

CAPÍTULO I: NÚMEROS REALES

Introducción a la Teoría de Números reales

En la teoría de los números se agrupa distintos conjuntos como los naturales, enteros, racionales, irracionales, reales. Los números son entes abstractos desarrollados por el hombre como modelo que permite contar y medir.

1.1 Clasificación de los Conjuntos Numéricos:

Números Naturales $\mathbb{N}$

El conjunto de los números naturales es el conjunto de números que usamos para contar: Que se denota por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

En sentido estricto, este conjunto no contiene al cero; si se quiere incluir este elemento en el conjunto, se denota por $\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ (Llamados también enteros no negativos)

En este conjunto se puede definir operaciones de suma, resta, multiplicación y división, así como relaciones de orden (mayor que, menor que).

Números Enteros $\mathbb{Z}$

El conjunto de los números enteros se define como los números naturales, el cero, y los naturales dotados del signo negativo: Que se denota por

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

El conjunto $\mathbb{Z}$ incluye como subconjunto al de los números naturales; es decir:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

Los Números Racionales $\mathbb{Q}$

Es el conjunto de todos los números que se pueden expresar como el cociente de dos números enteros, donde el denominador es distinto de cero. Que se denota por $\mathbb{Q} = \{x/x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0\}$

Por ejemplo, tenemos $\frac{1}{5} = 0,2$

$$\frac{11}{3} = 3\frac{2}{3} = 3,66666666 \dots = 3,\hat{6}$$

Todos los números naturales y todos los números enteros también son números racionales. $N \subset Z \subset Q$

Números Irracionales $I (Q^c)$

Es el conjunto de todos los números que no se pueden expresar como el cociente de dos números enteros, donde el denominador es distinto de cero. Que se denota por $I = Q^c = \{x/x \neq \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0\}$

Ningún número racional es irracional y ningún número irracional es racional.

La expresión decimal de los números irracionales es infinita no periódica y por lo tanto, los números decimales infinitos no periódicos no pueden expresarse en forma de fracción y por tanto son irracionales.

Hay muchos números irracionales, como: $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5}; \dots; \pi = 3,14159\dots$,

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2,71828\dots$$

Números Reales R

La unión de los números racionales y los irracionales conforma un conjunto denominado de los números reales. Así, este conjunto engloba como subconjuntos a los de los números racionales e irracionales.

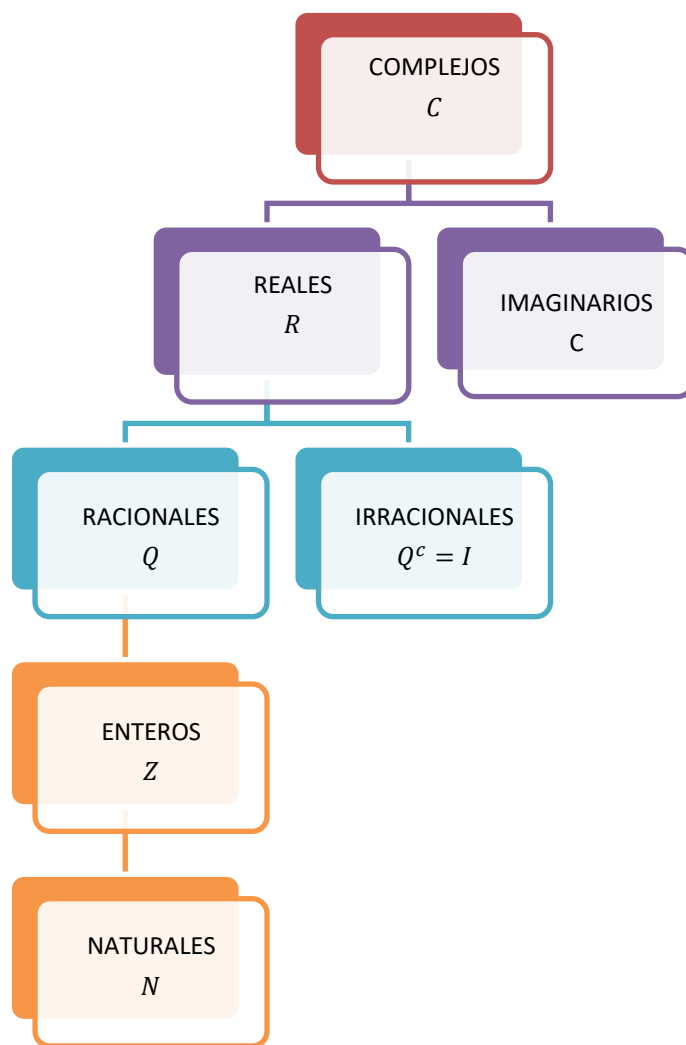
$$R = Q \cup Q^c$$

Números Complejos C

Son números que tienen una parte real y una parte imaginaria, que se denota como: $z = a + ib$, donde $i = \sqrt{-1}$, " a " es la parte real y " b " su parte imaginaria.

Por ejemplo, si $z = 2 - 3i$, 2 es la parte real de z y -3 su parte imaginaria.

Conjuntos Numéricos



1.2 Sistema de Números Reales

Es el conjunto de los números reales R , provisto de dos operaciones adición y multiplicación, denotada por:

$$\begin{aligned} (+): R \times R &\rightarrow R \\ (a,b) &\rightarrow a+b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (.): R \times R &\rightarrow R \\ (a,b) &\rightarrow a.b \end{aligned}$$

la relación de igualdad “=” y de una relación de orden menor “<” o mayor “>”, que satisface los axiomas siguientes:

Axiomas de Adición y Multiplicación

Si $a, b, c \in R$ entonces:

Axioma	Adición	Multiplicación	Qué dice	Ejemplo
Cerradura	$a + b \in R$	$a \cdot b \in R$	La suma o el producto de dos números reales es una operación cerrada.	$2 + 7 = 9 \in R$ $(-5)(-6) = 30 \in R$
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$	El orden al sumar o multiplicar reales no afecta el resultado.	$\frac{1}{2} + 7 = 7 + \frac{1}{2}$ $(-3)(6) = (6)(-3)$
Asociativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a(b \cdot c) = (a \cdot b)c$	Se puede hacer diferentes asociaciones al sumar o multiplicar reales y no afecta el resultado.	$\sqrt{2} + (2/3 + 5) = (\sqrt{2} + 2/3) + 5$ $7(3.5) = (7.3)5$
Elemento neutro	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$	Todo real sumado 0 se queda igual. Todo real multiplicado por 1 se queda igual.	$\pi + 0 = \pi$ $\sqrt{3} \cdot 1 = \sqrt{3}$
Inverso	$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1; a \neq 0$	La suma de opuestos es cero. El producto de recíprocos es 1.	$3 + (-3) = 0$ $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$
Distributiva	$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$		El factor se distribuye a cada sumando.	$7(\sqrt{2} + 8) = 7\sqrt{2} + 7 \cdot 8$

Axiomas de igualdad

Si $a, b, c \in R$ entonces:

Axioma	Igualdad	Qué dice	Ejemplo
Dicotomía	$a = b$ o $a \neq b$	Si se tiene dos números, estos son iguales o son diferentes.	$3=3$ $3 \neq 5$
Reflexividad	$a = a$	Un número es igual al mismo número.	$\sqrt{6} = \sqrt{6}$
Simetría	$Si\ a = b \rightarrow b = a$		$a = 7 \rightarrow 7 = a$
Transitividad	Si $a = b \wedge b = c$ $\rightarrow a = c$		$a = b \wedge b = 7 \rightarrow a = 7$
Unicidad de la adición	Si $a = b \rightarrow$ $a + c = b + c$	Si se tiene una igualdad, esta se mantiene si se suma a ambos miembros un mismo número.	$a = 6 \rightarrow a + 3 = 6 + 3$
Unicidad de la multiplicación	Si $a = b \rightarrow$ $a \cdot c = b \cdot c$	Si se tiene una igualdad, esta se mantiene si se multiplica a ambos miembros un mismo número.	$a = 5 \rightarrow a \cdot 4 = 5 \cdot 4$

Axiomas de Orden

Si $a, b, c \in R$ entonces:

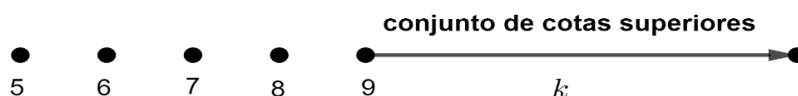
Axioma	Orden	ejemplo
Tricotomía	Uno y solo uno de los siguientes enunciados es verdadero $a < b$ $a = b$ $a > b$	$\sqrt{3} < 2$
Transitiva	Si $a < b \wedge b < c$ $\rightarrow a < c$	$a < 5 \wedge 5 < 7 \rightarrow a < 7$
Monotonía	Consistencia aditiva $Si a < b \rightarrow \forall c \in R, a + c < b + c$	$7 < 8 \rightarrow \forall c \in R,$ $7 + c < 8 + c$
	Consistencia multiplicativa $Si a < b, c > 0 \rightarrow ac < bc$ $Si a < b, c < 0 \rightarrow ac > bc$	$3 < 5, c = 4 \rightarrow 3 \cdot 4 < 5 \cdot 4$ $12 < 20$
		$3 < 5, c = -4$ $\rightarrow 3(-4) > 5(-4)$ $-12 > -20$

Axioma del Supremo

Si M es un conjunto no vacío de elementos de R superiormente acotado, entonces M tiene un supremo en R .

Ejemplo: El conjunto $A = \{x \in N / 4 < x < 10\}$

$A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ es un sub conjunto de números reales.



Podemos observar que todos los elementos de A son menores o iguales a los números reales: 9, 10, 11, 12, ...

Es decir, existen números reales k , tales que, todos los elementos de A son menores o iguales que k . Que se denota de esta manera $\exists k \in R: x \leq k, \forall x \in A$

$$\exists k = 9, x \leq 9, \forall x \in A$$

$$\exists k = 9.2, x \leq 9.2, \forall x \in A$$

$$\exists k = 9.3, x \leq 9.3, \forall x \in A$$

$$\exists k = 9.9, x \leq 9.9, \forall x \in A$$

$$\exists k = 10, x \leq 10, \forall x \in A$$

$$\exists k = 11, x \leq 11, \forall x \in A$$

.

.

.

Los números reales $k \geq 9$, se llaman COTAS superiores del conjunto A .

Como Podemos observar que el conjunto A es acotado superiormente entonces A tiene un supremo en R ; 9 es el supremo del conjunto A , que se denota $SupA = 9$

Diferencia y división de dos números reales

Si $a, b \in R$ entonces:

Operación	Definición	Qué dice	Ejemplo
Diferencia	$a - b = a + (-b)$	La diferencia es la suma del opuesto del sustraendo.	$15 - 12 = 15 + (-12)$
División	$a \div b = \frac{a}{b} = a * \frac{1}{b}, b \neq 0$	La división es la multiplicación por el recíproco del divisor.	$80 \div 12 = 80 * \frac{1}{12}$

Algunas propiedades de los números reales

Si $a, b, c, d \in R$ entonces:

- 1) $-(-a) = a$
- 2) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$
- 3) $(-a)(-b) = ab$
- 4) Si $ab = ac \Rightarrow b = c, a \neq 0$
- 5) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc; b \neq 0, d \neq 0$
- 6) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}; b \neq 0, d \neq 0$
- 7) $\left(\frac{b}{a}\right)^{-1} = \frac{a}{b}; a \neq 0, b \neq 0$
- 8) $\forall a \in R, a \neq 0$ se cumple $a^{-1} = \frac{1}{a} \neq 0$
- 9) $ab = 0$ si y solo si $a = 0 \vee b = 0$
- 10) $\frac{a}{b} = 0$ si y solo si $a = 0, b \neq 0$
- 11) $a < b \Rightarrow -a > -b$
- 12) $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$
- 13) Si $a > 0$ y $b > 0 \Rightarrow a + b > 0$
- 14) Si $a > 0$ y $b > 0 \Rightarrow ab > 0$
- 15) Si $a > 0 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{a} > 0$

- 16) Si $a < 0 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{a} < 0$
- 17) Si $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$
- 18) $\forall a \in R \Rightarrow a^2 \geq 0$
- 19) $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- 20) Si $(a < b) \wedge (c < d) \Rightarrow a + c < b + d$
- 21) $0 \leq a < b \wedge 0 \leq c < d \Rightarrow ac < bd$
- 22) Si $a > 0, b > 0; a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
- 23) $ab > 0 \Leftrightarrow [a > 0 \wedge b > 0] \vee [a < 0 \wedge b < 0]$
- 24) $ab < 0 \Leftrightarrow [a > 0 \wedge b < 0] \vee [a < 0 \wedge b > 0]$
- 25) $\frac{a}{b} > 0, b \neq 0 \Leftrightarrow [a > 0 \wedge b > 0] \vee [a < 0 \wedge b < 0]$
- 26) $\frac{a}{b} < 0, b \neq 0 \Leftrightarrow [a > 0 \wedge b < 0] \vee [a < 0 \wedge b > 0]$
- 27) $a^2 = b \Leftrightarrow a = \sqrt{b} \vee a = -\sqrt{b}$ donde $b \geq 0$
- 28) $a^2 > b \Leftrightarrow (b \geq 0) \wedge (a > \sqrt{b} \vee a < -\sqrt{b})$
- 29) $a^2 < b \Leftrightarrow (b \geq 0) \wedge (-\sqrt{b} < a < \sqrt{b})$
- 30) $a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow a \leq b, \text{ si } a \geq 0 \wedge b > 0$
- 31) $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Leftrightarrow a \leq b, \text{ si } a \geq 0 \wedge b \geq 0$

Ejercicios Desarrollados

1. Demostrar: $a + b < \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}, \forall a, b \in R^+; a \neq b$

Demostración

Para mayor facilidad y tener una idea clara de dónde empezar a demostrar, se puede ensayar, en borrador, con la desigualdad dada.

$$a + b < \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \Rightarrow a + b < \frac{a^3 + b^3}{ab}$$

$$a + b < \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{ab}$$

$$(a + b)ab < (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$ab < a^2 - ab + b^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0$$

$$(a - b)^2 > 0$$

Como se puede ver ya tenemos una idea de dónde empezar a demostrar.

Veamos

$$(a - b)^2 > 0 \quad \text{por propiedad 17}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0 \quad \text{Binomio al cuadrado}$$

$$a^2 - 2ab + ab + b^2 > 0 + ab \quad \text{por el axioma de monotonía para la adición}$$

$$a^2 - ab + b^2 > ab$$

$$(a + b)ab < (a + b)(a^2 - ab + b^2), \quad a + b > 0 \quad \text{por axioma de monotonía para la multiplicación}$$

$$\frac{(a+b)ab}{ab} < \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{ab}, \quad ab > 0 \quad \text{por axioma de monotonía para la multiplicación}$$

$$a + b < \frac{a^3 + b^3}{ab} \quad \text{por suma de cubos}$$

$$a + b < \frac{a^3}{ab} + \frac{b^3}{ab} \quad \text{por el axioma de distributiva}$$

$$a + b < \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \quad \text{lo que queda demostrado}$$

2. Si $a > 0, b > 0$ demostrar que: $\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)(a^2 + b^2) \geq 4$

Demostración

Para tener una idea clara de dónde empezar a demostrar, ensayaremos un borrador, con la desigualdad dada.

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)(a^2 + b^2) \geq 4 \Rightarrow \left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\right)(a^2 + b^2) \geq 4$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 + b^2) \geq 4a^2b^2$$

$$(a^2 + b^2)^2 \geq 4a^2b^2$$

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \geq 4a^2b^2$$

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq 0$$

$$(a^2 - b^2)^2 \geq 0$$

Ya tenemos una idea de dónde empezar a demostrar.

