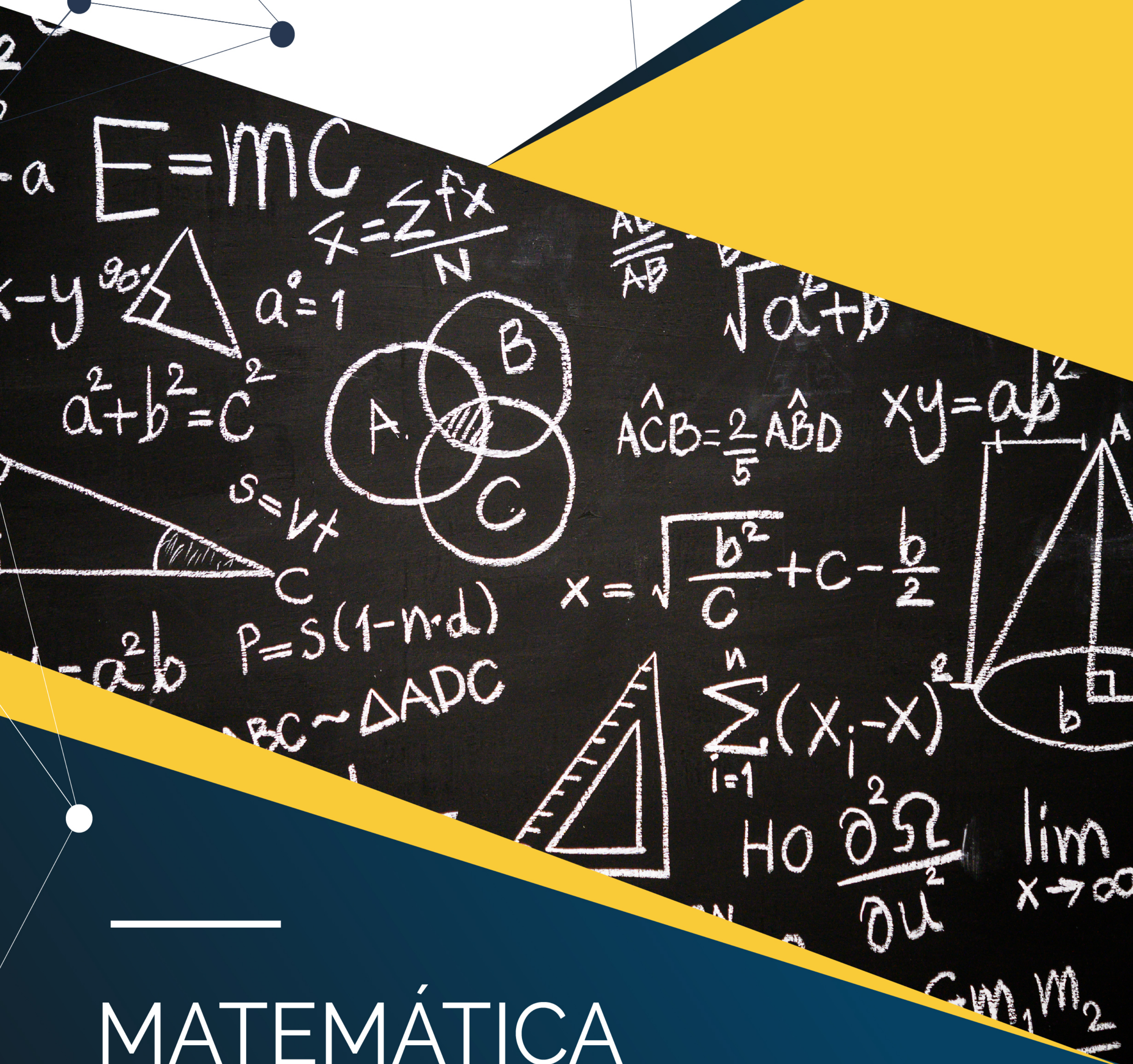
Eidec
EDITORIAL



MATEMÁTICA BÁSICA

Ciencias e ingenierías

MATEMÁTICA BÁSICA: Ciencias e Ingenierías

COLECCIÓN RESULTADO DE INVESTIGACIÓN

Primera Edición 2024 Vol. 1

Editorial EIDEC
Sello Editorial EIDEC (978-958-53018)
NIT 900583173-1

Autores
Roger Ccama Alejo
Raúl Champi Apaza
Néstor Tipula Quispe
John Williams Lupaca Quispe
Leonidas Vilca Callata
Martín Julio Merma Bellido
Alfredo Quispe Lujano

