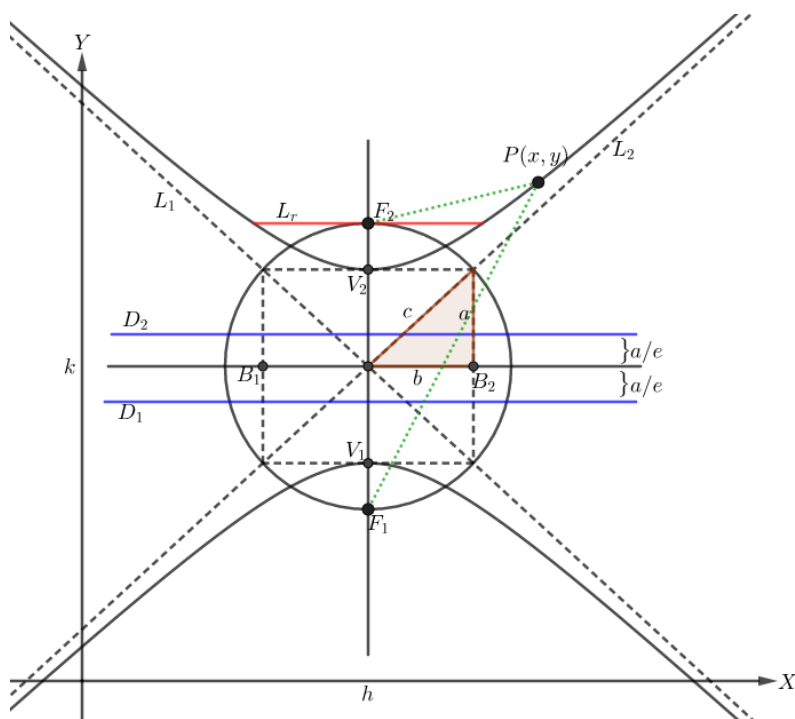
Focos: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$

Extremos del conjugado: $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$

Directrices: $D_1: x = -\frac{a}{e}$, $D_2: x = \frac{a}{e}$

Asíntotas: $L_1: y = -\frac{b}{a}x$, $L_2: y = \frac{b}{a}x$

Ecuación ordinaria o por traslación de la hipérbola vertical



Elementos de la hipérbola vertical

Centro: $C(h, k)$

Vértices: $V_1(h, k - a), V_2(h, k + a)$

Focos: $F_1(h, k - c), F_2(h, k + c)$

Extremos del eje conjugado: $B_1(h - b, k), B_2(h + b, k)$

Excentricidad: $e = \frac{d(P, F_1)}{d(P, D_1)} = \frac{d(P, F_2)}{d(P, D_2)}$

$e = \frac{c}{a}, e > 1; d(C, D_1) = d(C, D_2) = \frac{a}{e}$

Longitud del eje transverso: $d(V_1, V_2) = 2a$

Longitud del eje conjugado: $d(B_1, B_2) = 2b$

Longitud del lado recto: $L_r = \frac{2b^2}{a}$

Directrices: $D_1: y = k - \frac{a}{e}, D_2: y = k + \frac{a}{e}$

Asíntotas: $L_1: y = k - \frac{a}{b}(x - h), L_2: y = k + \frac{a}{b}(x - h)$

Para determinar la ecuación de la hipérbola, se parte de la definición

$$\mathcal{H} = \{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$$

Y se desarrolla de la misma forma que se hizo para encontrar la ecuación ordinaria de la hipérbola horizontal, llegando a:

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

$$\mathcal{H}: \frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

Ecuación ordinaria de la hipérbola vertical

Observación: Si el centro de la hipérbola es el origen, $C(h, k) = (0, 0)$

Entonces la ecuación de la hipérbola se llama **Canónica**, y se reduce a:

$$\mathcal{H}: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Vértices: $V_1(0, -a)$, $V_2(0, a)$

Focos: $F_1(0, -c)$, $F_2(0, c)$

Extremos del conjugado: $B_1(-b, 0)$, $B_2(b, 0)$

Directrices: $D_1: y = -\frac{a}{e}$, $D_2: y = \frac{a}{e}$

Asíntotas: $L_1: y = -\frac{a}{b}x$, $L_2: y = \frac{a}{b}x$

Ecuación general de la hipérbola

La ecuación de una hipérbola puede expresarse de la siguiente manera.