Veamos

$$(a^2 - b^2)^2 \geq 0$$

por propiedad 18

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq 0$$

Binomio al cuadrado

$$a^4 - 2a^2b^2 + 4a^2b^2 + b^4 \geq 0 + 4a^2b^2 \text{ por el axioma de monotonía para la adición}$$

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \geq 4a^2b^2$$

Trinomio cuadrado perfecto

$$(a^2 + b^2)^2 \geq 4a^2b^2$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 + b^2) \geq 4a^2b^2, \quad a^2b^2 > 0$$

$$\left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\right)(a^2 + b^2) \geq \frac{4a^2b^2}{a^2b^2}$$

por axioma de monotonía para la multiplicación

$$\left(\frac{a^2}{a^2b^2} + \frac{b^2}{a^2b^2}\right)(a^2 + b^2) \geq 4$$

por el axioma de distributiva

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)(a^2 + b^2) \geq 4$$

lo que queda demostrado

3. Si $a > 0, b > 0$, tal que $a \geq b$, demostrar que: $\frac{a}{b} + \frac{3b}{a} \geq \frac{b^2}{a^2} + 3$

Demostración

Primero ensayaremos un borrador, con la desigualdad dada, para tener una idea de donde iniciar a demostrar.

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} + \frac{3b}{a} \geq \frac{b^2}{a^2} + 3 &\Rightarrow \frac{a^3 + 3ab^2}{a^2b} \geq \frac{b^3 + 3a^2b}{a^2b} \\ a^3 + 3ab^2 &\geq b^3 + 3a^2b \\ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 &\geq 0 \\ (a - b)^3 &\geq 0\end{aligned}$$

Veamos

Tenemos como información que

$$a > 0, b > 0 \text{ y } a \geq b$$

$$a - b \geq b - b \text{ por el axioma de monotonía para la adición}$$

$$a - b \geq 0 \Rightarrow (a - b)^3 \geq 0$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \geq 0 \text{ Binomio al cubo}$$

$$a^3 - 3a^2b + 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + b^3 \geq 0 + b^3 + 3a^2b \text{ por el axioma de monotonía para la adición}$$

$$a^3 + 3ab^2 \geq b^3 + 3a^2b$$

$$\frac{a^3 + 3ab^2}{a^2b} \geq \frac{b^3 + 3a^2b}{a^2b}, a^2b > 0 \quad \text{axioma de monotonía para la multiplicación}$$

$$\frac{a^3}{a^2b} + \frac{3ab^2}{a^2b} \geq \frac{b^3}{a^2b} + \frac{3a^2b}{a^2b} \quad \text{por el axioma de distributiva}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{3b}{a} \geq \frac{b^2}{a^2} + 3 \quad \text{lo que queda demostrado}$$

4. Si $c > 0, d > 0, 2d \neq 3c$; demostrar que: $\frac{d}{3c} > 1 - \frac{3c}{4d}$

Demostración

Ensayaremos un borrador, con la desigualdad dada, para tener una idea de donde iniciar a demostrar.

$$\frac{d}{3c} > 1 - \frac{3c}{4d} \Rightarrow \frac{d}{3c} + \frac{3c}{4d} > 1$$

$$\frac{4d^2 + 9c^2}{12cd} > 1$$

$$4d^2 + 9c^2 > 12cd$$

$$4d^2 - 12cd + 9c^2 > 0$$

$$(2d - 3c)^2 > 0$$

Veamos

Tenemos como información que

$$c > 0, d > 0, 2d \neq 3c \Rightarrow 2d - 3c \neq 0 \wedge cd > 0$$

$$(2d - 3c)^2 > 0 \text{ por propiedad 17}$$

$$4d^2 - 12cd + 9c^2 > 0 \text{ Binomio al cuadrado}$$

$$4d^2 - 12cd + 12cd + 9c^2 > 0 + 12cd \quad \text{Monotonía de adición}$$

$$4d^2 + 9c^2 > 12cd$$

$$\frac{4d^2 + 9c^2}{12cd} > \frac{12cd}{12cd}, cd > 0 \text{ Monotonía de la multiplicación}$$

$$\frac{4d^2}{12cd} + \frac{9c^2}{12cd} > 1 \quad \text{Distributiva}$$

$$\frac{d}{3c} + \frac{3c}{4d} > 1$$

$$\frac{d}{3c} + \frac{3c}{4d} - \frac{3c}{4d} > 1 - \frac{3c}{4d} \quad \text{Monotonía de la adición}$$

$$\frac{d}{3c} > 1 - \frac{3c}{4d} \quad \text{lo que queda demostrado}$$

5. Si $a + b = 2$; $a, b \in \mathbb{R}$ demostrar que: $a^4 + b^4 \geq 2$

Demostración

Como $a + b = 2 \Rightarrow (a + b)^2 = 4$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 4 \quad \text{Binomio al cuadrado}$$

$$a^2 + 2ab - 2ab + b^2 = 4 - 2ab \quad \text{Monotonía de la adición}$$

$$a^2 + b^2 = 4 - 2ab \dots\dots\dots (1)$$

Por otro lado $(a - b)^2 \geq 0$ propiedad 18

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \quad \text{Binomio al cuadrado}$$

$$a^2 - 2ab + 2ab + b^2 \geq 0 + 2ab \quad \text{Monotonía de la adición}$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \dots\dots\dots (2)$$

De (1) y (2) tenemos:

$$4 - 2ab \geq 2ab$$

$$4 - 2ab + 2ab \geq 2ab + 2ab \quad \text{Monotonía de la adición}$$

$$4ab \leq 4 \Rightarrow ab \leq 1$$

Ahora si

$$ab \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2b^2 \geq 1, & \text{si } (a \geq 1 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b \geq 1) \\ a^2b^2 < 1, & \text{si } a, b \in \langle 0,1 \rangle \vee a, b \in \langle -1,0 \rangle \end{cases} \dots\dots\dots (3)$$

Por otro lado $(a^2 - b^2)^2 \geq 0$ propiedad 18

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq 0 \quad \text{Binomio al cuadrado}$$

$$a^4 - 2a^2b^2 + 2a^2b^2 + b^4 \geq 0 + 2a^2b^2 \quad \text{Monotonía de la adición}$$

$$a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$$

$$a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2 \geq 2 \text{ por (3)}$$

$$\text{Si } (a \geq 1 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b \geq 1)$$

Luego se demuestra que $a^4 + b^4 \geq 2$ por el axioma de transitividad.

6. Si $a, b, c \in R$ demostrar que $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$

Demostración

$$\text{Sabemos que } \begin{cases} (a-1)^2 \geq 0 \\ (b-1)^2 \geq 0 \\ (c-1)^2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{por propiedad 18}$$

Desarrollando el binomio al cuadrado y aplicando monotonía, tenemos

$$\begin{cases} a^2 - 2a + 1 \geq 0 \\ b^2 - 2b + 1 \geq 0 \\ c^2 - 2c + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 2a + 2a + 1 \geq 0 + 2a \\ b^2 - 2b + 2b + 1 \geq 0 + 2b \\ c^2 - 2c + 2c + 1 \geq 0 + 2c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 1 \geq 2a \\ b^2 + 1 \geq 2b \\ c^2 + 1 \geq 2c \end{cases}$$

Ahora sumando por propiedad 20, tenemos

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2a + 2b + 2c \quad \text{distributiva}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c) \quad \text{lo que queda demostrado.}$$

Ejercicios

1. Si $a \neq b$, donde $a, b \in R^+$; demostrar que $(a^3 + b^3)(a + b) > (a^2 + b^2)^2$
2. Si a, b son números reales positivos, demostrar que: $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) \geq 4$
3. $\forall a \in R, a \neq 0$ demostrar que: $a^2 + \frac{9}{a^2} \geq 6$
4. Si $0 < a < 1$, demostrar que $a^2 < a$
5. Si $x + y + z = 6$, demostrar $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$

1.3 Ecuaciones Lineales

Una ecuación es una proposición que indica que el valor numérico de dos expresiones algebraicas es igual. Las dos expresiones que conforman una ecuación son llamadas lados o miembros, y están separados por el signo de igualdad " $=$ ".

Toda ecuación lineal con una incógnita se puede llevar a la forma:

$ax + b = 0, a \neq 0$. Resolver una ecuación consiste en hallar el valor de la variable que hace verdadera dicha proposición, la solución es también llamada raíz de la ecuación siendo expresada por el valor: $x = -\frac{b}{a}$

Podemos encontrar ecuaciones lineales básicas, con literales, fraccionarias, con radicales.

Ejercicios Desarrollados

Resolver la ecuación lineal básica

1. $2(x - 1) - 3(x - 4) = 4$

Resolución

$$2x - 2 - 3x + 12 = 4$$

$$-x + 10 = 4$$

$$x = 6$$

2. $\frac{x}{3} - 4 = \frac{x}{5}$

Resolución

$$\frac{x - 12}{3} = \frac{x}{5}$$

$$5(x - 12) = 3x$$

$$5x - 60 = 3x$$

$$2x = 60 \Rightarrow x = 30$$

Resolver la ecuación lineal con literales

$$3. a = \frac{x-xr^2}{1-r}; r \neq 1, x = ?$$

Resolución

$$a(1-r) = x - xr^2$$

$$a(1-r) = x(1-r^2)$$

$$a(1-r) = x(1-r)(1+r)$$

$$a = x(1+r)$$

$$x = \frac{a}{1+r}$$

$$4. S = P + Prt; P = ?$$

Resolución

$$S = p(1+rt)$$

$$P = \frac{S}{1+rt}; rt \neq -1$$

Resolver la ecuación fraccionaria

$$5. \frac{x-6}{x} - \frac{6}{x} = \frac{x+6}{x-6}; x \neq 0, x \neq 6$$

Resolución

$$\frac{x-12}{x} = \frac{x+6}{x-6}$$

$$(x-12)(x-6) = x(x+6)$$

$$x^2 - 18x + 72 = x^2 + 6x$$

$$-18x + 72 = 6x$$

$$24x = 72$$

$$x = 3$$

$$6. \frac{2}{x} - 1 = \frac{9x}{x+4}; x \neq 0, x \neq -4$$

Resolución

$$\frac{2-x}{x} = \frac{9x}{x+4}$$

$$(2-x)(x+4) = x(9x)$$

$$2x + 8 - x^2 - 4x = 9x^2$$

$$10x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$5x^2 + x - 4 = 0$$

$$(5x - 4)(x + 1) = 0$$

aplicando aspa simple

$$5x - 4 = 0 \vee x + 1 = 0$$

aplicando propiedad 9

$$x = \frac{4}{5} \vee x = -1$$

Resolver la ecuación con radical

$$7. \quad 6 - \sqrt{2x + 5} = 0$$

Resolución

$$\sqrt{2x + 5} = 6$$

elevando al cuadrado

$$2x + 5 = 36$$

$$2x = 31 \Rightarrow x = \frac{31}{2}$$

Comprobando el resultado en la ecuación

$$6 - \sqrt{2\left(\frac{31}{2}\right) + 5} = 6 - \sqrt{31 + 5} = 6 - \sqrt{36} = 0$$

$$8. \quad \sqrt{y^2 - 9} = 9 - y$$

Resolución

$$y^2 - 9 = (9 - y)^2$$

$$y^2 - 9 = 81 - 18y + y^2$$

binomio al cuadrado

$$-9 = 81 - 18y$$

$$18y = 90 \Rightarrow y = \frac{90}{18}$$

$$y = \frac{10}{2} \Rightarrow y = 5$$

Comprobando el resultado en la ecuación $\sqrt{5^2 - 9} = 9 - 5$

$$\sqrt{25 - 9} = 4$$

$$\sqrt{16} = 4 \Rightarrow 4 = 4$$

Ejercicios

Resolver las siguientes ecuaciones lineales básicas:

$$1. \quad 2(x + 4) = 7x + 2$$

2. $4(x-3) + \frac{3}{4} = 2(x+5)$
3. $\frac{x}{3} - 4 = \frac{x}{5}$
4. $\frac{7x+3}{2} - \frac{9x-8}{4} = 6$
5. $\frac{x+2}{3} - \frac{2-x}{6} = x-2$
6. $\frac{2y-7}{3} + \frac{8y-9}{14} = \frac{3y-5}{21}$
7. $5(x-1) + \frac{1}{2} = x+2$
8. $2(x+3) + 3(x-2) = \frac{1}{2}(x+3)$
9. $\frac{x+8}{3} + 2(x+1) = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)$
10. $2\left(\frac{x+1}{5}\right) + x = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)$
11. $3\left(\frac{2x-7}{5}\right) - \frac{1}{4}(2x-7) + 5\left(\frac{x+2}{3}\right) = 5$
12. $\frac{x+n}{2} - 6 + \frac{n-x}{5} = \frac{7n}{10}$

Resolver las siguientes ecuaciones con literales despejando la variable indicada:

1. $r = \frac{2ml}{B(n+1)}; m = ?$
2. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}; q = ?$
3. $S = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}; R = ?$
4. $S = \frac{u}{au+c}; u = ?$
5. $p = 8q - 1; q = ?$
6. $S = p(1 + rt); r = ?$
7. $S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n); a_1 = ?$
8. $r = \frac{d}{1-dt}; t = ?$
9. $r = \frac{2ml}{B(n+1)}; n = ?$
10. $\frac{a+x}{b} - \frac{x-b}{a} = 2, x = ?$
11. $3(a + 4x) + 7(2x - a) - 5(3x + 2a) + a = 0; x = ?$

12. $\frac{x+3b}{x+b} = \frac{x-2}{x-5}; x = ?$

Resolver las siguientes ecuaciones fraccionarias:

1. $\frac{3x+1}{x^3} + \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{2x+3}{x^2}$

2. $\frac{x+1}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{x-2}{x^2-1}$

3. $\frac{2(x+1)}{x-2} + \frac{5}{x+4} = \frac{36}{x^2+2x-8}$

4. $\frac{8}{x+6} + \frac{12-x}{x-6} = 1$

5. $\frac{x-4}{x+6} = \frac{x+4}{x+22}$

6. $\frac{x-5}{x-1} - \frac{x+5}{x+1} = 0$

Resolver las siguientes ecuaciones con radicales:

1. $\sqrt{x+7} - \sqrt{x+14} = -1$

2. $\sqrt{x-2} + 5 = \sqrt{x+53}$

3. $\sqrt{\sqrt{x+16} + \sqrt{x}} = 2$

4. $\sqrt{2x-1} - 6 = -\sqrt{x+4}$

5. $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-4} = 0$

6. $\sqrt{5+2x} = \sqrt{4x-2}$

7. $\sqrt{x} - \sqrt{x+1} = 1$

8. $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+7} = 1$

9. $\sqrt{5x-14} = 2\sqrt{x-1}$

10. $\sqrt{5x-6} - 16 = 0$

11. $\sqrt{\frac{x}{2} + 1} = \frac{2}{3}$

12. $\sqrt{4x-6} - \sqrt{x} = 0$

13. $\sqrt{x^2+33} - x = 3$

14. $\sqrt{5-x} + \sqrt{x+3} = 0$

15. $\sqrt{5x+19} - \sqrt{5x} = -1$

Aplicación de ecuaciones lineales

En los problemas de aplicación el matemático y educador George Pólya (1887-1985) recomienda organizar el desarrollo de la solución, usando los siguientes pasos

- Comprensión del problema
 - Leer todo el enunciado atentamente.
 - Trazar un esquema que ilustre el enunciado, si es posible.
 - Identificar las cantidades conocidas y desconocidas que presenta el problema.
 - Elegir una variable para la cantidad desconocida y escribir exactamente lo que representa. Para esto es de utilidad fijarse en la pregunta del enunciado.
- Concepción de un plan- Planteamiento
 - Establecer relaciones entre las cantidades y variables indicadas anteriormente:
 - Traducir el enunciado a una o varias ecuaciones (interpretación de textos)
 - Reglas externas al problema.
- Ejecución del plan-Resolución

La parte operativa ya debe ser sencilla después de todo lo trabajado.
- Comprobación y respuesta

Es siempre bueno asegurarnos que el proceso de cálculo esté correcto, además se debe escribir una respuesta completa para dar claramente solución a la pregunta propuesta.