ISBN: 978-628-96622-9-0
Formato: Digital PDF (Portable Document Format)
DOI: https://doi.org/10.34893/q1400-6840-4824-c
Publicación: Colombia
Fecha Publicación: 26/12/2024

Coordinación Editorial
Escuela Internacional de Negocios y Desarrollo Empresarial de Colombia – EIDEC
Centro de Investigación Científica, Empresarial y Tecnológica de Colombia – CEINCET
Red de Investigación en Educación, Empresa y Sociedad – REDIEES

Revisión y pares evaluadores
Centro de Investigación Científica, Empresarial y Tecnológica de Colombia – CEINCET
Red de Investigación en Educación, Empresa y Sociedad – REDIEES

Eidec
EDITORIAL

Coordinadores editoriales

Paula A. Noguera Zambrano
Editorial EIDEC

Dr. Cesar Augusto Silva Giraldo
Centro de Investigación Científica, Empresarial y Tecnológica de Colombia – CEINCET – Colombia.

Dr. David Andrés Suarez Suarez
Red de Investigación en Educación, Empresa y Sociedad – REDIEES – Colombia.

Prólogo

Este libro es un manual de MATEMÁTICA BÁSICA para los estudiantes de ciencias e Ingenierías.

Bienvenidos al apasionante mundo de Matemática Básica, una disciplina matemática que ha sido una fuente inagotable de conocimiento y aplicación en una amplia variedad de campos, desde la física y la ingeniería hasta la economía y las ciencias sociales. Este libro es una guía exhaustiva diseñada para ayudarle a comprender y dominar los conceptos fundamentales de la integración.

La integración es una continuación natural de la diferenciación y juntas forman el corazón del cálculo, una de las piedras angulares de las matemáticas. Mientras que la diferenciación se centra en el estudio de las tasas de cambio, la integración nos permite abordar problemas relacionados con la acumulación y la totalización. Desde el cálculo de áreas bajo curvas hasta la resolución de ecuaciones diferenciales, el cálculo integral se presenta como una herramienta poderosa y versátil para resolver una gran variedad de problemas en la vida real.

A lo largo de este libro, exploraremos los conceptos de **antiderivadas, integrales indefinidas, diversas técnicas de integración, integrales definidas, áreas, volúmenes y longitud de arco**. Trabajaremos juntos para desarrollar tu comprensión de estos conceptos, paso a paso, con ejemplos claros y ejercicios prácticos que te ayudarán a fortalecer tus habilidades.

Este libro está diseñado tanto para aquellos que están dando sus primeros pasos en el mundo del cálculo integral como para aquellos que desean profundizar en su conocimiento y aplicarlo en situaciones más avanzadas. Independientemente de tu nivel de experiencia, te animamos a abrazar el desafío del cálculo integral, ya que ofrece una ventana fascinante a la belleza y utilidad de las matemáticas.

Al final de cada capítulo, encontrarás problemas y ejercicios cuidadosamente seleccionados que te desafiarán a aplicar lo que has aprendido. No temas cometer errores; son oportunidades para aprender y mejorar. A medida que avanzas en el libro, te sorprenderás de lo que eres capaz de lograr.

Los autores.

Dedicatoria

Dedico este libro a mi familia.
Quien ha estado a mi lado todo este
tiempo en que he trabajado en esta obra.
A mis amigos, quienes me han apoyado
y a todos los que me prestaron ayuda, redactores,
impresores y publicistas, a todos ellos dedico este
libro con cariño y un muy grande agradecimiento.

Índice general

Capítulo 1

LÓGICA

La lógica es el estudio de los procesos válidos del razonamiento humano. Por ejemplo: "Todos los hombres son mortales" y "Alberto es un hombre", luego razonamos "Alberto es mortal".

Enunciado

Es toda frase u oración que sea la algún idea.

Proposición

Es aquel enunciado aseverativo (afirma algo) del cual se puede afirmar si es verdadero o falso, pero no ambos a la vez, con respecto a una realidad.

Ejemplos

1. Las siguientes expresiones son proposiciones:

    a) Lima es la capital de Bolivia

    b) Mañana es martes

    c) $\sqrt{64} = 8$

2. Las siguientes expresiones no son proposiciones:

    a) ¡Hola Pedro!

    b) ¿Cómo estas?