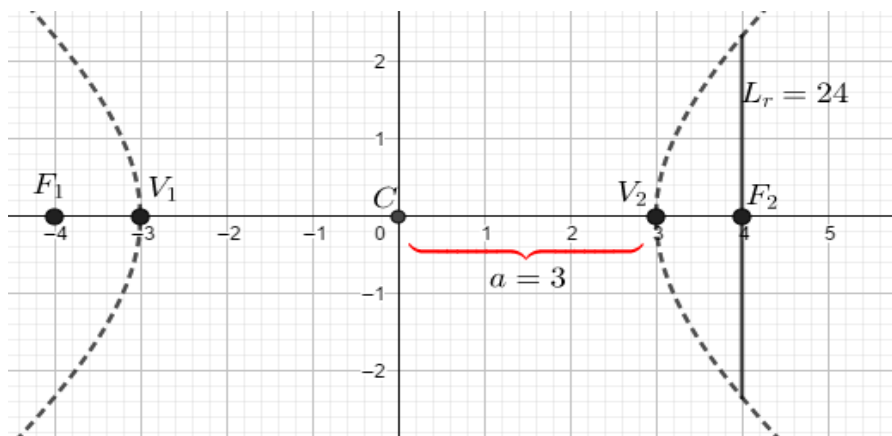
$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, donde: A y B tienen signos diferentes y son también diferentes de cero. Si la ecuación de una hipérbola está expresada de manera general, se puede obtener la ecuación ordinaria utilizando el método de completar cuadrados.

Ejemplos

1. Hallar la ecuación de la hipérbola con vértice $(\pm 3, 0)$ y lado recto igual a 24.

Resolución

Con los datos, hacemos un bosquejo de la gráfica que nos dará la idea si la hipérbola es horizontal o vertical



Como podemos observar en el grafico se trata de una hipérbola canónica horizontal, cuya ecuación es:

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como $a = 3$ tenemos:

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Para encontrar b , usamos el dato que $L_r = \frac{2b^2}{a} = 24$

$$\frac{2b^2}{3} = 24 \Rightarrow b^2 = 36$$

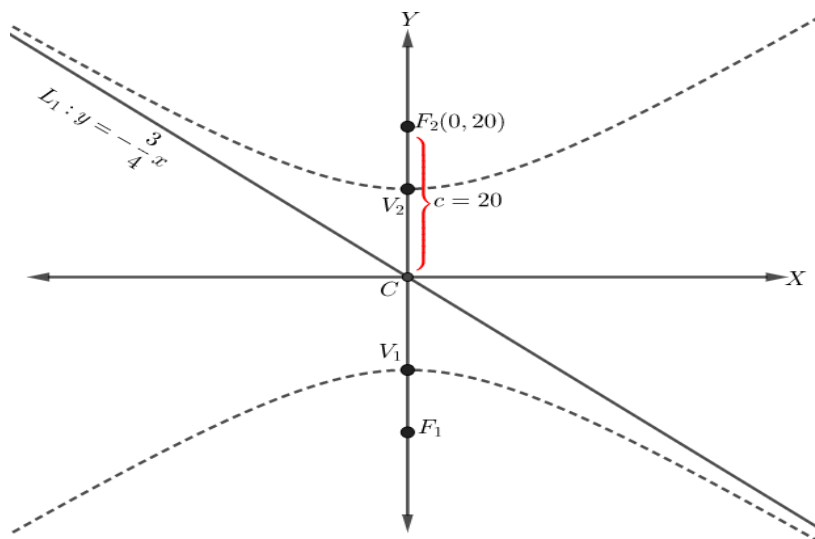
Luego tenemos:

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$$

2. Hallar la ecuación de una hipérbola, si una asíntota es $3x + 4y = 0$ y un foco es $(0,20)$

Resolución

Con los datos, hacemos un bosquejo de la gráfica que nos dará la idea si la hipérbola es horizontal o vertical



Como podemos observar en el gráfico se trata de una hipérbola canónica vertical, cuya ecuación es:

$$\mathcal{H}: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Sabemos que $d(C, F_2) = c = 20$, tenemos por dato una recta asíntota,

$$L_1: y = -\frac{3}{4}x$$

Comparándolo con la ecuación de la recta asíntota $L_1: y = -\frac{a}{b}x$

Así tenemos

$$\frac{3k}{4k} = \frac{a}{b}$$

$$a = 3k \text{ y } b = 4k$$

$$\text{De } c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow (20)^2 = 9k^2 + 16k^2$$

$$400 = 25k^2$$

$$k^2 = 16$$

$$k = 4$$

Luego $a = 12$ y $b = 16$

Así la ecuación canónica de la hipérbola vertical $\mathcal{H}: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, en nuestro caso es:

$$\mathcal{H}: \frac{y^2}{12^2} - \frac{x^2}{16^2} = 1$$

$$\mathcal{H}: \frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{256} = 1$$