Problema 1.

Emilio y Valentina depositan su dinero en una cuenta mancomunada. Al cabo de un año tiene en total 8 000 soles, pero a Emilio le corresponde el triple de dinero que a Valentina. ¿Cuánto posee cada uno?

Comprensión del problema (Variable)	¿Cuánto posee cada uno de ellos?	Incógnita(s): E =Emilio V =Valentina
Planteamiento	Tiene en total 8000 nuevos soles	$E + V = 8\,000$

	A Emilio le corresponde el triple de dinero que a Valentina.	$E = 3V$
Resolución	$E + V = 8\,000$ $E = 3V$ entonces $3V + V = 8\,000$ $4V = 8\,000$ $V = 2\,000$ luego $E = 6\,000$	
Respuesta	Emilio posee 6 000 soles y Valentina 2 000 soles	

Problema 2.

En el mes de julio un comerciante gana cada semana S/. 400 más que la semana anterior. Si consideramos que el mes tiene 4 semanas y que en la cuarta semana gana siete veces lo que ganó en la primera semana, ¿Cuánto gana en cada semana?

Variable	¿Cuánto gana en cada semana?	Incógnita(s): $x =$ ganancia de la 1 ^{ra} semana
Planteamiento	Gana cada semana S/. 400 más que en la semana anterior	1 ^{ra} semana= x
		2 ^{da} semana= $x + 400$
		3 ^{ra} semana= $x + 400 + 400$
		4 ^{ta} semana= $x + 400 + 400 + 400$
	En la cuarta semana gana siete veces lo que gana en la primera	$x + 1200 = 7x$
Resolución	$6x = 1200 \Rightarrow x = 200$	
Respuesta	La 1 ^{ra} semana gana S/. 200; la 2 ^{da} S/. 600; la 3 ^{ra} S/. 1 000 y la 4 ^{ta} S/. 1 400	

Problema 3:

El responsable de un minimarket compra una cierta cantidad de fresa a S/. 3.5 el kilogramo. Pero se le malogra 4 kilogramos y el resto los vende a S/. 6 el kilogramo ¿Qué cantidad ha comprado si la ganancia es de S/. 40?

Comprensión del problema (Variable)	¿Qué cantidad ha comprado si la ganancia es de S/.40?	Incógnita(s): $x = \text{kg de fresa que compró}$
Planteamiento	El costo por kg es S/. 3.5 Pierde 4 kg de fresa	$C = 3.5x$ $x - 4$
	La venta por kg es a S/. 6	$V = 6(x - 4)$
Resolución	$G = V - C = 6(x - 4) - 3.5x$ $G = 6x - 24 - 3.5x$, por dato la ganancia es 40 soles $40 = 2.5x - 24$ $64 = 2.5x$ $x = 25.6$	
Respuesta	El responsable del minimarket ha comprado 25.6 kg de fresa.	

Problema 4.

En una tienda de prendas, por cierre de mes, se está rebajando sus artículos en un 25%, ¿Cuál sería el precio inicial de una prenda cuyo precio rebajado es de 38 soles?

Comprensión del problema (Variable)	¿Cuál sería el precio inicial de una prenda cuyo precio rebajado es de 38 soles?	Incógnita(s): $x = \text{precio inicial de la prenda}$															
Planteamiento	El costo inicial de la prenda es x soles Le rebaja 38 soles	$\text{Costo} = x$ $x - 38$															
	El precio rebajado es el 25% que corresponde a 38soles	$38 \text{ soles} \Leftrightarrow 25\%$															
Resolución	<table> <tr> <td></td><td>soles</td><td>%</td></tr> <tr> <td></td><td>x</td><td>100</td></tr> <tr> <td></td><td>38</td><td>25</td></tr> <tr> <td></td><td colspan="2">$25x = 3800$</td></tr> <tr> <td></td><td colspan="2">$x = 152$</td></tr> </table>			soles	%		x	100		38	25		$25x = 3800$			$x = 152$	
	soles	%															
	x	100															
	38	25															
	$25x = 3800$																
	$x = 152$																

Respuesta	El precio inicial de la prenda es S/.152.
-----------	---

Problema 5.

Póngase en la situación de que usted es el asesor financiero de una compañía que posee un edificio con 50 oficinas. La compañía tiene alquiladas 20 oficinas a \$400 mensuales, que tienen un contrato por 5 años. Si la compañía quiere obtener un total de \$20 450 mensuales de rentas del edificio. ¿Cuál es la renta que debe cobrarse por cada oficina que no están rentadas?

Comprensión del problema (Variable)	¿Cuál es la renta que debe cobrarse por cada oficina que no están rentadas?	Incógnita(s): x =renta que se debe cobrar por cada oficina vacante
Planteamiento	Si se renta las 20 oficinas a \$400, se obtiene \$8 000. Se quiere obtener un total de \$20 450 mensuales de rentas.	A la compañía le faltaría $20\,450 - 8\,000 =$ \$ 12 450 para su objetivo
Resolución	$12\,450 \div 30 = 415$	
Respuesta	La renta que se debe cobrar a cada oficina vacante es de \$415.	

Problemas Para Resolver

1. Se tiene que repartir S/. 30 000 entre cierto número de trabajadores presentes en una reunión de manera exacta entre ellos, uno de los trabajadores nota que si hubiera 3 trabajadores menos a cada uno le tocaría S/.500 más ¿Cuánto trabajadores hay y cuanto le toca a cada uno?
2. La diferencia de dos números es 10, y la suma de ocho veces el primero y cuatro veces el segundo resulta 8. Hallar dichos números.

3. La suma de las edades de A, B, C es 69 años. La edad de A es el doble que la de B y 6 años mayor que la de C. Hallar las edades correspondientes.
4. Dentro de 20 años tendré 3 veces la edad que tenía hace 18 años ¿Cuántos años me faltan para cumplir 49 años?
5. Luis debe pagar una deuda de S/. 670 con 38 billetes de S/.10 y S/.20 ¿Cuántos billetes de S/. 10 empleará?
6. Ana y Raquel tienen entre los dos 10 vestidos de fiesta; si la mitad de vestidos que tiene Ana multiplicado por la tercera parte de vestidos de Raquel es 4, indicar cuantos vestidos tiene Ana.
7. El doble del cuadrado de un número natural disminuido en tres unidades es igual al quíntuple del mismo. ¿Cuál es dicho número?
8. En un examen de 20 preguntas, Juana alcanza 7 puntos. Si cada acierto vale dos puntos y cada error o no marcada le disminuyen un punto ¿Cuántas preguntas ha acertado Juana?
9. Un revendedor vende la mitad de las naranjas, más la mitad de una naranja; una segunda vez, vende la mitad del resto, más media naranja, y así sucesivamente; después de tres ventas no queda ninguna ¿Cuántas naranjas tenía?
10. Un concierto produjo S/. 60 000 por la venta de 8000 boletos. Si los boletos se vendieron a S/. 6 y S/. 10 cada uno. ¿Cuántos boletos de cada tipo se vendieron?
11. Quince personas, entre hombres y mujeres, comen en restaurant; el grupo de varones gastan S/. 36 y el grupo de mujeres también gastan lo mismo. Hallar el número de hombres y su gasto individual, sabiendo que cada mujer ha pagado S/. 2 menos que un hombre.
12. Un ganadero compra borregos en S/.750; los cría 3 meses y pierde 5 borregos por enfermedad y vende cada uno de los que quedan a S/.50 más de lo que le costaron. En esta operación gana S/. 250. Hallar el número de borregos que compró el ganadero.
13. Un teatro vendió 242 entradas en \$1096. Las entradas de los adultos se vendieron a \$5.30 cada una y los de niños a \$2.0. ¿Cuántas entradas de cada clase se vendieron?
14. Gia lee 30 páginas de su libro, si al día siguiente; lee el doble de lo que le queda disminuido en 100; si todavía le falta 10 páginas por leer. ¿Cuántas páginas tiene su libro de Gia?

15. La edad de Francisco es la mitad de la edad de su padre aumentado en 4 años. Si ambas edades suman 64 años. ¿Cuál es la edad de cada uno de ellos?
16. Hace 8 años la edad de James era el triple de Fernando y dentro de 4 años la edad de Fernando será los $\frac{5}{9}$ de la edad de James. Hallar las edades actuales de estas personas.
17. Un granjero dedicado a la crianza de aves y ganado vacuno tiene actualmente 320 animales. Si un empleado cuenta el número de patas llega a 840. ¿Cuál es el número de aves que tiene el granjero?
18. Un mendigo da 3 golpes de bastón cada vez que ve a un hombre y 2 golpes cada vez que ve a una mujer. Si llega observar a 26 personas, dando 60 golpes. ¿Calcular la diferencia entre el número de mujeres y hombres?
19. El ingreso mensual total de una guardería por el cuidado de x niños está dado por $I = 450x$ y sus costos mensuales totales están dados por $C = 380x + 3500$ ¿Cuántos niños se necesitan inscribir mensualmente para llegar al punto de equilibrio? (los ingresos son igual a los costos)

1.4 Ecuaciones de Segundo Grado

La forma general de una ecuación cuadrática en x , está dado por:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$

Raíz de una ecuación cuadrática

Al resolver una ecuación de segundo grado, se está encontrando los valores positivos, nulos o negativos, llamadas raíces (real o complejo) que satisfagan la ecuación.

Diremos que r es raíz de $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ar^2 + br + c = 0$

Resolución de la ecuación cuadrática:

Por factorización:

Resolver la ecuación: $x^2 - x - 6 = 0$ Aplicamos el aspa simple $(x - 3)(x + 2) = 0$ Aplicando la propiedad 9 $x - 3 = 0 \vee x + 2 = 0$ $x = 3 \vee x = -2$ $CS = \{-2, 3\}$	Resolver la ecuación: $4x^2 - 9 = 0$ $(2x)^2 - 3^2 = 0$ Aplicamos diferencia de cuadrados $(2x - 3)(2x + 3) = 0$ Aplicando propiedad 9 $2x - 3 = 0 \vee 2x + 3 = 0$ $x = \frac{3}{2} \vee x = -\frac{3}{2}$ $CS = \left\{\pm \frac{3}{2}\right\}$
---	---

Completando el cuadrado:

El completar el cuadrado conlleva hallar el tercer término de un trinomio cuadrado perfecto cuando conocemos los primeros dos.

Para el trinomio de la forma: $x^2 + bx + ?$ su último término para formar un trinomio cuadrado perfecto, es el cuadrado de la mitad del coeficiente del término de x , es decir $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$

Pero en una ecuación debemos sumar a ambos lados el número que completa el cuadrado, para obtener una ecuación equivalente.

Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones:

$x^2 - 2x - 2 = 0$	$2x^2 + 5x - 10 = 0$
--------------------	----------------------

Completando cuadrados

$$x^2 - 2x + \left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 2 = 0 + \left(\frac{-2}{2}\right)^2$$
$$(x - 1)^2 - 2 = 1$$

$$(x - 1)^2 = 3$$

Aplicando propiedad 27

$$x - 1 = \pm\sqrt{3}$$

$$x - 1 = \sqrt{3} \vee x - 1 = -\sqrt{3}$$

$$x = 1 + \sqrt{3} \vee x = 1 - \sqrt{3}$$

$$CS = \{1 \pm \sqrt{3}\}$$

Dividimos todo entre 2

$$x^2 + \frac{5}{2}x - 5 = 0$$

Completando cuadrados

$$x^2 + \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5 = 0 + \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - 5 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 + 5$$

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} + 5$$

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{105}{16}$$

Aplicando propiedad 27

$$x + \frac{5}{4} = \pm\sqrt{\frac{105}{16}}$$

$$x = -\frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{105}}{4}$$

$$CS = \left\{ \frac{-5 \pm \sqrt{105}}{4} \right\}$$

Por la fórmula Cuadrática:

Encontremos las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$; $a \neq 0$, estas se obtienen completando cuadrados.

Para ello a la ecuación cuadrática, dividimos a todo entre a

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Ahora analizaremos: Sea $\Delta = b^2 - 4ac$ el discriminante de la ecuación cuadrática, entonces se cumple:

a) Si $\Delta > 0$ entonces aplicando la propiedad 27 obtenemos

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

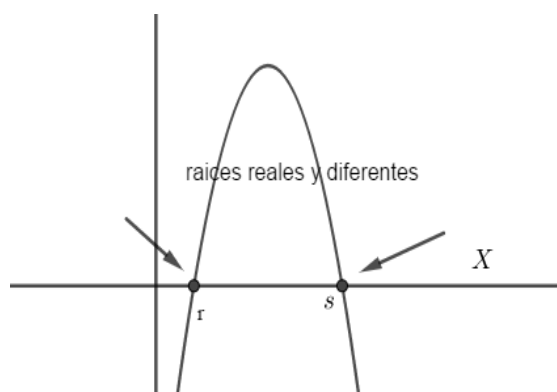
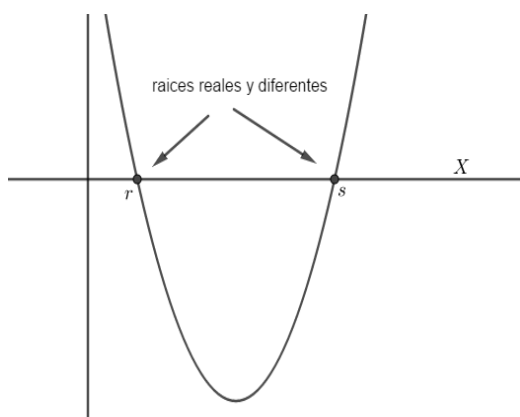
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Como podemos observar tenemos dos raíces reales y diferentes que lo denominaremos: $r = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $s = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

En conclusión, si $\Delta > 0 \Rightarrow CS = \{r, s\}$

Observación: gráficamente se estaría encontrando los valores donde la parábola corta al eje X



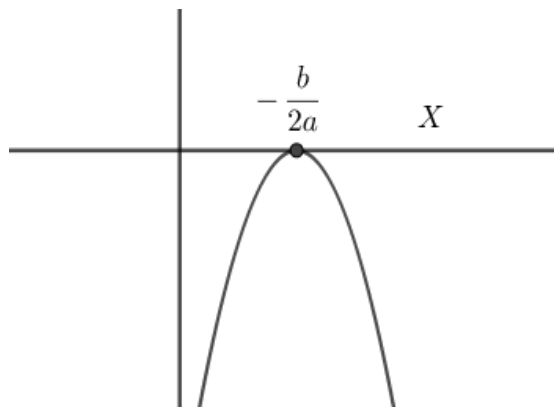
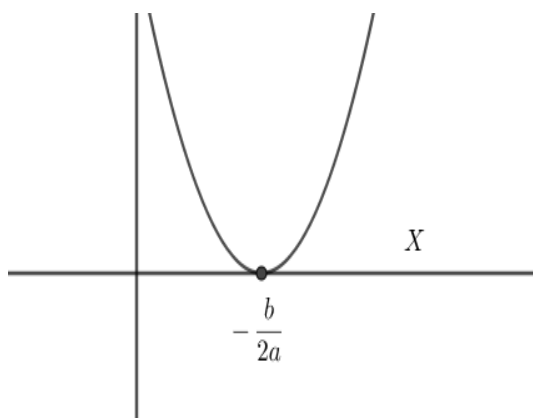
b) Si $\Delta = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= 0 \\ x + \frac{b}{2a} &= 0 \\ x &= -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

Luego podemos concluir que:

$$\text{Si } \Delta = 0 \Rightarrow CS = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$$

Observación: gráficamente se estaría encontrando el valor donde la parábola toca al eje X



c) Si $\Delta < 0$ obtenemos $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0$

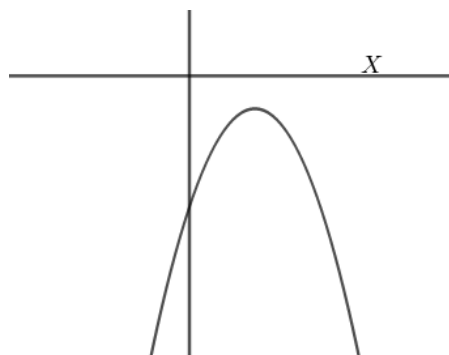
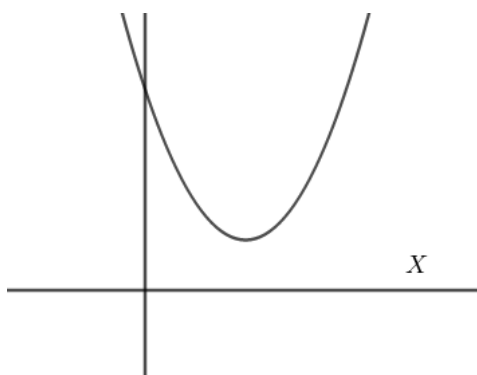
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 < 0$$

Que contradice a la propiedad 17, lo que quiere decir que no se tendrían raíces en los reales.