Clases de Proposiciones

1. Proposiciones simples

Llamadas también atómicas, monádicas o monarias, son aquellas en las que aparece una afirmación o acción. Se caracterizan por ser expresadas mediante oraciones que no utilizan conjunción gramatical y el adverbio "no".

Ejemplos

I). Son proposiciones atómicas

1. Luis es estudioso
2. El angulo llano mide 180 grados.
3. Lima es capital del Perú
4. José baila en la fiesta
5. Augusto barre el pasadizo
6. Beto es pareja de Ana
7. Jorge estudia medicina
8. El diccionario es nuevo
9. Ciertos niños son mas educados
10. Todos los hombres son fuertes

2. Proposiciones compuestas

Llamadas también moleculares, son aquellos que están constituidas por proposiciones simples, enlazadas entre si por conjunciones gramaticales o afectadas del adverbio de negación "no".

Ejemplos

I). Son proposiciones moleculares

1. Luis es estudioso y Marco es flojo
2. Pedro estudia matemáticas y Luis estudia historia
3. Carlos es ingeniero y Luis tiene 10 años
4. Si Juana trabaja entonces no ve televisión
5. Johsilyn ganó el partido o está enferma

Términos de Enlace

Son términos que sirven para formar proposiciones moleculares, también llamados conectivos lógicos. Algunos términos de enlace son "y", "o", "no" , "si,...entonces","si y solo si" . El termino de enlace "y", "o", "si,...entonces" y "si y solo si" actúan sobre dos proposiciones y el termino de enlace "no" actúa solo sobre una proposición.

Ejemplos

I). De acuerdo al términos de enlace se tiene las siguientes formas básicas:

1. La luna no está hecha de queso verde.
2. El viento arrastrará las nubes o hoy lloverá con seguridad.
3. $3 < 5$ y el angulo recto tiene 90 grados.
4. Si estamos en diciembre ,entonces pronto llegara la navidad.
5. Lima es la capital del Perú ,si y solo si, Santiago es la capital de Ecuador.

Observación

La proposición

"La luna no está hecha de queso verde",

se puede también escribir en la forma alternativa

"No es cierto que la luna no está hecha de queso verde"

Proposiciones compuestas básicas

1. La negación

Dado una proposición p, llamaremos la negación de p a otra proposición que denotaremos por $\sim p$ y que se le asigna el valor opuesto a p. Su tabla de verdad es:

p	$\sim p$
V	F
F	V

El principio lógico de la negación es:
"Si una proposición es verdadera su negación es falsa, recíprocamente si dicha proposición es falsa su negación es verdadera"

Nota:

La proposición $\sim p$ se lee "no p"o también "No es cierto que p"

La negación puede utilizar también.

es falso que..

no ocurre que..

no es cierto que..

no es verdad que......................................

no es el caso que......................................

Ejemplo

Sea la proposición

$$p = \text{Lima es la capital de México}$$

Su negación es:

$$\sim p = \text{Lima no es la capital de México}$$

2. La conjunción

La conjunción de dos proposiciones p y q es la proposición compuesta que resulta de unir p y q mediante el conectivo lógico "y" que se simboliza $p \wedge q$. Su tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Su principio lógico es:
"La conjunción $p \wedge q$ es verdadero, solo cuando p es verdadero y q es verdadero, en todos los demás casos es falso "

NOTA:

1. existen también conjunciones implícitas. Cada coma (,) significa una conjunción. También se considera conjunciones cuando exista punto y coma (;) o un punto seguido (.) siempre que no haya otra expresión que esté al lado otro conectivo.

2. Para formar una conjunción se puede usar otras palabras que unan las proposiciones tales como: **pero, además, incluso** y otras mas, veamos los ejemplos siguientes.

1. Tu libro es azul **aunque** mi libro es rojo
2. Ana barre el piso **sin embargo** el cuarto está limpio
3. Mary es buen estudiante **tambiÃ©n** es deportista
4. Vero llegó tarde a la universidad **igualmente** llegó tarde ala casa
5. Luis no está. cansado **no obstante** ha jugado toda la tarde
6. María gusta de nadar **tanto como** gusta de bailar

3. La disyunción

La disyunción de dos proposiciones p y q es la proposición que resulta de unir p y q con el conectivo lógico "o" en el sentido inclusivo que se simboliza por $p \vee q$. Su tabla de verdad es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Su principio lógico es:
"La proposición $p \vee q$ es falso únicamente en el caso en que p y q son ambos falsos, en cualquier otro caso es verdadero"

4. La condicional

La condicional o implicación de dos proposiciones p y q es la proposición compuesta mediante el conectivo lógico "si..., entonces ..." y se simboliza por $p \rightarrow q$. Su tabla de verdad es:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Su principio lógico es:
"La proposición implicativa es falsa únicamente en el caso en que la proposición p es verdadera y la proposición q es falsa, siendo verdadera en los demás casos"

NOTA:

La proposición p es llamado antecedente y la proposición q es llamado consecuente.