3. Hallar su centro, focos, lado recto, excentricidad y graficar la hipérbola: $16x^2 - 9y^2 + 96x - 36y - 36 = 0$

Resolución

Como tenemos la ecuación general de la hipérbola, completaremos cuadrados para transformar la ecuación a ordinaria

$$\begin{aligned} 16x^2 - 9y^2 + 96x - 36y - 36 &= 0 \\ 16x^2 + 96x - 9y^2 - 36y - 36 &= 0 \\ 16(x^2 + 6x) - 9(y^2 + 4y) - 36 &= 0 \\ 16[(x + 3)^2 - 9] - 9[(y + 2)^2 - 4] - 36 &= 0 \\ 16(x + 3)^2 - 144 - 9(y + 2)^2 + 36 - 36 &= 0 \\ 16(x + 3)^2 - 9(y + 2)^2 &= 144 \end{aligned}$$

$$\frac{16(x + 3)^2}{144} - \frac{9(y + 2)^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{(x + 3)^2}{9} - \frac{(y + 2)^2}{16} = 1$$

$$\frac{(x + 3)^2}{3^2} - \frac{(y + 2)^2}{4^2} = 1$$

Deducimos entonces que $a = 3$, $b = 4 \Rightarrow c^2 = 3^2 + 4^2$

$$c = 5$$

Luego tenemos:

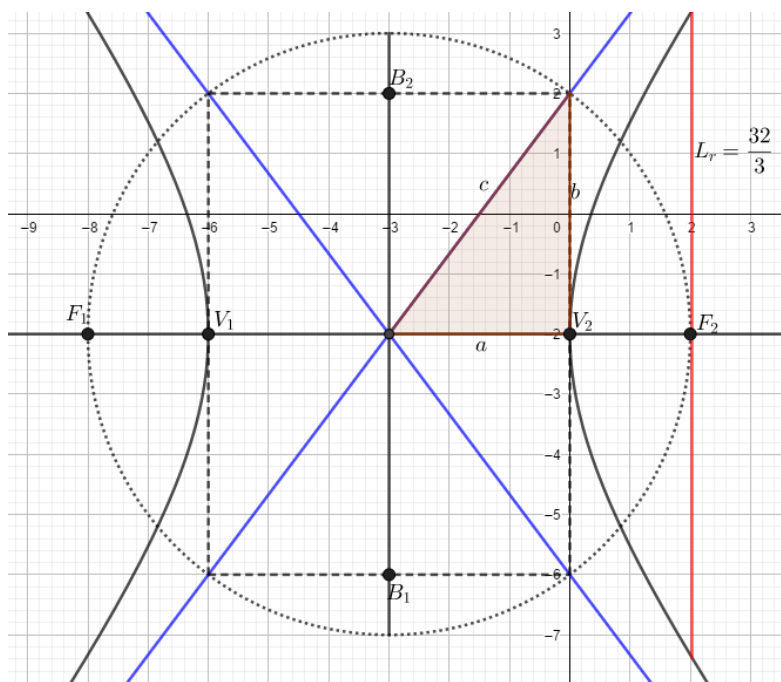
$$\text{Centro: } C(h, k) = (-3, -2)$$

$$\text{Focos: } F_1(h - c, k) = (-3 - 5, -2) \Rightarrow F_1(-8, -2),$$

$$F_2(h + c, k) = (-3 + 5, -2) \Rightarrow F_2(2, -2)$$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$

Longitud del lado recto: $L_r = \frac{2b^2}{a} = \frac{32}{3}$



4. Los extremos del eje conjugado de una hipérbola con los puntos $(0, \pm 3)$ y la longitud de cada lado recto es 6. Hallar la ecuación de la hipérbola y su excentricidad.

Resolución

Con los extremos del eje conjugado que nos dan como datos $B_1(0, -3)$ y $B_2(0, 3)$, tenemos que $b = 3$ y podemos notar que la ecuación de la hipérbola que queremos encontrar es la canónica horizontal