Luego podemos concluir que:

$$\text{Si } \Delta < 0 \Rightarrow \text{CS} = \phi = \{ \}$$

Observación: gráficamente en este caso la parábola no toca al eje X



Ejemplos

Resolver la ecuación: $3x^2 - 2x - 4 = 0$ Encontraremos el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = (-2)^2 - 4(3)(-4)$ $\Delta = 52 > 0$ Como el $\Delta > 0$ entonces la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales y diferentes, r y s $r = \frac{-(-2) - \sqrt{52}}{2(3)} = \frac{2 - \sqrt{52}}{6}$ $r = \frac{2 - 2\sqrt{13}}{6} \Rightarrow r = \frac{1 - \sqrt{13}}{3}$ Entonces $s = \frac{1 + \sqrt{13}}{3}$ Por tanto $CS = \{r, s\}$	Resolver la ecuación: $2x^2 - 3x + 4 = 0$ Encontrando el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = (-3)^2 - 4(2)(4)$ $\Delta = -23 < 0$ Como el $\Delta < 0$ entonces la ecuación cuadrática no tiene solución en los reales. Por tanto $CS = \emptyset$
Resolver la ecuación: $25x^2 - 80x + 64 = 0$ Encontrando la discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = (-80)^2 - 4(25)(64)$ $\Delta = 0$ Como el $\Delta = 0$ entonces la ecuación cuadrática tiene solución $\left\{-\frac{b}{2a}\right\} = \left\{-\frac{(-80)}{50}\right\} = \left\{\frac{8}{5}\right\}$ Luego $CS = \left\{\frac{8}{5}\right\}$	Resolver la ecuación: $9x^2 + 6x = 1$ Aplicando monotonía $9x^2 + 6x - 1 = 0$ Encontrando la discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = (6)^2 - 4(9)(-1)$ $\Delta = 72 > 0$ Entonces tiene dos soluciones reales y diferentes, r y s

$$r = \frac{-6 - \sqrt{72}}{2(9)} = \frac{-6 - 6\sqrt{2}}{18}$$

$$r = \frac{-1 - \sqrt{2}}{3}$$

$$s = \frac{-1 + \sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore CS = \{r, s\}$$

Teorema 1.

Si $r = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ y $s = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ son las raíces reales de ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ se cumple las siguientes propiedades:

a) $r + s = -\frac{b}{a}$

b) $rs = \frac{c}{a}$

c) $|r - s| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$

d) $ax^2 + bx + c = a(x - r)(x - s)$

Ejemplo

Hallar el valor de k en la ecuación $x^2 + (2k + 5)x + k = 0$ si una raíz excede la otra en 3 unidades.

Resolución

Por el teorema anterior

$$|r - s| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{a} = 3$$

$$\frac{\sqrt{(2k + 5)^2 - 4(1)(k)}}{1} = 3$$

$$\sqrt{(2k + 5)^2 - 4(1)(k)} = 3 \text{ elevando al cuadrado}$$

$$(2k + 5)^2 - 4(1)(k) = 9$$

$$4k^2 + 20k + 25 - 4k = 9$$

$$4k^2 + 16k + 16 = 0$$

$$k^2 + 4k + 4 = 0$$

$$(k + 2)^2 = 0$$

$$k = -2$$

Ejercicios para resolver

1. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas por factorización:

a) $9x^2 + 6x + 1 = 0$	g) $4x^2 + 12x + 9 = 0$
b) $x^2 + 165x + 6624 = 0$	h) $x^2 - 4 = 0$
c) $x^2 - 6x + 5 = 0$	i) $x^2 + x - 12 = 0$
d) $2m^2 + 5m + 3 = 0$	j) $x^2 - 8 = 0$
e) $x^2 - x - 20 = 0$	k) $(x + 3)(x - 2) = 6$
f) $(3x - 4)(x + 1) = -2$	l) $4y^2 + 2y - 2 = 0$

2. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas completando cuadrados:

a) $2x^2 - 5x + 1 = 0$	g) $x^2 + 6x + 7 = 0$
b) $x^2 - 7x + 4 = 0$	h) $x^2 = -3x + 8$
c) $6x^2 - 12x = 3$	i) $x^2 - 10x + 5 = 0$
d) $m^2 - 3 = -m$	j) $x^2 + 8x + 6 = 0$
e) $3x - 4 = -2x^2$	k) $5x^2 - 4x + 1 = 0$
f) $2p^2 + 5p + 6 = 0$	l) $2x^2 - 3x - 4 = 0$

3. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula cuadrática:

a) $x^2 = 4x - 1$	f) $2m^2 + 5m + 3 = 0$
b) $8x + 3 = 8x^2$	g) $\frac{6}{k^2} + \frac{1}{k} - 2 = 0$
c) $2.1x^2 - 4.7x - 6.2 = 0$	h) $x^2 - 4x + 5 = 0$

d) $4x = -2x^2 + 3$	i) $3y^2 - 4y + 5 = 0$
e) $2x^2 - x - 7 = 0$	j) $6x^2 + 2x = 27$

4. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas, por el método que prefiera:

a) $x^2 + 2x - 8 = 0$	k) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
b) $4x^2 - 13 = 0$	l) $\frac{2}{2x+1} - \frac{6}{x-1} = 5$
c) $x^2 - 4x - 21 = 0$	m) $-2x^2 - 6x + 5 = 0$
d) $x + \frac{1}{x-3} = 5$	n) $x + \sqrt{4x} - 5 = 0$
e) $(2x - 3)^2 = 8x$	o) $0.02w^2 - 0.3w = 20$
f) $\frac{8}{x+6} + \frac{12-x}{x-6} = 1$	p) $\frac{2}{r-2} - \frac{r+1}{r+4} = 0$
g) $\frac{2x-1}{x+1} = \frac{x+1}{x-2}$	q) $p(p-3)^2 - 4(p-3)^3 = 0$
h) $\frac{3}{x+1} + \frac{4}{x} - \frac{12}{x+2} = 0$	r) $x^2 = \frac{x+3}{2}$
i) $\frac{1}{x^6} + \frac{9}{x^3} + 8 = 0$	s) $\frac{3}{x-4} + \frac{x-3}{x} = 2$
j) $4x^2 - 17x + 15 = 0$	t) $\frac{y+1}{y+3} + \frac{y+5}{y-2} = \frac{7(2y+1)}{y^2+y-6}$

5. Para qué valor del parámetro "m" las raíces de la ecuación cuadrática

$$x^2 + 2(m+2)x + 9m = 0 \text{ ¿son iguales?}$$

6. Dada la ecuación: $(2k+2)x^2 + 4x - 4kx + k - 2 = 0$ hallar la suma de sus raíces sabiendo que estas son inversas.

7. Las raíces r y s de una ecuación cuadrática satisfacen: $4r - 16s = 7$ y

$8r + 4s = 5$ hallar la ecuación cuadrática cuyas raíces son respectivamente las inversas de r y s

8. Dado el conjunto $A = \{x \in R/x^2 - 2(1+3m)x + 7(3+2m) = 0, m \in R\}$

hallar los valores de "m" para que A sea un conjunto unitario. Construir dicho conjunto.

9. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2 + 2x - 3\sqrt{x^2 + x + 3} = 3$

b) $(2x - 7)(x^2 - 9)(2x + 5) = 91$

$$c) 2x^2 - 2x + 2\sqrt{2x^2 - 7x + 6} = 5x - 6$$

$$d) \left(x + 1 + \frac{6}{x}\right) \left(x - 1 + \frac{6}{x}\right) = 24$$

$$e) \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 - 4x + \frac{12}{x} = 12$$

$$f) (x^2 + 3x + 2)^2 - 8(x^2 + 3x) = 4$$

Aplicación de Ecuaciones de Segundo Grado

Ejemplo 1

¿Cuántos metros de lienzo se comprarán con S/. 250, sabiendo que, si el metro hubiese costado 2 soles menos, si hubieran tenido 5 metros más?

Resolución

Comprensión del problema (Variable)	¿Cuántos metros de lienzo se comprarán con S/. 250?	Incógnita(s): x =precio del metro de lienzo
Planteamiento	El costo inicial del lienzo es x soles	$Costo = x$
	si el metro costara 2 soles menos	$x - 2$
	si el metro hubiese costado 2 soles menos, si hubieran tenido 5 metros más	$\frac{250}{x} + 5 \Leftrightarrow \frac{250}{x-2}$
Resolución	$\frac{250}{x} + 5 = \frac{250}{x-2}$ $\frac{250 + 5x}{x} = \frac{250}{x-2}$ $(x-2)(250 + 5x) = 250x$ $240x + 5x^2 - 500 = 250x$ $5x^2 - 10x - 500 = 0$ $x^2 - 2x - 100 = 0$ $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-100)$ $\Delta = 404$	$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{404}}{2}$ $x = \frac{2 \pm 2\sqrt{101}}{2}$ $x = 1 \pm \sqrt{101}$ $x = 1 + \sqrt{101}$ $x = 11.05$ Luego la cantidad de metros que compraría es $\frac{250}{x} = \frac{250}{11.05} = 22.62$
Respuesta	Se comprará 22.62 metros de lienzo.	

Ejemplo 2

Una pieza de alfombra ha sido vendida en S/.1 500; el comprador al llegar a su casa, nota que, por equivocación, le han entregado una pieza que vale S/.2 menos por metro, pero que en compensación contiene 15 metros más que lo que esperaba. ¿Cuántos metros tiene esta pieza de alfombra, y cuál era el precio del metro?

Comprensión del problema (Variable)	¿Cuántos metros tiene esta pieza de alfombra, y cuál era el precio del metro?	Incógnita(s): x =cantidad de metros que creyó comprar
Planteamiento	El costo inicial del lienzo de x metros	$\frac{1500}{x}$
	El costo del metro del lienzo con 2 soles menos	$\frac{1500}{x} - 2$
	En compensación el lienzo contiene 15 metros más	$\left(\frac{1500}{x} - 2\right)(x + 15) = 1500$
Resolución	$\left(\frac{1500}{x} - 2\right)(x + 15) = 1500$ $\frac{(1500 - 2x)}{x}(x + 15) = 1500$ $(1500 - 2x)(x + 15) = 1500x$ $1500x + 22\,500 - 2x^2 - 30x = 1500x$ $2x^2 + 30x - 22\,500 = 0$ $x^2 + 15x - 11\,250 = 0$ $\Delta = (15)^2 - 4(1)(-11\,250)$ $\Delta = 45\,225$	$x = \frac{-(15) \pm \sqrt{45\,225}}{2}$ $x = \frac{-15 \pm 15\sqrt{201}}{2}$ $x = \frac{-15 \pm 212.66}{2}$ $x = \frac{-15 + 212.66}{2}$ $x = 98.83$ Observemos que x es la cantidad de metros, por lo que tiene que ser positivo.
Respuesta	La pieza tiene $x + 15 = 98.83 + 15 = 113.83$ metros El costo del metro de la pieza de alfombra que le dieron es $\frac{1500}{113.83} = 13.18$ soles.	

Problemas para resolver

1. En una fábrica de zapatos se determina que la utilidad P en dólares generada por la producción de x pares de zapatos por semana, está dada por la fórmula $P=1/10 x(250-x)$ siempre que $0 \leq x \leq 120$ ¿Cuántos pares de zapatos deben ser fabricados en una semana para obtener una utilidad de \$1500?
2. En una boutique se puede vender x unidades de prendas exclusivas semanalmente a un precio P cada uno, en donde $P=x(1000-x)$
¿Cuántas prendas exclusivas deben venderse para obtener ingresos semanales igual a S/.250 000?
3. Se han comprado tajadores por un total de S/.50. Si se hubieran comprado cinco tajadores más, el vendedor haría un descuento de S/.0.5 en cada una, y el precio total habría sido el mismo. ¿Cuántos tajadores se compraron?
4. La temperatura, $T^{\circ}\text{C}$, a la cual hierve el agua, se relaciona con la altitud, h , en metros sobre el nivel del mar, mediante la fórmula
$$h = 1000(100 - T) + 580(100 - T)^2$$
, válida para $T \in [95,100]$.
La altitud oficial del nevado de Huascarán, es de 6757 m.s.n.m. ¿cuál será la temperatura a la cual hierve el agua en la cima de este nevado?
5. Cuando el precio de un producto es x dólares por unidad, suponga que un fabricante suministrará $5x^2 - 6x$ unidades del producto al mercado y que los consumidores demandarán $36 - x^2$ unidades. Determinar el valor de x para que el mercado esté en equilibrio (oferta = demanda).
6. Una compañía determina que, si vende x unidades de un producto, el ingreso total por las ventas será de $81\sqrt{x}$ dólares. Si el costo variable por unidad es de \$2 y el costo fijo de \$ 820, determinar los valores de x para los que: *Ingreso total por ventas = costo variable + costo fijo* (Esto es, utilidad cero).
7. Un proveedor de instrumentos quirúrgicos vende un instrumento a \$ 3 500, para pedidos menores de 50 unidades. Si el pedido es de más de 50 hasta un máximo de 100 unidades, el precio total se reduce en \$ 8 000 ¿Cuántos instrumentos se pueden comprar con \$ 19 087 500?

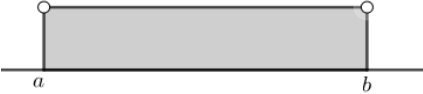
8. Una compañía de bienes raíces es propietario de 90 departamentos, cada uno de los cuales puede ser rentado en \$500 mensuales. Sin embargo, por cada \$25 mensuales de aumento en la renta, se tendrán tres departamentos desocupados sin posibilidad de que se renten inmediatamente. La compañía quiere recibir \$46 800 mensuales de rentas. ¿Cuál debe ser la renta mensual de cada departamento?
9. Un deportista lanza una pelota, la trayectoria que siguió la pelota está dada por la función que describe su altura (medida en metros) según el tiempo; $h(t) = 1.2 + 4t - 2t^2$. Calcula la altura máxima que alcanzó la pelota y el tiempo que permaneció en el aire.