Ejemplos:

1. **Si** José viaja **entonces** conoce Lima.

2. **Si** María se enfermó, deja de ir a la universidad

3. **Ya que** Janeth es profesional, tiene su propia empresa

NOTA:

1. Una condicional puede utilizar otras palabras que unan las proposiciones, ejemplo:

   ....**por consiguiente**.............

   ....**de modo que**......................

   ....**de allÃ que**...................

   ....**en consecuencia**..............

   ....**por lo tanto**.................

   ....**en conclusión**.................

   ....**luego**........................

   ....**cuando**........................

   ....**puesto que**...................

   ....**porque**.......................

   ....**ya que**.......................

   ....**cada vez que**.................

   ....**si**...........................

   ....**dado que**.....................

5. La bicondicional

La bicondicional o doble implicación de dos proposiciones p y q es la proposición compuesta mediante el conectivo lógico "si y solo si" y se simboliza por $p \Leftrightarrow q$.Su tabla de verdad es:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Su principio lógico es:

"La proposición bicondicional es verdadera cuando p y q son verdaderas o falsas a la vez, en los otros casos es falsa".

RESUMEN

		Conjunción	Disyunción débil	Disyunción fuerte	Condicional	Bicondicional	Negación
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\sim p$
V	V	V	V	F	V	V	F
V	F	F	V	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	F	F	F	V	V	V

Ejercicios Propuestos

1 Determinar cual de las siguientes expresiones son proposiciones

a) $5 + 7 = 16 - 4$

b) $3 \times 6 = 15 + 1$ y $4 - 2 \neq 2 \times 5$

c) ¿El silencio es fundamental para estudiar?

d) ¡Estudia matemáticas!

e) Nosotros estudiamos en la universidad

f) Los hombres no pueden vivir sin oxigeno

g) ¡Arriba Puno!

h) $5 + x = 4$

2 ¿Cuál de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuales falsas?

a) Si $3+3=6$, entonces $4=4$

b) Si $19-7=3$, entonces $4(5+3)=32$

c) Si $5\times 7=35$, entonces $10-3=13$

d) Si $5+2=7$, entonces $3+6=9$

e) $4+8=12$ y $9-4=5$

f) $8+4=12$ o $8-3=2$

Ejercicios Resueltos

1 Evaluar mediante tabla de verdad la proposición $\sim(p\wedge q)\Leftrightarrow[\sim p\vee\sim q]$

Resolución

p	q	$\sim$	$(p\wedge q)$	$\Leftrightarrow$	$[\sim p$	$\vee$	$\sim q]$
V	V	F	V	V	F	F	F
V	F	V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	V	V	V	V

2 Evaluar mediante tabla de verdad la proposición $\sim[p\rightarrow(p\vee q)]$

Resolución

p	q	$\sim$	$[p$	$\rightarrow$	$(p\vee q)]$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	V	F

3 Evaluar $[(\sim p\vee q)\wedge\sim q]\rightarrow\sim p$, mediante una tabla de verdad

Resolución

p	q	$[(\sim p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$\sim q]$	$\rightarrow$	$\sim p$
V	V	F	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V	V

4. Evaluar $(\sim p \vee q) \rightarrow (r \wedge p)$ mediante una tabla de verdad

Resolución

p	q	r	$(\sim p$	$\vee$	$q)$	$\rightarrow$	$(r \wedge p)$
V	V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	F	F
V	F	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	F	F	F

Ejercicios Propuestos

Evaluar mediante una tabla de verdad las siguientes proposiciones:

1. $(p \Leftrightarrow \sim q) \Leftrightarrow (q \rightarrow p)$

2. $(p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim p \vee q)$

3. $[(p \wedge q) \vee \sim p] \rightarrow (p \vee q)$

4. $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

5. $(\sim p \vee q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

6. $(p \vee \sim q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

7. $\sim [\sim (p \wedge q) \rightarrow \sim q] \vee p$

8. $(p \wedge r) \Leftrightarrow (\sim q \vee r)$

9. $\sim (p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee r)$

Tautologías, contradicciones y contingencias

1. Tautologías

Son proposiciones compuestas que siempre son verdaderas cualquiera que sea el valor de las proposiciones componentes.