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Además, tenemos como dato la longitud del lado recto

$$L_r = \frac{2b^2}{a} = 6$$

$$\frac{2(3)^2}{a} = 6 \Rightarrow a = 3$$

Luego tenemos

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$$

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Para encontrar la excentricidad usamos el hecho $c^2 = a^2 + b^2$

$$c^2 = 3^2 + 3^2$$

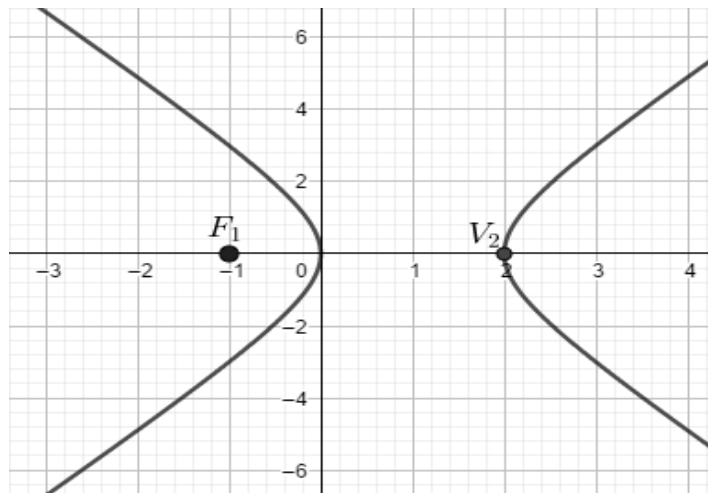
$$c^2 = 18$$

$$c = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Luego la excentricidad es: $e = \frac{3\sqrt{2}}{3}$

$$e = \sqrt{2}$$

5. Encontrar la ecuación de la hipérbola que satisface las condiciones dada en el grafico



Resolución

Según el grafico nos dan el foco $F_1(-1,0)$ y el vertice $V_2(2,0)$, pero del gráfico podemos deducir el centro de la hipérbola, $C(1,0)$, luego tenemos:

$$|\overline{CV_2}| = a = 1$$

$$|\overline{CF_1}| = c = 2$$

De $c^2 = a^2 + b^2$, tenemos $4 = 1 + b^2 \Rightarrow b^2 = 3$

$$b = \sqrt{3}$$

Así tenemos de la ecuación ordinaria de la hipérbola horizontal,

$$\mathcal{H}: \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\mathcal{H}: \frac{(x-1)^2}{1} - \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$$

$$\mathcal{H}: (x-1)^2 - \frac{y^2}{3} = 1$$

Ejercicios

- Hallar la ecuación de una hipérbola que tiene como Focos $(0, \pm 4)$ y Vértices $(0, \pm 1)$
- Hallar la ecuación de la hipérbola con Focos $(\pm 4, 0)$ y rectas directrices $x = \pm 1$
- Determinar el centro, focos, lado recto, excentricidad y graficar la hipérbola:
 - $y^2 - 3x^2 - 6y = 0$
 - $16x^2 - 9y^2 - 64x + 54y - 161 = 0$
 - $16x^2 - 9y^2 + 96x - 36y + 252 = 0$
- Los vértices de una hipérbola son los puntos $(0, \pm 4)$ y su excentricidad es $\frac{3}{2}$. Hallar la ecuación de la hipérbola y las coordenadas de sus focos.
- Para cada una de las ecuaciones de las hipérbolas dadas, hallar las coordenadas de los vértices y los focos, la longitud del semilado recto, la excentricidad, las ecuaciones de las directrices y las de las asíntotas. Trazar la curva de la hipérbola.
 - $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$
 - $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$
 - $x^2 - y^2 = 16$
 - $4y^2 - 3x^2 = 48$
 - $64y^2 - 225x^2 - 14400 = 0$
 - $16x^2 - 9y^2 - 2304 = 0$
- Los focos de una hipérbola están en $(-8, 1)$ y $(10, 1)$ respectivamente, la diferencia de las distancias de un punto $P(x, y)$ de la hipérbola a los focos, es igual a 6. Hallar la ecuación de la hipérbola.

7. El eje conjugado de una hipérbola mide 8 y coincide con el eje Y y las ecuaciones de las asíntotas son $y = \pm \frac{2}{3}x$. Hallar la ecuación de la hipérbola, sus ejes, focos y vértices.
8. Determinar la ecuación de la hipérbola cuyos focos están ubicados en las coordenadas $F_1(3, -4)$ y $F_2(3, 6)$, el eje transverso es 8 y su centro es $C(3, 1)$. Indicar su excentricidad, lado recto y escribe las ecuaciones de las asíntotas además trazar su gráfica.
9. El par de hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \wedge \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Se llaman **hipérbolas conjugadas**. Verificar que estas hipérbolas tienen las mismas asíntotas.

10. Los espejos hiperbólicos tienen la propiedad que cada rayo dirigido a un foco se refleja hacia el otro foco. El espejo de la figura tiene ecuación

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$$

¿En qué punto del espejo se reflejará la luz procedente del punto $(0, 10)$ hacia el otro foco?