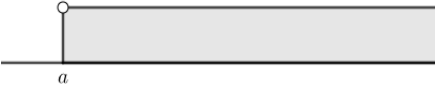
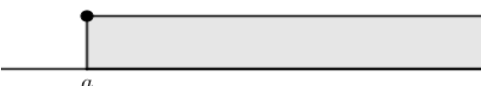
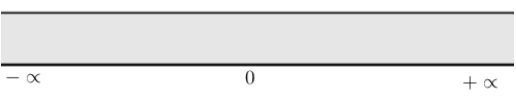
1.5 Intervalos

Si $a, b \in \mathbb{R}$, tales que:

$$\begin{aligned} a &> b && a \text{ mayor que } b \\ a &< b && a \text{ menor que } b \\ a &\geq b && a \text{ mayor o igual que } b \\ a &\leq b && a \text{ menor o igual que } b \end{aligned}$$

Definimos los siguientes intervalos:

Intervalo	Definición	Gráfica
Abierto	$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	
Cerrado	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	
Abierto por la izquierda	$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	
Abierto por la derecha	$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	

Infinito abierto por la derecha	$\langle -\infty, a \rangle = \{x \in R: x < a\}$	
Infinito abierto por la izquierda	$\langle a, +\infty \rangle = \{x \in R: a < x\}$	
Infinito cerrado por la derecha	$] -\infty, a] = \{x \in R: x \leq a\}$	
Infinito cerrado por la izquierda	$[a, +\infty[= \{x \in R: a \leq x\}$	
Reales	$R = \langle -\infty, +\infty \rangle$	
Vacío	$\phi = \{ \}$	

Ejercicios

1. Expresar cada uno de los intervalos en términos de desigualdades y graficar en la recta numérica:

- | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------|
| a) $\langle -7, 4 \rangle$ | b) $\langle -1, 11 \rangle$ | c) $\langle 7, 15 \rangle$ |
| d) $\langle 30, +\infty \rangle$ | e) $\langle -\infty, 10 \rangle$ | f) $[3, 15]$ |
| g) $[-5, 5[$ | h) $[0, +\infty[$ | i) $] -10, 5]$ |

2. Representar en forma geométrica sobre la recta de los números reales, el intervalo(s) resultante de la operación dada.

- | | |
|--------------------------------|---|
| a) $x \in [-3, 5] \cap [2, 7]$ | d) $x \in]-\infty, 3] \cap [2, +\infty[$ |
| b) $x \in [2, 4] \cup [3, 12[$ | e) $x \in [0, 8] - [3, 7]$ |
| c) $x \in [2, 5[\cup [5, 10[$ | f) $x \in [0, 8] - \{2, 7\}$ |

1.6 Inecuaciones

Se denomina inecuación a cualquier desigualdad relativa. Los valores de la variable que verifican la inecuación forman el conjunto solución, la cual se representa en función de intervalos.

1.6.1 Inecuaciones Lineales

Se dice una inecuación de primer grado o lineal, a la desigualdad en la variable x , de la forma:

$$\begin{array}{ll} ax + b > 0 & a, b \in R; a \neq 0 \\ ax + b < 0 & a, b \in R; a \neq 0 \\ ax + b \geq 0 & a, b \in R; a \neq 0 \\ ax + b \leq 0 & a, b \in R; a \neq 0 \end{array}$$

Ejemplos: Resolver las siguientes inecuaciones:

1. $3x + 2 < 7$

Resolución

$$3x + 2 < 7$$

$$3x < 5$$

$$x < \frac{5}{3}$$

$$CS = \langle -\infty, \frac{5}{3} \rangle$$

2. $\frac{5x}{3} - 4x \leq 3x + 2$

Resolución

$\frac{5x}{3} - 4x \leq 3x + 2$	$-8x \leq 3$
$\frac{5x}{3} - 4x - 3x \leq 2$	$-x \leq \frac{3}{8}$
$\frac{5x}{3} - 7x \leq 2$	Por Monotonía -Consistencia multiplicativa

$\frac{5x - 21x}{3} \leq 2$ $-16x \leq 6$	$x \geq -\frac{3}{8}$ $CS = \left[-\frac{3}{8}, +\infty\right[$
---	---

3. $x + 1 > 4 \vee x + 2 < -1$

Resolución

$$x + 1 > 4 \quad \vee \quad x + 2 < -1$$

$$x > 3 \quad \vee \quad x < -3$$

$$CS = \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$$

4. $3x - 2 < 5x + 2 \wedge 2(x + 2) \geq 3x + 4$

Resolución

$$3x - 2 < 5x + 2 \quad \wedge \quad 2(x + 2) \geq 3x + 4$$

$$-4 < 2x \quad \wedge \quad 2x + 4 \geq 3x + 4$$

$$-2 < x \quad \wedge \quad 0 \geq x$$



$$CS =]-2, 0]$$

5. $11 - \frac{3x}{2} < \frac{1}{3}(5x + 14) \leq \frac{9}{5}(2 + x)$

Resolución

Para este tipo de inecuación, lo separamos en dos inecuaciones con el conector " $\wedge$ ", que define a la intersección de dos conjuntos.

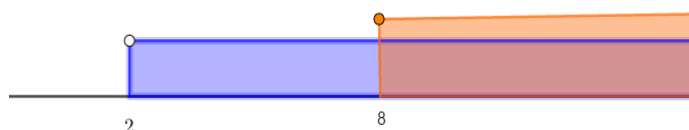
$$11 - \frac{3x}{2} < \frac{1}{3}(5x + 14) \quad \wedge \quad \frac{1}{3}(5x + 14) \leq \frac{9}{5}(2 + x)$$

$$\frac{22 - 3x}{2} < \frac{1}{3}(5x + 14) \quad \wedge \quad 5(5x + 14) \leq 27(2 + x)$$

$$66 - 9x < 10x + 28 \quad \wedge \quad 25x + 70 \leq 54 + 27x$$

$$38 < 19x \quad \wedge \quad 16 \leq 2x$$

$$2 < x \wedge 8 \leq x$$



$$CS = [8, +\infty[$$

Ejercicios

I. Resolver las inecuaciones dadas y dar su respuesta en notación de intervalo y representación en forma geométrica sobre la recta de los números reales.

1. $4 + 9x \geq -2 + 7x$	10. $\frac{3}{5}x + \frac{1}{2} \leq \frac{2}{3} - \frac{5}{6}x$	11. $\frac{x+1}{x-2} > 2$
2. $5 - 3x < 13 + 3x$	11. $\frac{1}{5} < \frac{2-x}{2} < \frac{2}{3}$	12. $\frac{3x-1}{x-3} > 2$
3. $4x - \frac{1}{3} \leq 2x + \frac{3}{4}$	12. $5x - 3 < 18 - 2x \leq 7x + 9$	13. $\frac{4x+1}{5} \geq \frac{3x-2}{3}$
4. $-5x + \frac{2}{3} > -\frac{1}{2}x - 1$	13. $\frac{2-x}{3} < \frac{2x-3}{5} < \frac{1+3x}{2}$	14. $\frac{x+3(x+4)}{4} > 2(x+1)$
5. $-14 \leq 4x - 2 \leq 14$	14. $3x + 5 \leq 12 \leq 4 - 5x$	15. $\frac{2x+1}{5} - \frac{x+1}{2} > \frac{3x-1}{10}$

II. Resolver las siguientes inecuaciones.

1. Hallar el intervalo que recorre "x",

$$\text{si: } \frac{x+1}{3} \leq x - 2 \quad \dots(\text{I})$$

$$x < \frac{x+4}{2} \quad \dots (\text{II})$$

$$2. \quad 2x + 6 \geq 3x + 6 \quad \vee \quad 7x - 4 < 5x + 8$$

$$3. \quad 4x < 1 - \frac{x-2}{2} \quad \wedge \quad 2x < \frac{3x}{-2}$$

$$4. \quad \frac{x}{2} + \frac{6}{5} < \frac{3x}{4} + \frac{11}{5} > 2x - \frac{14}{5}$$

Aplicaciones de inecuaciones lineales

Se sabe que:

$$\text{UTILIDAD} = \text{INGRESO TOTAL} - \text{COSTO TOTAL}$$

OBTENER GANANCIA:

$$\text{UTILIDAD} > 0 \rightarrow \text{INGRESO TOTAL} - \text{COSTO TOTAL} > 0$$

NO OBTENER PÉRDIDA:

$$\text{UTILIDAD} \geq 0 \rightarrow \text{INGRESO TOTAL} - \text{COSTO TOTAL} \geq 0$$

Problemas

1. Un fabricante hizo un cierto número de anillos de compromiso, vende 60 y le quedan por vender más de la mitad. Después hace 8 anillos más y vende 30. ¿Cuántos anillos hizo en total el fabricante si le quedan por vender menos de 40?
2. Una constructora trata de decidir cuál de dos modelos de grúa comprar. El modelo A cuesta \$50 000 y necesita \$4 000 anuales por mantenimiento. El modelo B cuesta \$40 000 y sus costos anuales de mantenimiento son \$5 500. ¿Durante cuántos años debe usarse el modelo B para que sea más económico que el A?
3. Una empresa fabrica un número determinado de computadoras; si duplica su producción y vende 60 le quedan más de 26. Pero si bajara su producción a la tercera parte y vendiera 5, entonces tendría menos de 10 computadoras ¿Cuántas computadoras se fabricaron?
4. Para una compañía que fabrica calentadores para acuarios, el costo combinado de mano de obra y material es de \$21 por calentador. Los costos fijos (costos en que se incurre en un periodo dado, sin importar la producción) son \$70 000. Si el precio de venta de un calentador es \$35, ¿cuántos debe vender para que la compañía genere utilidades?
5. Los niños de una escuela compran x unidades de galletas al precio de $10/x+2$ por unidad. ¿Cuál es el número mínimo de unidades de galletas que deben venderse para que el ingreso sea mayor que S/ 130?

6. Para una compañía que fabrica termostatos, el costo combinado de mano de obras y material es de \$5 por termostato. Los costos fijos (los costos de un periodo dado sin importar la producción) son de \$60 000. Si el precio de venta de un termostato es de \$7, ¿cuántos deben venderse para que la compañía obtenga utilidades?
7. Un constructor debe decidir si renta o compra una máquina excavadora. Si renta la máquina el pago mensual sería de \$600 (con base en un año), y el costo diario (gas, aceite y conductor) sería de \$60 por cada día que sea utilizada. Si la compra, su costo fijo anual sería de \$4000, y los costos por operación y mantenimiento serían de \$80 por cada día que la máquina sea utilizada. ¿Cuál es el número mínimo de días al año que tendría que usarse la máquina para justificar la renta en lugar de la compra?
8. La compañía “Adony” fabrica un producto que tiene un precio unitario de venta de \$20 y un costo unitario de \$15. Si los costos fijos son de \$600 000. Determine el número mínimo de unidades que deben ser vendidas para que la compañía tenga utilidades.
9. Una fábrica de camisetas produce x camisetas a un costo de mano de obra total de $\$1.2x$ y un costo total por material de $\$0.3x$, los gastos generales para la planta son \$ 6 000. Si cada camiseta se vende en \$ 3, ¿cuántas camisetas deben venderse para que la compañía obtenga utilidades?
10. Un comerciante adquirió cierto número de artículos de los que vendió 70 y le quedaron más de la mitad, al día siguiente le devolvieron seis, pero logró vender 36 después de lo cual le quedaron menos de 42. ¿Cuántos artículos adquirió el comerciante?
11. Richard, se dedica a la venta de sándwich de pollo. El precio de venta al público es de S/ 1.50 cada uno. Si el costo unitario de S/ 0.80 y los costos fijos de S/ 20 determinar el número de sándwiches de pollo que deben venderse para que Richard no tenga pérdidas.
12. Un fabricante tiene 2 500 unidades de un producto. El precio unitario del producto es S/ 4 000. El próximo mes el precio por unidad se incrementará en S/ 0.50. El fabricante quiere que el ingreso total recibido por la venta de las 2500 unidades no sea menor que S/ 10 750, ¿Cuál es el número máximo de unidades que pueden venderse al mes?

1.6.2 Inecuaciones de Segundo Grado (Cuadrática)

Se dice inecuación cuadrática o de segundo grado, en la variable x aquella que se puede expresar como:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &> 0 \\ ax^2 + bx + c &\geq 0 \\ ax^2 + bx + c &< 0 \\ ax^2 + bx + c &\leq 0 \end{aligned} \quad a, b, c \in \mathbb{R}/a \neq 0$$

Métodos para resolver una Inecuación Cuadrática

I. Según sea el caso, se puede aplicar los teoremas, proposición y/o corolarios de números reales siguientes:

Teorema 2. $a^2 \geq b \Leftrightarrow (b \geq 0) \wedge (a \geq \sqrt{b} \vee a \leq -\sqrt{b})$

Teorema 3. $a^2 \leq b \Leftrightarrow (b \geq 0) \wedge (-\sqrt{b} \leq a \leq \sqrt{b})$

Proposición 1.

- i. $ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a > 0 \wedge b^2 - 4ac < 0$
- ii. $ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a < 0 \wedge b^2 - 4ac < 0$

Corolario 1. Tenemos los siguientes casos especiales:

- i. $a^2 \geq 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R}$
- ii. $a^2 > 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R} - \{0\}$
- iii. $a^2 \leq 0 \Rightarrow a = 0$
- iv. $a^2 < 0 \Rightarrow a$ no existe

Ejemplos: Resolver las siguientes inecuaciones cuadráticas:

1. $x^2 > 9$

Resolución

Aplicando el teorema 2:

$$\begin{aligned} x^2 > 9 &\Leftrightarrow x > \sqrt{9} \vee x < -\sqrt{9} \\ &\Leftrightarrow x > 3 \vee x < -3 \end{aligned}$$

$$CS = \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$$

$$2. \quad -4x^2 + 4x + 5 > 0$$

Resolución

En este caso multiplicamos la desigualdad por (-1) , para convertir en positivo el coeficiente de x^2

$$4x^2 - 4x - 5 < 0 \dots (*)$$

Ahora multiplicamos a $(*)$ por $\left(\frac{1}{4}\right)$

$$x^2 - x - \frac{5}{4} < 0$$

Para llegar a la forma del teorema 3, completamos cuadrados

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} < 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{5}{4} < 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{6}{4}$$

Ahora aplicamos el teorema 3

$$-\sqrt{\frac{6}{4}} < x - \frac{1}{2} < \sqrt{\frac{6}{4}}$$

$$-\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{2} < x < \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1 - \sqrt{6}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{6}}{2}$$

$$CS = \left\langle \frac{1 - \sqrt{6}}{2}, \frac{1 + \sqrt{6}}{2} \right\rangle$$

Resolución

Aplicando el corolario 1.i., tenemos:

$$x - 4 \in R \Rightarrow x \in R$$

$$CS = R$$

3. $(x - 4)^2 > 0$

Resolución

Aplicando el corolario 1.i., tenemos:

$$x - 4 \in R \Rightarrow x \in R$$

$$CS = R$$

4. $(x - 4)^2 \leq 0$

Resolución

Aplicando el corolario 1.iii., tenemos:

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$CS = \{4\}$$

5. $(x - 4)^2 < 0$

Resolución

Aplicando el corolario 1.iv., tenemos:

$$x - 4 \text{ no existe}$$

$$x \text{ no existe}$$

$$CS = \phi$$

6. Hallar los valores reales que tiene " k " si $x^2 + 3kx + 3 > 0, \forall x \in R$

Resolución

Aplicando la proposición 1.i.