Ejemplos

Se tiene las siguientes:

1. $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$ es una tautologia.

p	q	$[p$	$\wedge$	$(p \vee q)]$	$\Leftrightarrow$	p
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F
F	F	F	F	F	V	F

2. $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ es una tautologia.

p	q	$[(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$p]$	$\rightarrow$	q
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V	F

2. Contradicción

Son proposiciones compuestas que siempre son falsas cualquiera que sea el valor de las proposiciones componentes.

Ejemplos

Se tiene las siguientes:

1. $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \sim q)$ es una contradicción.

p	q	$(p \to q)$	$\wedge$	$(p$	$\wedge$	$\sim q)$
V	V	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	V

2. $[(p \wedge q) \vee q] \wedge \sim q$ es una contradicción.

p	q	$[(p \wedge q)$	$\vee$	$q]$	$\wedge$	$\sim q$
V	V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F	F
F	F	F	F	F	F	V

3. Contingencia

Son proposiciones compuestas que no son tautologias ni contradicciones, es decir, son proposiciones que en algunos casos es F, en otros V.

Ejemplo

$(p \to q) \to p$ es una contingencia.

p	q	$(p \to q)$	$\to$	p
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

Ejercicios Propuestos

1. Determinar cual de las siguientes proposiciones es una tautologia

   a) $[(p \vee \sim q) \wedge q] \to p$

   b) $[(p \wedge q) \vee q] \Leftrightarrow q$

   c) $[\sim p \wedge (q \wedge \sim r)] \Leftrightarrow \sim (p \vee r)$

2. Por medio de una tabla de verdad, establecer, si cada una de las siguientes proposiciones compuestas es tautología, contradicción o contingencia.

a) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to p)]$

b) $\sim (p \to q) \Leftrightarrow \sim (\sim q \to \sim p)$

c) $(p \to r) \Leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to r)]$

3. Determinar mediante la tabla de verdad cual de las siguientes proposiciones es una tautología, contradicción y contingencia.

a) $(p \to q) \wedge (q \to p)$

b) $[(p \vee q) \wedge \sim q] \to r$

c) $\sim [(p \vee p) \to q]$

d) $\sim (p \vee q) \wedge p$

4. Cual de las siguientes proposiciones es una contradicción

a) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

b) $\sim (p \to q) \Leftrightarrow (p \vee \sim q)$

c) $\sim (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow \sim q)$

Implicación lógica y Equivalencia lógica

1. Implicación lógica

A toda proposición condicional $p \to q$ que sea una tautología se le llama "implicación lógica" (o simplemente implicación) en este caso la condicional la denotaremos por $p \Rightarrow q$.

Ejemplo

Verificar si la proposición $[(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \to \sim p$ es una implicación lógica

p	q	$[(\sim p$	$\vee$	$q\ )$	$\wedge$	$\sim q]$	$\rightarrow$	$\sim p$
V	V	F	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V	V

$$\therefore [(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$$

2. Equivalencia lógica

A toda proposición bicondicional $p \Leftrightarrow q$ que sea una tautología se le llama "equivalencia lógica" (o simplemente equivalencia) y en este caso denotaremos a la bicondicional por $p \Longleftrightarrow q$.

Ejemplo

Verificar si la proposición $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$ es una equivalencia lógica

p	q	$[p$	$\wedge$	$(p \vee q)]$	$\Leftrightarrow$	p
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F
F	F	F	F	F	V	F

$$\therefore [p \wedge (p \vee q)] \Longleftrightarrow p$$

Ejercicios Propuestos

1. Verifique cuales son implicaciones lógicas

   a) $\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$

   b) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$

   c) $p \rightarrow (p \vee q)$

   d) $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

   e) $(p \Leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

2. Verifique cuales son equivalencias lógicas:

a) $(p \to q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

b) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to p)]$

c) $[(p \wedge q) \vee p] \Leftrightarrow p$

d) $[(p \vee q) \wedge p] \Leftrightarrow p$

e) $\sim (p \to q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

Proposiciones lógicamente equivalentes

Cuando sus tablas de verdad de dos proposiciones p y q son idénticas. se denominan "lógicamente equivalentes" (o simplemente equivalentes) en este caso se simboliza en la forma $p \equiv q$.