$$x^2 + 3kx + 3 > 0, \forall x \in R \Leftrightarrow b^2 - 4ac < 0$$

$$\Rightarrow (3k)^2 - 4(1)(3) < 0$$

$$9k^2 - 12 < 0$$

$$3k^2 < 4 \Rightarrow k^2 < \frac{4}{3}$$

Aplicando el teorema 3, obtenemos

$$-\sqrt{\frac{4}{3}} < k < \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}} < k < \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Luego } k \in \left\langle -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right\rangle$$

$$7. \quad x^2 - x < 2x^2 - 2 < x^2 + 2$$

Resolución

En este caso separamos en dos inecuaciones con el conectivo " $\wedge$ ", que define a la intersección de dos conjuntos.

$$x^2 - x < 2x^2 - 2 \quad \wedge \quad 2x^2 - 2 < x^2 + 2$$

$$0 < x^2 + x - 2 \quad \wedge \quad x^2 - 4 < 0$$

$$0 < x^2 + x - 2 \quad \wedge \quad x^2 < 4$$

Completando cuadrados y aplicando el teorema 3

$$0 < \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 \quad \wedge \quad -2 < x < 2$$

$$0 < \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \quad \wedge \quad -2 < x < 2$$

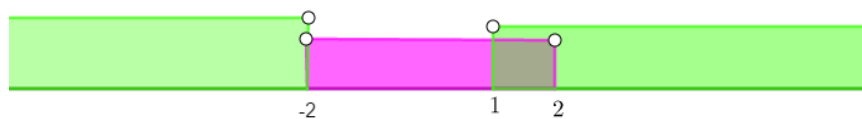
$$\frac{9}{4} < \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \quad \wedge \quad -2 < x < 2$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{9}{4} \quad \wedge \quad -2 < x < 2$$

Aplicando el teorema 2

$$\left[x + \frac{1}{2} > \frac{3}{2} \quad \vee \quad x + \frac{1}{2} < -\frac{3}{2}\right] \wedge \quad -2 < x < 2$$

$$[x > 1 \quad \vee \quad x < -2] \quad \wedge \quad -2 < x < 2$$



$$CS = \langle 1, 2 \rangle$$

II. Regla de signos

En este caso aplicaremos las siguientes propiedades:

$$1) \quad ab \geq 0 \Leftrightarrow [a \geq 0 \wedge b \geq 0] \vee [a \leq 0 \wedge b \leq 0]$$

$$2) \quad ab \leq 0 \Leftrightarrow [a \geq 0 \wedge b \leq 0] \vee [a \leq 0 \wedge b \geq 0]$$

Ejemplos: Resolver las siguientes inecuaciones cuadráticas:

$$1. \quad 4x^2 - x - 5 \leq 0$$

Resolución

$$4x^2 - x - 5 \leq 0$$

Aplicando el aspa simple obtenemos

$$(4x - 5)(x + 1) \leq 0$$

Aplicando la regla de signos II. 2)

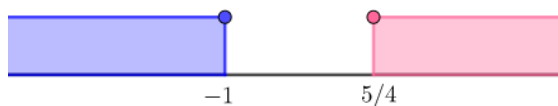
$$[4x - 5 \geq 0 \quad \wedge \quad x + 1 \leq 0] \quad \vee \quad [4x - 5 \leq 0 \quad \wedge \quad x + 1 \geq 0]$$

$$[4x \geq 5 \quad \wedge \quad x \leq -1] \quad \vee \quad [4x \leq 5 \quad \wedge \quad x \geq -1]$$

$$\left[x \geq \frac{5}{4} \wedge x \leq -1 \right]$$

v

$$\left[x \leq \frac{5}{4} \wedge x \geq -1 \right]$$



v



$$CS_1 = \emptyset$$

v

$$CS_2 = \left[-1, \frac{5}{4} \right]$$

$$\therefore CS = \emptyset \cup \left[-1, \frac{5}{4} \right]$$

$$CS = \left[-1, \frac{5}{4} \right]$$

$$2. -4x^2 - 8 < -12x$$

Resolución

$$-4x^2 - 8 < -12x$$

$$0 < 4x^2 - 12x + 8$$

$$4x^2 - 12x + 8 > 0$$

Multiplicando por $\frac{1}{4}$

$$x^2 - 3x + 2 > 0$$

Aplicando aspa simple obtenemos

$$(x - 2)(x - 1) > 0$$

Aplicando la regla de signos II. 1)

$$[x - 2 > 0 \wedge x - 1 > 0]$$

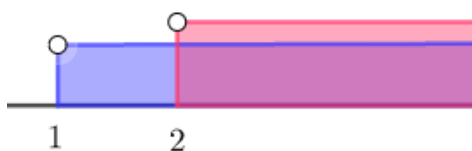
v

$$[x - 2 < 0 \wedge x - 1 < 0]$$

$$[x > 2 \wedge x > 1]$$

v

$$[x < 2 \wedge x < 1]$$



v



$$CS_1 = \langle 2, +\infty \rangle$$

∨

$$CS_2 = \langle -\infty, 1 \rangle$$

$$\therefore CS = \langle -\infty, 1 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$$

III. Método práctico

Si $ax^2 + bx + c$, donde $a > 0$ es de fácil factorización, cualquier inecuación cuadrática se pueden resolver fácilmente, ubicando en la recta real los puntos referenciales (las raíces de la ecuación cuadrática que son reales y diferentes) y asignando al primer intervalo de la derecha, el signo "+", luego al siguiente intervalo de la izquierda el signo "-", después al siguiente intervalo el signo "+"; Y para elegir el conjunto solución miramos la inecuación que nos pregunta.

Ejemplos: Resolver las siguientes inecuaciones cuadráticas:

1. $x^2 + x > 6$

Resolución

$$x^2 + x - 6 > 0$$

factorizando

$$(x - 2)(x + 3) > 0$$

Para obtener los puntos de referencia o las raíces (puntos críticos) igualamos cada factor a cero.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

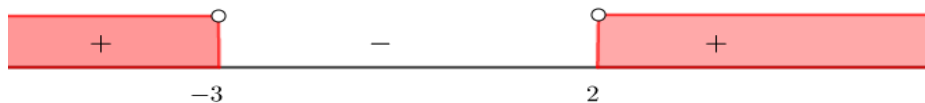
$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

Ubicamos los puntos referenciales en la recta real, que lo dividirá en tres intervalos, y colocamos los signos alternadamente empezando del intervalo de la derecha.



Luego elegimos el signo según la pregunta $x^2 + x - 6 > 0$

en este caso el signo " + "



Así el conjunto solución será

$$CS = \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$$

2. $-4x^2 + 4x + 3 > 0$

Resolución

$$-4x^2 + 4x + 3 > 0$$

Multiplicamos a la desigualdad por (-1)

$$4x^2 - 4x - 3 < 0$$

Factorizando obtenemos

$$(2x + 1)(2x - 3) < 0$$

Igualamos a cero cada factor, para obtener los puntos críticos

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Luego colocamos los puntos de referencia en la recta real, colocamos los signos de forma alternada en los intervalos y escogemos el signo que corresponda a la inecuación $4x^2 - 4x - 3 < 0$



$$CS = \langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle$$

1.6.3 Inecuaciones Racionales

Son inecuaciones racionales $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, además tenemos que tener en cuenta que $Q(x) \neq 0$

Si multiplicamos las inecuaciones por $Q^2(x)$, entonces obtenemos

$$P(x)Q(x) < 0, \quad P(x)Q(x) \leq 0, \quad P(x)Q(x) > 0, \quad P(x)Q(x) \geq 0$$

Luego resolvemos estas inecuaciones por la regla de signos ó por el método práctico (puntos críticos).

Resolución de una Inecuación por Puntos Críticos

Para resolver una inecuación por este método, hay que tener en cuenta

- Se trasladan todos los términos al primer miembro, obteniendo siempre una expresión de coeficiente principal positivo y el segundo miembro será cero.
- Se hallan todos los factores primos de la expresión obtenida.
- Se calculan los puntos críticos, que son obtenidos al igualar cada factor primo a cero.
- Se ubican ordenadamente todos los puntos críticos en la recta real, dichos puntos originan en la recta dos o más intervalos.

Caso I: Si los puntos críticos son reales y diferentes

- Se marcan los intervalos obtenidos a partir de la derecha alternando los signos $(+), (-), (+), \dots$
- Si el signo de relación es $> \text{ ó } \geq$, el conjunto solución estará conformado por todos los intervalos positivos, pero si el signo de relación es $< \text{ ó } \leq$, el conjunto solución lo conformarán todos los intervalos negativos.

Caso II: Si los puntos críticos son reales e iguales de multiplicidad impar, se trabaja como en el caso I.

Si los puntos críticos son reales e iguales de multiplicidad par, se repite el signo en los intervalos correspondientes.

Caso III: Si los puntos críticos son no reales (complejos), simplemente no lo consideramos en la recta real.

Ejemplos: Resolver las siguientes inecuaciones fraccionarias:

1. $\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-42} \geq 0$

Resolución

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 42} \geq 0$$

Factorizamos el numerador y denominador

$$\frac{(x-3)(x-2)}{(x-6)(x+7)} \geq 0$$

Para obtener los puntos críticos, igualamos a cero cada factor primo

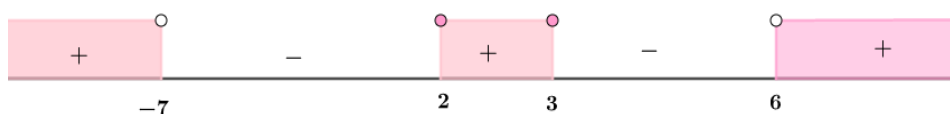
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$$

$$x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$$

Colocamos los puntos críticos en la recta real ordenadamente, considerando que los puntos críticos del denominador siempre irán abiertos; luego trabajamos con el caso I.



$$CS = \langle -\infty, -7 \rangle \cup [2, 3] \cup \langle 6, +\infty \rangle$$

2. $\frac{x-5}{7-x} \geq 0$

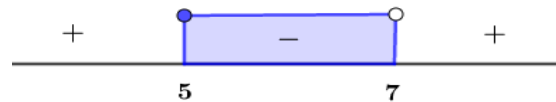
Resolución

$$\frac{x-5}{7-x} \geq 0$$

En este caso multiplicaremos a la inecuación por (-1) , puesto que el factor lineal del denominador, su coeficiente principal debe ser positivo, así poder aplicar el método de los puntos críticos.

$$\frac{x-5}{x-7} \leq 0$$

Aplicando el caso I, obtenemos



$$CS = [5, 7[$$

3. $\frac{5x-2}{x} - 4 < 0$

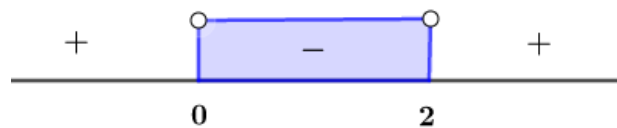
Resolución

$$\frac{5x-2}{x} - 4 < 0$$

Sacando el mínimo común múltiplo

$$\frac{x-2}{x} < 0$$

Aplicando el caso I, obtenemos



$$CS = \langle 0, 2 \rangle$$

4. $\frac{x-2}{x+3} < \frac{x+1}{x}$

Resolución

$$\frac{x-2}{x+3} < \frac{x+1}{x}$$

Trasladamos todos los términos al primer miembro y el segundo miembro será cero

$$\frac{x-2}{x+3} - \frac{x+1}{x} < 0$$

Sacando el mínimo común múltiplo

$$\frac{x(x-2) - (x+3)(x+1)}{x(x+3)} < 0$$

$$\frac{x^2 - 2x - (x^2 + 4x + 3)}{x(x+3)} < 0$$

$$\frac{-2x - 4x - 3}{x(x+3)} < 0$$

$$\frac{-6x - 3}{x(x+3)} < 0$$

multiplicaremos a la inecuación por (-1) , puesto que el factor lineal del numerador, su coeficiente principal debe ser positivo, así poder aplicar el método de los puntos críticos.

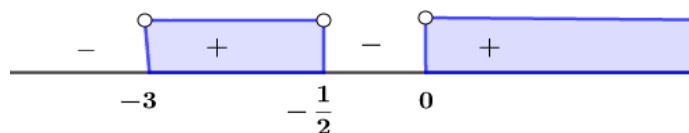
$$\frac{6x+3}{x(x+3)} > 0$$

$$\frac{3(2x+1)}{x(x+3)} > 0$$

Multiplicando por $(\frac{1}{3})$, obtenemos:

$$\frac{(2x+1)}{x(x+3)} > 0$$

Aplicando el caso I, obtenemos



$$CS = \langle -3, -\frac{1}{2} \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle$$

Ejercicios:

I. Resolver las siguientes inecuaciones cuadráticas:

1. $x^2 - 5x - 6 \geq 0$	8. $(2x + 1)^2 \leq 0$
2. $x^2 < 25$	9. $x^2 \leq 4x$
3. $x^2 > 25$	10. $(x - 3)(x - 5) < 0$
4. $x^2 - 11x + 28 > 0$	11. $2x^2 - 6x + 3 < 0$
5. $(2x + 1)^2 > 0$	12. $2x^2 + 6x - 9 < 0$
6. $(2x + 1)^2 \geq 0$	13. $x(3x + 2) < (x + 2)^2$
7. $(2x + 1)^2 < 0$	

II. Resolver las siguientes inecuaciones fraccionarias:

1. $\frac{3x-1}{x-3} > 2$	8. $\frac{x}{1-x} \leq \frac{x-3}{2-x}$
2. $\frac{x+1}{x-2} > 2$	9. $\frac{(x^2-1)(x+3)(x-2)}{(x-5)(x+7)} > 0$
3. $\frac{3x+5}{2x+1} \leq 3$	10. $\frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x} < \frac{2x}{x+1}$
4. $\frac{x-5}{x-7} \leq 0$	11. $\frac{3x-2}{x+1} < \frac{4}{x-2}$
5. $\frac{9x+10}{x+2} < 2$	12. $\frac{6}{x-1} - \frac{5}{x-2} > -2$
6. $\frac{3x^2+1}{x^2-x-2} \geq 3$	13. $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} > -3$
7. $\frac{x^2-5}{x^2-x-12} < 1$	14. $\frac{x+4}{x-5} < \frac{x-2}{x+3}$

Problemas con Inecuaciones Cuadráticas

- Una fábrica de cierto artículo ha estimado que su ganancia en miles de soles está dada por $f(x) = -x^2 + 582x - 76$ donde x (en miles) es el número de unidades producidas. ¿Qué nivel de producción le permitirá obtener una ganancia de al menos S/14 000?
- Las ventas mensuales " x " de cierto producto cuando su precio es " y " dólares están dada por $y = 200 - 3x$. El costo de producir x unidades al mes del producto es $C = 650 + 5x$ dólares. ¿Cuántas unidades de este producto deberán producirse y venderse de modo que la utilidad mensual sea por lo menos de 2 200 dólares?

3. La peluquería “Fanny” tiene en promedio de 120 clientes semanales a un costo actual de $S/8$ por corte de cabello. Por cada incremento de $S/0.50$ en el precio, la peluquería perdería 6 clientes. ¿Cuál debe ser el precio máximo que puede cobrarse de modo que los ingresos semanales no sean menores que los actuales?
4. En el mercado se puede venderse “ x ” unidades de cierto artículo al mes, a $p = 500 - 5x$. ¿Cuántas unidades deberán venderse cada mes con el objeto de obtener ingresos de por lo menos \$ 12 500?
5. El costo de producir “ x ” lámparas esta dado por $C = 300 + 70x + x^2$. Si estas se pueden vender a 140 soles. ¿Cuántas deben producirse y venderse para obtener utilidades mensuales de al menos 900 soles?
6. Un fabricante de cierto artículo puede vender al precio de 60 soles cada artículo que produce. Gasta 40 soles en materia prima y mano de obra por artículo y tiene costos fijos de 3 000 soles a la semana en la operación de la planta. Encuentre el número de unidades que debería producir y vender para obtener una utilidad de al menos 1 000 soles a la semana.
7. Para una compañía que fabrica calentadores para acuarios el costo combinado de mano de obra y material es de $S/21$ por calentador. Los costos fijos son $S/70\,000$. Si el precio de venta de un calentador es $S/35$ ¿Cuánto debe vender para que la compañía genere utilidades?
8. El ingreso mensual obtenido por la venta de “ x ” cajas de dulces está dado por $I = x(5 - 0.5x)$ soles. El costo al por mayor de cada caja es 1.50 soles ¿Cuántas cajas deben venderse cada mes para obtener una ganancia de al menos 60 soles?
9. Si el precio “ p ” de cierto artículo depende de la cantidad demandada “ q ” y está dado por $p = 120 - 2q$, y además se tienen costos fijos de $S/300$ y el costo de producción de cada unidad es de $S/20$. ¿Cuántas unidades deben producirse y venderse para obtener utilidades de al menos $S/900$?