Ejemplo

Verificar si las proposiciones $p \to q$ y $\sim q \to \sim p$ son lógicamente equivalentes.

p	q	$p \to q$
V	F	V
V	V	F
F	F	V
F	V	V

p	q	$\sim q \to \sim p$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$$\therefore (p \to q) \equiv (\sim q \to \sim p)$$

NOTA:

Un par de proposiciones lógicamente equivalentes $p \equiv q$ resulta siempre una equivalencia lógica $p \Longleftrightarrow q$ y viceversa.

Equivalencias notables

1. Ley de la doble negación

   $\sim (\sim p) \equiv p$

2. Ley de la idempotencia

    a) $p \wedge p \equiv p$

    b) $p \vee p \equiv p$

3. Leyes conmutativas

    a) $p \wedge q \equiv q \wedge p$

    b) $p \vee q \equiv q \vee p$

4. Leyes asociativas

    a) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

    b) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

    c) $p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r) \equiv (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$

5. Leyes Destributivas

    a) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

    b) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

    c) $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

    d) $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

6. Leyes de Morgan

    a) $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

    b) $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

7. Leyes de condicional

    a) $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

    b) $\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

8. Las leyes de la bicondicional

    a) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

    b) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

9. Leyes de absorcion

   a) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

   b) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

   c) $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

   d) $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

10. Leyes de transposición

   a) $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

   b) $p \Leftrightarrow q \equiv \sim q \Leftrightarrow \sim p$

11. Adicionales

   a) $p \wedge V \equiv p$

   b) $p \vee F \equiv p$

   c) $p \wedge F \equiv F$

   d) $p \vee V \equiv V$

   e) $p \wedge \sim p \equiv F$

   f) $p \vee \sim p \equiv V$

Ejercicios Resueltos

1 Simplificar $[(\sim p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q$

Resolución

$$\begin{aligned}
[(\sim p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q &\equiv [(\sim p \wedge q) \rightarrow F] \wedge \sim q \\
&\equiv [\sim (\sim p \wedge q) \vee F] \wedge \sim q \\
&\equiv \sim (\sim p \wedge q) \wedge \sim q \\
&\equiv (\sim\sim p \vee \sim q) \wedge \sim q \\
&\equiv (p \vee \sim q) \wedge \sim q \\
&\equiv (\sim q \vee p) \wedge \sim q \\
&\equiv \sim q \wedge (\sim q \vee p) \\
&\equiv \sim q
\end{aligned}$$

2 Simplificar $\sim [\sim (p \wedge q) \rightarrow \sim q] \vee q$

Resolución

$$
\begin{aligned}
\sim [\sim (p \wedge q) \rightarrow \sim q] \vee q &\equiv \sim [\sim\sim (p \wedge q) \vee \sim q] \vee q \\
&\equiv \sim [(p \wedge q) \vee \sim q] \vee q \\
&\equiv [\sim (p \wedge q) \wedge \sim\sim q] \vee q \\
&\equiv [\sim (p \wedge q) \wedge q] \vee q \\
&\equiv [q \wedge \sim (p \wedge q)] \vee q \\
&\equiv q \vee [q \wedge \sim (p \wedge q)] \\
&\equiv q
\end{aligned}
$$

3 Simplificar $[(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)] \vee (\sim p \wedge \sim q)$

Resolución

$$
\begin{aligned}
[(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)] \vee (\sim p \wedge \sim q) &= [p \wedge (q \vee \sim q)] \vee (\sim p \wedge \sim q) \\
&= (p \wedge V) \vee (\sim p \wedge \sim q) \\
&= p \vee (\sim p \wedge \sim q) \\
&= p \vee \sim q
\end{aligned}
$$

4 Simplificar $\sim [\sim (p \wedge q) \rightarrow \sim q] \vee p$

Resolución

$$
\begin{aligned}
\sim [\sim (p \wedge q) \rightarrow \sim q] \vee p &= \sim [\sim\sim (p \wedge q) \vee \sim q] \vee p \\
&\equiv \sim [(p \wedge q) \vee \sim q] \vee p \\
&\equiv [\sim (p \wedge q) \wedge \sim\sim q] \vee p \\
&\equiv [(\sim p \vee \sim q) \wedge q] \vee p \\
&\equiv [q \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee p \\
&\equiv [q \wedge (\sim q \vee \sim p)] \vee p \\
&\equiv (q \wedge \sim p) \vee p \\
&\equiv p \vee (\sim p \wedge q) \\
&\equiv p \vee q
\end{aligned}
$$

5 Simplificar $[(p \rightarrow q) \vee \sim p] \wedge (\sim q \rightarrow p)$

Resolución

$$
\begin{aligned}
[(p \rightarrow q) \vee \sim p] \wedge (\sim q \rightarrow p) &= [(p \rightarrow q) \vee \sim p] \wedge (\sim\sim q \vee p) \\
&= [(p \rightarrow q) \vee \sim p] \wedge (q \vee p) \\
&= (\sim p \vee q \vee \sim p) \wedge (q \vee p) \\
&= (\sim p \vee q) \wedge (p \vee q) \\
&= (\sim p \wedge p) \vee q \\
&= F \vee q \\
&= q
\end{aligned}
$$

Observación

La tabla de verdad de la proposición anterior:

p	q	$[(p \rightarrow q)$	$\vee$	$\sim p]$	$\wedge$	$(\sim q$	$\rightarrow$	$p)$
V	V	V	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F	V	F	F

6 Verificar las siguientes implicaciones

a) $\sim p \Rightarrow (p \rightarrow q)$

Resolución

p	q	$\sim p$	$\rightarrow$	$(p \rightarrow q)$
V	V	F	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Usando leyes lógicas:

$$\begin{aligned}
\sim p \to (p \to q) &\equiv \sim\sim p \vee (p \to q)\\
&\equiv p \vee (\sim p \vee q)\\
&\equiv p \vee \sim p \vee q\\
&\equiv V \vee q\\
&\equiv V
\end{aligned}$$

b) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

Resolución

p	q	$(p \wedge q)$	$\to$	$(p \vee q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	F

Usando leyes lógicas:

$$\begin{aligned}
(p \wedge q) \to (p \vee q) &\equiv \sim (p \wedge q) \vee (p \vee q)\\
&\equiv \sim p \vee \sim q \vee p \vee q\\
&\equiv (p \vee \sim p) \vee (q \vee \sim q)\\
&\equiv V \vee V\\
&\equiv V
\end{aligned}$$

c) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$

Resolución

p	q	$(p \wedge q)$	$\to$	$(p \leftrightarrow q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	V	V

Usando las leyes lógicas:

$$\begin{aligned}(p\wedge q)\rightarrow(p\Leftrightarrow q) &\equiv\sim(p\wedge q)\vee(p\Leftrightarrow q)\\ &\equiv\sim(p\wedge q)\vee[(p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q)]\\ &\equiv[\sim(p\wedge q)\vee(p\wedge q)]\vee(\sim p\wedge\sim q)\\ &\equiv V\vee(\sim p\wedge\sim q)\\ &\equiv V\end{aligned}$$

7 Verificar las siguientes equivalencias

a) $(p\rightarrow q)\Longleftrightarrow(\sim p\vee q)$

Resolución

p	q	$(p\rightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$(\sim p$	$\vee$	$q)$
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	F

Usando leyes lógicas:

$$\begin{aligned}(p\rightarrow q)\Leftrightarrow(\sim p\vee q) &\equiv(\sim p\vee q)\Leftrightarrow(\sim p\vee q)\\ &\equiv[(\sim p\vee q)\wedge(\sim p\vee q)]\vee[\sim(\sim p\vee q)\wedge\sim(\sim p\vee q)]\\ &\equiv(\sim p\vee q)\vee\sim(\sim p\vee q)\\ &\equiv V\end{aligned}$$

b) $\sim(p\wedge q)\Longleftrightarrow(\sim p\vee\sim q)$

Resolución

p	q	$\sim$	$(p\wedge q)$	$\Leftrightarrow$	$(\sim p$	$\vee$	$\sim q)$
V	V	F	V	V	F	F	F
V	F	V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	V	V	V	V

Usando leyes lógicas:

$$\begin{aligned} \sim(p\wedge q)\Leftrightarrow(\sim p\vee\sim q) &\equiv [\sim(p\wedge q)\wedge(\sim p\vee\sim q)]\vee[\sim\sim(p\wedge q)\wedge\sim(\sim p\vee\sim q)] \\ &\equiv [\sim(p\wedge q)\wedge\sim(p\wedge q)]\vee[(p\wedge q)\wedge(p\wedge q)] \\ &\equiv\sim(p\wedge q)\vee(p\wedge q) \\ &\equiv V \end{aligned}$$

c) $[p\wedge(p\vee q)]\Longleftrightarrow p$

Resolución

p	q	p	$\wedge$	$(p\vee q)$	$\Leftrightarrow$	p
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F
F	F	F	F	F	V	F