10. Una compañía de belleza vende 300 unidades de un cosmético cuando su precio unitario es de $S/60$. Por cada disminución de $S/5$ en el precio se venderán 45 unidades más. ¿Qué precio máximo deberá fijar para obtener ingresos de al menos $S/19\ 500$?

1.6.4 Inecuaciones Polinómicas

Para resolver las inecuaciones polinómicas factorizables usaremos el método de los puntos críticos.

Ejemplos: Resolver las siguientes inecuaciones polinómicas:

1. $x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 < 0$

Resolución

Como el polinomio está ordenado y completo, lo factorizamos con el método de Ruffini

	1	-3	-15	19	30
$x=-1$		-1	4	11	-30
	1	-4	-11	30	0
$x=2$		2	-4	-30	
	1	-2	-15	0	
$x=-3$		-3	15		
	1	-5	0		
$x=5$		5			
	1	0			

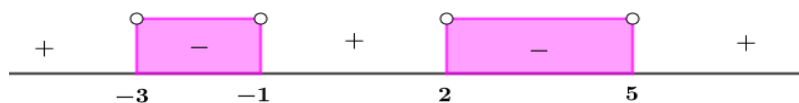
Luego el polinomio queda factorizado de la siguiente manera:

$$(x + 1)(x - 2)(x + 3)(x - 5) < 0$$

Donde los puntos críticos son reales y diferentes:

$$\begin{aligned} x &= -3 \\ x &= -1 \\ x &= 2 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Aplicando el caso I, del método de los puntos críticos obtenemos:



$$CS = \langle -3, -1 \rangle \cup \langle 2, 5 \rangle$$

2. $(x^2 + 2x - 3)(3x - 4 + x^2) > 0$

Resolución

$$(x^2 + 2x - 3)(3x - 4 + x^2) > 0$$

Ordenamos y factorizamos

$$(x + 3)(x - 1)(x^2 + 3x - 4) > 0$$

$$(x + 3)(x - 1)(x + 4)(x - 1) > 0$$

$$(x + 3)(x + 4)(x - 1)^2 > 0$$

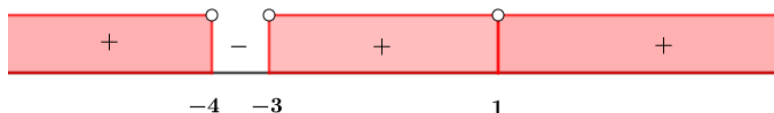
Luego tenemos los puntos críticos

$$x = -4$$

$$x = -3$$

$$x = 1 \text{ de multiplicidad } 2 \text{ (par)}$$

Aplicando el caso I y II, obtenemos



$$CS = \langle -\infty, -4 \rangle \cup \langle -3, 1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$$

O también se puede poner como respuesta, el equivalente:

$$CS = \langle -\infty, -4 \rangle \cup \langle -3, +\infty \rangle - \{1\}$$

3. $(x + 3)(x + 4)(x - 1)^2 \geq 0$

Resolución

$$(x + 3)(x + 4)(x - 1)^2 \geq 0$$

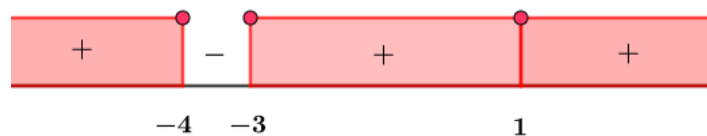
Podemos observar que se trata del mismo polinomio del ejemplo anterior entonces los puntos críticos son:

$$x = -4$$

$$x = -3$$

$$x = 1 \text{ de multiplicidad 2 (par)}$$

Aplicando el caso I y II, obtenemos:



$$CS =]-\infty, -4] \cup [-3, +\infty[$$

$$4. (x+3)(x+4)(x-1)^2 < 0$$

Resolución

$$(x+3)(x+4)(x-1)^2 < 0$$

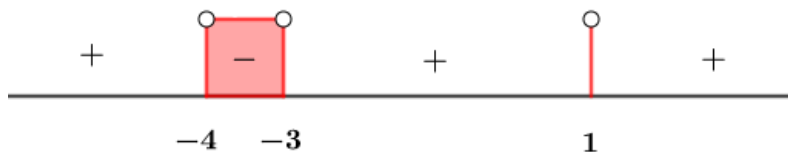
Observemos que se trata del mismo polinomio del ejemplo anterior entonces los puntos críticos son:

$$x = -4$$

$$x = -3$$

$$x = 1 \text{ de multiplicidad 2 (par)}$$

Aplicando el caso I y II del método de los puntos críticos, obtenemos:



$$CS = \langle -4, -3 \rangle$$

$$5. (x+3)(x+4)(x-1)^2 \leq 0$$

Resolución

$$(x+3)(x+4)(x-1)^2 \leq 0$$

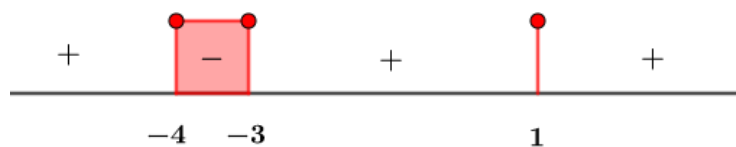
Observemos que se trata del mismo polinomio del ejemplo anterior entonces los puntos críticos son:

$$x = -4$$

$$x = -3$$

$$x = 1 \text{ de multiplicidad 2 (par)}$$

Aplicando el caso I y II del método de los puntos críticos, obtenemos



$$CS = [-4, -3] \cup \{1\}$$

$$6. \quad x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 6x + 8 \geq 0$$

Resolución

Como el polinomio está ordenado y completo, lo factorizamos con el método de Ruffini

	1	-5	5	-3	-6	8
$x=1$		1	-4	1	-2	-8
	1	-4	1	-2	-8	0
$x=-1$		-1	5	-6	8	
	1	-5	6	-8	0	
$x=4$		4	-4	8		
	1	-1	2	0		

Luego el polinomio queda factorizado de la siguiente manera:

$$(x - 1)(x + 1)(x - 4)(x^2 - x + 2) \geq 0$$

Observemos que el factor $x^2 - x + 2$ no se puede factorizar en los reales, puesto que su discriminante es negativa

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(2) = -7 < 0$$

Lo que significa que el factor $x^2 - x + 2$ es complejo, por lo que aplicamos el caso III del método de los puntos críticos, es decir no consideramos ese factor complejo, luego la pregunta se reduce a:

$$(x - 1)(x + 1)(x - 4) \geq 0$$

Donde los puntos críticos son reales y diferentes

$$x = -1$$

$$x = 1$$

$$x = 4$$

Ahora aplicamos el caso I del método de los puntos críticos, obtenemos:



$$CS = [-1, 1] \cup [4, +\infty[$$

Ejercicios

Resolver las siguientes inecuaciones polinómicas

1. $x^3 + x^2 \leq 4x + 4$
2. $x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 14x - 8 \geq 0$
3. $(x^3 + x^2 - 9x - 9)(x - 2)^3 < 0$
4. $2x^3 + 7x^2 + 2x - 3 < 0$
5. $(x - 2 + x^2)(x^2 + 2x - 8) < 0$
6. $4x^4 + 4x^3 + x^2 + 4x - 3 \leq 0$
7. $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 > 0$
8. $(4 - x^2)(8 - x^3) \leq 0$
9. $1 + x - x^2 - x^3 \leq 0$
10. $(x - x^3)(1 - x) < 0$

1.7 Valor Absoluto

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Se lee como: el valor absoluto de número real " a " es igual al mismo número " a ", si a es positivo o cero, o es igual a " $-a$ ", si a es negativo.

Propiedades

1. $\forall a \in R, \text{ se cumple } |a| \geq 0$

$$2. |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$3. |ab| = |a||b|$$

$$4. \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$$

$$5. |a|^2 = a^2$$

$$6. |a| = |-a|$$

$$7. \forall a \in R, |a| \geq a$$

$$8. |a + b| \leq |a| + |b| \text{ (Desigualdad triangular)}$$

$$9. |a| = b, b \geq 0 \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$$

$$10. |a| = |b| \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$$

$$11. |a| \leq b, b \geq 0 \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$$

$$12. |a| \geq b, \forall b \in R \Leftrightarrow a \geq b \vee a \leq -b$$

$$13. |a| < |b| \Rightarrow a^2 < b^2$$

Desigualdad Triangular

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Prueba

$$|a + b|^2 = (a + b)^2 \quad \text{propiedad 5}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ binomio al cuadrado}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2 \text{ propiedad 5}$$

$$|a|^2 + 2ab + |b|^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \text{ propiedad 7}$$

$$|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2 \text{ Trinomio cuadrado perfecto}$$

$$|a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2 \text{ axioma de transitividad}$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \text{ propiedad 30 de numeros reales.}$$

Ejemplos

Para resolver ejercicios y/o problemas con valor absoluto aplicamos la definición y/o propiedades

$$1. |3x - 1| = 2x + 5$$

Resolución

Aplicamos la propiedad 9: $|a| = b, b \geq 0 \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$

$$\text{Si } 2x + 5 \geq 0 \Rightarrow 3x - 1 = 2x + 5 \vee 3x - 1 = -(2x + 5)$$

$$x \geq -\frac{5}{2} \wedge (x = 6 \vee 3x - 1 = -2x - 5)$$

$$x \geq -\frac{5}{2} \wedge (x = 6 \vee 5x = -4)$$

$$x \geq -\frac{5}{2} \wedge \left(x = 6 \vee x = -\frac{4}{5}\right)$$

$$\text{Como } 6 \geq -\frac{5}{2} \text{ y } -\frac{4}{5} \geq -\frac{5}{2}$$

$$\text{Luego } CS = \left\{6, -\frac{4}{5}\right\}$$

$$2. |2x + 3| + 4 = 5x$$

Resolución

$$|2x + 3| + 4 = 5x$$

$$|2x + 3| = 5x - 4$$

Aplicamos la propiedad 9: $|a| = b, b \geq 0 \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$

$$\text{Si } 5x - 4 \geq 0 \Rightarrow 2x + 3 = 5x - 4 \vee 2x + 3 = -(5x - 4)$$

$$x \geq \frac{4}{5} \wedge (3x = 7 \vee 2x + 3 = -5x + 4)$$

$$x \geq \frac{4}{5} \wedge \left(x = \frac{7}{3} \vee 7x = 1\right)$$

$$x \geq \frac{4}{5} \wedge \left(x = \frac{7}{3} \vee x = \frac{1}{7}\right)$$

$$\text{Como } \frac{7}{3} \geq \frac{4}{5} \text{ y } \frac{1}{7} \not\geq \frac{4}{5}$$

$$\text{Luego } CS = \left\{\frac{7}{3}\right\}$$

$$3. |3x - 1| = |5x - 15|$$

Resolución

$$|3x - 1| = |5x - 15|$$

Aplicamos la propiedad 10: $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$

$$3x - 1 = 5x - 15 \vee 3x - 1 = -(5x - 15)$$

$$2x = 14 \vee 3x - 1 = -5x + 15$$

$$x = 7 \vee 8x = 16$$

$$x = 7 \vee x = 2$$

$$CS = \{2, 7\}$$

4. $|2x - 3| + 2 = |x - 6|$

Resolución

$$|2x - 3| + 2 = |x - 6|$$

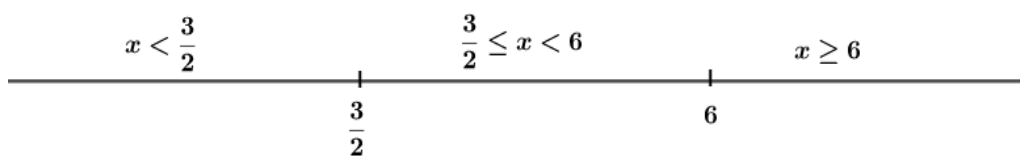
Para resolver ecuaciones con 2 o mas valores absolutos, lo haremos con el método de los puntos críticos.

Igualamos cada valor absoluto a cero para encontrar los puntos críticos.

$$|2x - 3| = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$|x - 6| = 0 \Rightarrow x = 6$$

Colocamos los puntos críticos en la recta real, que lo dividirá en intervalos.



Luego resolveremos la ecuación en cada intervalo, para saber la respuesta de cada valor absoluto tomaremos cualquier valor del intervalo:

$x < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} \leq x < 6$	$x \geq 6$
$x < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} \leq x < 6$	$x \geq 6$
Si $x = 0 \Rightarrow 2(0) - 3 = -3$ es negativo luego $ 2x - 3 = 3 - 2x$	Si $x = 2 \Rightarrow 2(2) - 3 = 1$ es positivo luego $ 2x - 3 = 2x - 3$	Si $x = 6 \Rightarrow 2(6) - 3 = 9$ es positivo luego $ 2x - 3 = 2x - 3$
Si $x = 0 \Rightarrow 0 - 6 = -6$ es negativo luego $ x - 6 = 6 - x$	Si $x = 2 \Rightarrow 2 - 6 = -4$ es negativo luego $ x - 6 = 6 - x$	Si $x = 6 \Rightarrow 6 - 6 = 0$ es cero luego $ x - 6 = x - 6$
Asi $ 2x - 3 + 2 = x - 6 $ $3 - 2x + 2 = 6 - x$ $x = -1$ $-1 < \frac{3}{2}$	Asi $ 2x - 3 + 2 = x - 6 $ $2x - 3 + 2 = 6 - x$ $x = \frac{7}{3}$ $\frac{3}{2} \leq \frac{7}{3} < 6$	Asi $ 2x - 3 + 2 = x - 6 $ $2x - 3 + 2 = x - 6$ $x = -5$ -5 no es mayor que 6

Por tanto tenemos que $CS = \left\{-1, \frac{7}{3}\right\}$

5. $|x - 2| < \frac{4-x}{x}$

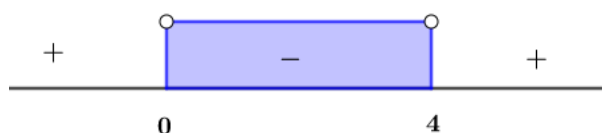
Resolución

$$|x - 2| < \frac{4-x}{x}$$

Aplicamos la propiedad 11: $|a| < b, b > 0 \Leftrightarrow -b < a < b$

Primero determinamos el universo ($b > 0$)

$$\frac{4-x}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-4}{x} < 0$$



Luego tenemos el universo: $U = \langle 0, 4 \rangle$

$$-\frac{4-x}{x} < x-2 < \frac{4-x}{x}$$

$$-\frac{4-x}{x} < x-2 \quad \wedge \quad x-2 < \frac{4-x}{x}$$

$$-\frac{4-x}{x} - x + 2 < 0 \quad \wedge \quad x-2 - \frac{4-x}{x} < 0$$

$$\frac{x-4}{x} - x + 2 < 0 \quad \wedge \quad \frac{x^2 - 2x - 4 + x}{x} < 0$$

$$\frac{x-4-x^2+2x}{x} < 0 \quad \wedge \quad \frac{x^2 - 2x - 4 + x}{x} < 0$$

$$\frac{x^2 - 3x + 4}{x} > 0 \quad \wedge \quad \frac{x^2 - x - 4}{x} < 0$$

Observemos que el factor $x^2 - 3x + 4$ es complejo, puesto que

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(4)$$

$$\Delta = -7 < 0$$

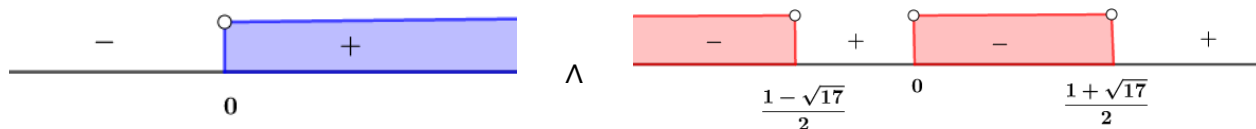
Cuando tenemos un factor complejo, no lo consideramos (caso III, del método de puntos críticos)

Por otro lado, las raíces (puntos críticos) del factor $x^2 - x - 4$ son:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-4)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

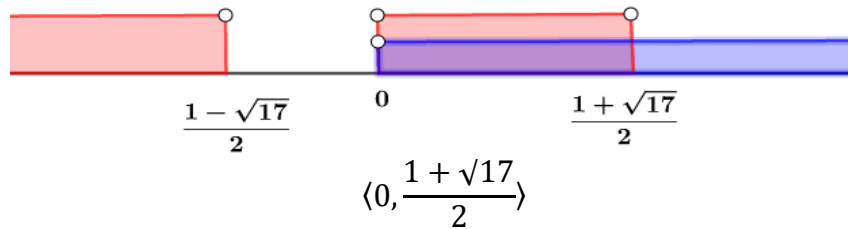
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Luego tenemos } \frac{1}{x} > 0 \quad \wedge \quad \frac{\left(x - \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)}{x} < 0$$

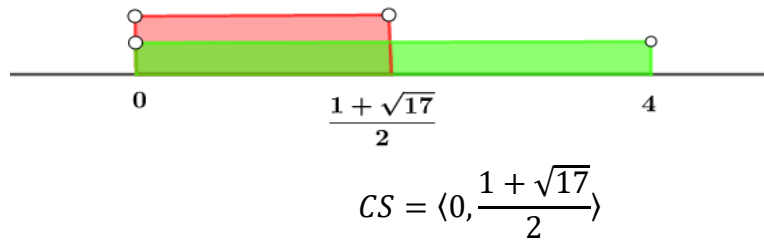


$$\langle 0, +\infty \rangle \quad \wedge \quad \langle -\infty, \frac{1-\sqrt{17}}{2} \rangle \cup \langle 0, \frac{1+\sqrt{17}}{2} \rangle$$

Interceptando se obtiene:



Ahora este resultado falta interceptar con el universo, para llegar a la respuesta final.



6. $|3x + 1| > x - 2$

Resolución

$$|3x + 1| > x + 2$$

Aplicamos la propiedad 12: $|a| > b, \forall b \in R \Leftrightarrow a > b \vee a < -b$

$$3x + 1 > x + 2 \vee 3x + 1 < -(x + 2)$$

$$2x > 1 \vee 3x + 1 < -x - 2$$

$$x > \frac{1}{2} \vee 4x < -3$$

$$x > \frac{1}{2} \vee x < -\frac{3}{4}$$

$$CS = \langle -\infty, -\frac{3}{4} \rangle \cup \langle \frac{1}{2}, +\infty \rangle$$

7. $|x - 2| + |x + 5| < 3x + 2$

Resolución

$$|x - 2| + |x + 5| < 3x + 2$$

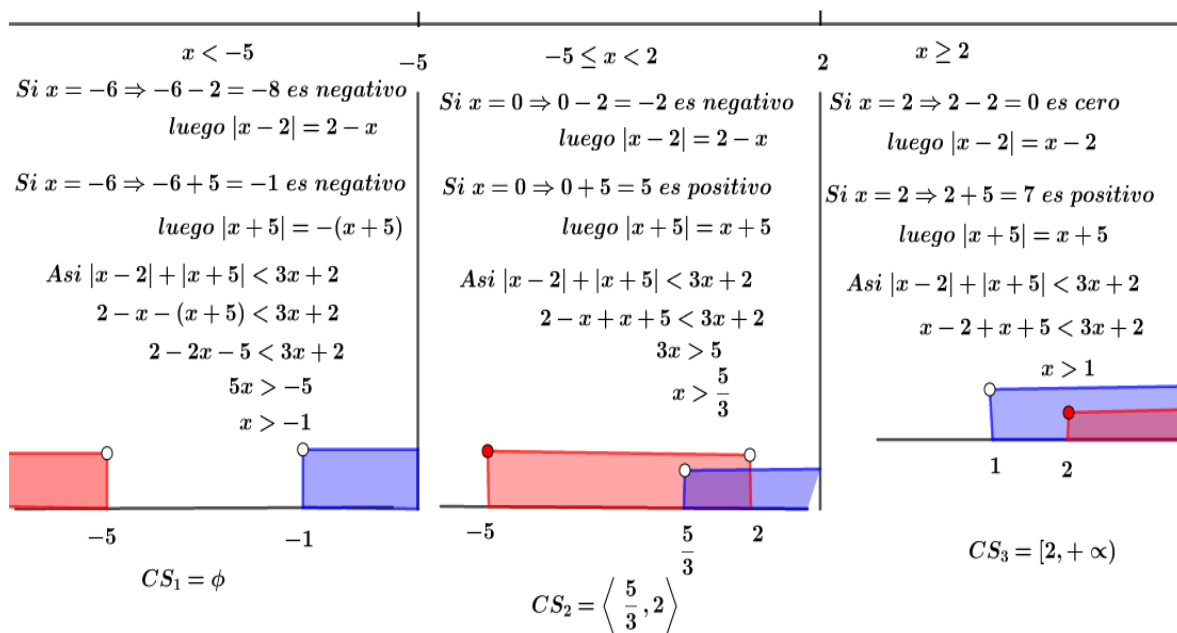
En este caso aplicaremos el método de los puntos críticos.

Iguamos cada valor absoluto a cero para encontrar los puntos críticos.

$$|x - 2| = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$|x + 5| = 0 \Rightarrow x = -5$$

Colocamos los puntos críticos en la recta real, que lo dividirá en intervalos



Por tanto, tenemos: $CS = \emptyset \cup \left(\frac{5}{3}, 2 \right) \cup [2, +\infty[$

$$CS = \left(\frac{5}{3}, +\infty \right)$$

Ejercicios

Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto:

- $|x^2 - 4| = 4 - 2x$
- $|2x + 9| = x - 1$
- $|3x - 1| = 7 - x$
- $|2x - 6| = |4 - 5x|$
- $|3x - 1| - |x + 2| = 1$
- $|2x - 3| - 1 = |x - 3|$
- $|x^2 - 6x + 8| \leq x - 4$
- $\left| \frac{x-2}{x-1} \right| < x - 1$
- $|2x + 1| < 2x - 1$
- $|x - 3| > 2$

$$11. |5x - 2| \geq 4x$$

$$12. |2x - 1| \geq x - 1$$

$$13. \frac{|x-1|+|x-2|}{|x|-3} < 3$$

$$14. |x - 5| - |x - 2| < |x - 1| + 3 - x$$

1.8 Ecuaciones e Inecuaciones con Radicales

Para resolver ecuaciones con radicales usaremos los siguientes teoremas:

$$\text{T1: Si } a \geq 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2$$

$$\text{T2: } \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Leftrightarrow 0 \leq a \leq b$$

$$\text{T3: } \sqrt{a} \leq b \Leftrightarrow \text{Si } a \geq 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow a \leq b^2$$

$$\text{T4: } \sqrt{a} \geq b \Leftrightarrow [a \geq 0 \wedge b < 0] \vee [a \geq b^2 \wedge b \geq 0]$$

$$\text{T5: } \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0 \wedge b \geq 0$$

$$\text{T6: } \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$$

$$\text{T7: } \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq k, k \geq 0 \Leftrightarrow \text{Si } a \geq 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \leq k^2$$

Ejemplos

Resolver los siguientes ejercicios:

$$1. \sqrt{10 - x} = x + 2$$

Resolución

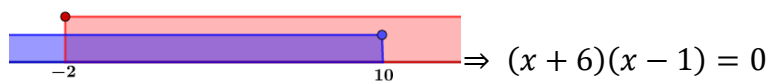
$$\sqrt{10 - x} = x + 2$$

En este caso aplicamos el **T1**: Si $a \geq 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2$

$$\overbrace{(10 - x \geq 0 \wedge x + 2 \geq 0)}^{\text{universo}} \Rightarrow 10 - x = (x + 2)^2$$

$$\overbrace{(10 \geq x \wedge x \geq -2)}^{\text{universo}} \Rightarrow 10 - x = x^2 + 4x + 4$$

$$\overbrace{(x \leq 10 \wedge x \geq -2)}^{\text{universo}} \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$$



$$\overbrace{[-2, 10]}^{\text{universo}} \quad \wedge \quad A = \{x = -6 \vee x = 1\}$$

Interceptando el universo con el conjunto A , obtenemos el conjunto solución

$$CS = \{1\}$$

$$2. \sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1} - 2\sqrt{x} = 0$$

Resolución

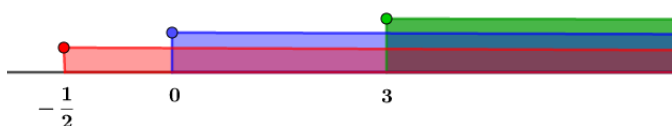
$$\sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1} - 2\sqrt{x} = 0$$

Primero encontramos el universo

$$x-3 \geq 0 \quad \wedge \quad 2x+1 \geq 0 \quad \wedge \quad x \geq 0$$

$$x \geq 3 \quad \wedge \quad 2x \geq -1 \quad \wedge \quad x \geq 0$$

$$x \geq 3 \quad \wedge \quad x \geq -\frac{1}{2} \quad \wedge \quad x \geq 0$$



Ahora a la ecuación $\sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1} - 2\sqrt{x} = 0$ la expresamos como suma de radicales y quedaria asi:

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1} = 2\sqrt{x}$$

Luego lo elevamos al cuadrado y reducimos a la menor expresión

$$(\sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1})^2 = (2\sqrt{x})^2$$

$$x-3 + 2\sqrt{x-3}\sqrt{2x+1} + 2x+1 = 4x$$

$$2\sqrt{x-3}\sqrt{2x+1} = x+2$$

Ahora elevamos al cuadrado y resolvemos

$$4(x-3)(2x+1) = (x+2)^2$$

$$4(2x^2 + x - 6x - 3) = x^2 + 4x + 4$$

$$8x^2 - 20x - 12 = x^2 + 4x + 4$$

$$7x^2 - 24x - 16 = 0$$

$$(7x + 4)(x - 4) = 0$$

$$7x + 4 = 0 \vee x - 4 = 0$$

$$A = \left\{-\frac{4}{7}, 4\right\}$$

Por lo tanto, el conjunto solución será la intersección del universo y el conjunto A

$$[3, +\infty[\cap \left\{-\frac{4}{7}, 4\right\} = \{4\}$$

$$CS = \{4\}$$

3. $\sqrt{1-x} \leq \sqrt{2x+1}$

Resolución

Para resolver este ejercicio aplicamos T2: $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Leftrightarrow 0 \leq a \leq b$

$$\sqrt{1-x} \leq \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow 0 \leq 1-x \leq 2x+1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1-x \wedge 1-x \leq 2x+1$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1 \wedge 0 \leq 3x$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1 \wedge 0 \leq x$$



Luego tenemos que $CS = [0, 1]$

4. $\sqrt{4-x^2} \leq x$

Resolución

Para resolver este ejercicio aplicamos el

$$T3: \sqrt{a} \leq b \Leftrightarrow \text{Si } a \geq 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow a \leq b^2$$

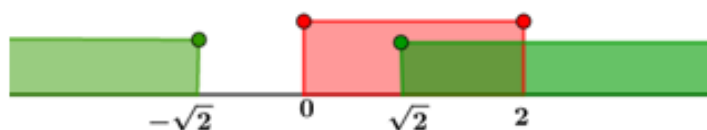
$$\text{Si } \{4-x^2 \geq 0 \wedge x \geq 0\} \Rightarrow 4-x^2 \leq x^2$$

$$\{x^2 \leq 4 \wedge x \geq 0\} \Rightarrow 4 \leq 2x^2$$

$$\{-2 \leq x \leq 2 \wedge x \geq 0\} \Rightarrow 2 \leq x^2$$



$$[0, 2] \wedge A =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$$



Luego el conjunto solución es:

$$CS = [\sqrt{2}, 2]$$

5. $\sqrt{x^2 - 3x - 10} > x + 3$

Resolución

Para resolver este ejercicio aplicamos el **T4**, adaptándolo

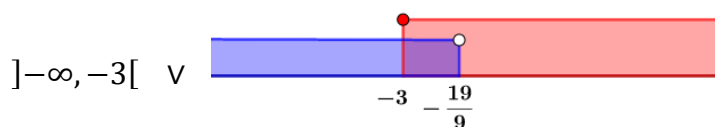
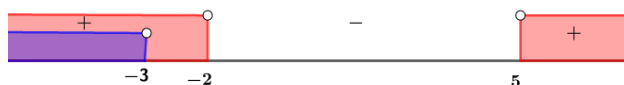
$$\sqrt{a} > b \Leftrightarrow [a > 0 \wedge b < 0] \vee [a > b^2 \wedge b \geq 0]$$

$$[x^2 - 3x - 10 > 0 \wedge x + 3 < 0] \vee [x^2 - 3x - 10 > (x + 3)^2 \wedge x + 3 \geq 0]$$

$$[(x - 5)(x + 2) > 0 \wedge x < -3] \vee [x^2 - 3x - 10 > x^2 + 6x + 9 \wedge x \geq -3]$$

$$[(x - 5)(x + 2) > 0 \wedge x < -3] \vee [-19 > 9x \wedge x \geq -3]$$

$$\vee \left[x < -\frac{19}{9} \wedge x \geq -3 \right]$$



$$]-\infty, -3[\cup \left[-3, -\frac{19}{9}\right[$$

$$CS = \left]-\infty, -\frac{19}{9}\right[$$

Ejercicios

Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones con radicales:

1. $\sqrt{4x - x^2} = 3x - 4$
2. $2x - \sqrt{x - 1} = 3x - 7$
3. $\sqrt{x - 2x^2} = x$
4. $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{16x + 1} = -\sqrt{5x}$
5. $\sqrt{5 - 2x} - \sqrt{x + 6} = \sqrt{x + 3}$
6. $\sqrt{3x} < \sqrt{x^2 + 2}$
7. $\sqrt{x^2 - 6x} \leq \sqrt{6 - x}$
8. $\sqrt{8 - 4x} > \sqrt{x^2 - 3x + 2}$
9. $\sqrt{x - 2x^2} < 1 + 2x$
10. $2\sqrt{x + 4} - x \leq 1$
11. $\sqrt{9 - x^2} < |x - 1|$
12. $\sqrt{-x^2 - 5x - 6} \geq 2x + 2$
13. $\sqrt{2x - 1} \geq x - 1$
14. $\sqrt{x - 2x^2} < 1 + 2x$
15. $\sqrt{5x - 2} > 1 - x$
16. $\sqrt{\frac{x}{1-x}} > \frac{1}{2x-1}$