Usando leyes lógicas:

$$\begin{aligned} [p\wedge(p\vee q)]\Leftrightarrow p &\equiv p\Leftrightarrow p \\ &\equiv (p\wedge p)\vee(\sim p\wedge\sim p) \\ &\equiv p\vee\sim p \\ &\equiv V \end{aligned}$$

8 Dada la proposición: "Si $3+4=7$ entonces 8 es primo, o 4 no es par"

a) Negar oracionalmente la proposición

b) Determinar el valor de verdad de la proposición original

Resolución

Sean: p="$3+4=7$", q="8 es primo", r="4 es par".

La proposición en símbolos es: $(p\rightarrow q)\vee\sim r$.

a) Su negación es:

$$\begin{aligned} \sim[(p\rightarrow q)\vee\sim r] &\equiv\sim(p\rightarrow q)\wedge\sim(\sim r) \\ &\equiv (p\wedge\sim q)\wedge r \end{aligned}$$

Oralmente "$3+4=7, 8 no es primo y 4 es par$"

b) En la proposición: $V(p)=V, V(q)=F, V(r)=V$

Entonces: $V[(p \to q) \vee \sim r] \equiv V[(V \to F) \vee F] \equiv V(F \vee F) \equiv F$

Ejercicios Propuestos

Simplificar las siguientes proposiciones

1. $(\sim p \vee \sim q) \wedge [\sim p \wedge (q \to p)]$
2. $[(p \to q) \to (p \wedge q)] \vee (p \vee r)$
3. $\sim [\sim (p \wedge q) \to \sim q] \vee p$
4. $[(\sim p \wedge q) \to (q \to p)] \wedge p$
5. $[\sim (p \to q) \to \sim (q \to p)] \wedge (p \vee q)$

Inferencia Lógica

Definición Para expresar la forma en que se razona, la lógica debe permitir derivar conclusiones a partir de un conjunto de premisas. Las **premisas** son formulas que se consideran ciertas para un problema dado y la **conclusión** es una formula que se quiere mostrar que es cierta (bajo las premisas), para el problema. Al proceso de encontrar una forma de llegar a una conclusión partiendo de unas premisas, se le conoce con el nombre de **Inferencia Lógica**.

Tiene la forma:

$$\boxed{(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \longrightarrow C}$$

Donde las proposiciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son llamadas premisas y que originan como consecuencia otra proposición C llamada CONCLUSIÓN.

Regla de Inferencias

1. Modus Ponendo Ponens (MPP)

Su representación simbólica es: $\begin{array}{l} p \longrightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$

Su representación simbólica es: $\begin{array}{l} p \longrightarrow q \\ \sim q \\ \hline \sim p \end{array}$

2. Modus Tollendo Tollens (MTT)

3. Modus Tollendo Ponens (MTP)

Su representación simbólica es: $\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim q \\ \hline p \end{array}$ o $\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \\ \hline q \end{array}$

4. Regla de Adjunción (A)

Su representación simbólica es: $\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline p \wedge q \end{array}$

5. Regla de Simplificación (S)

Su representación simbólica es: $\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline p \end{array}$ o $\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline q \end{array}$

6. Doble Negación (DN)

Su representación simbólica es: $\begin{array}{l} p \\ \hline \sim\sim p \end{array}$ o $\begin{array}{l} \sim\sim p \\ \hline p \end{array}$

7. Ley de la Adición (LA)

Su representación simbólica es: $\begin{array}{l} p \\ \hline p \vee q \end{array}$ o $\begin{array}{l} q \\ \hline p \vee q \end{array}$

8. Ley de D'Morgan (LD)

Su representación simbólica es: $\begin{array}{c} \sim (p \vee q) \\ \hline \sim p \wedge \sim q \end{array}$ o $\begin{array}{c} \sim (p \wedge q) \\ \hline \sim p \vee \sim q \end{array}$

9. Ley de Silogismo Hipotético (SH)

Su representación simbólica es: $\begin{array}{c} p \longrightarrow q \\ q \longrightarrow r \\ \hline p \longrightarrow r \end{array}$

10. Ley de la Simplificación Disyuntiva (SD)

Su representación simbólica es: $\begin{array}{c} p \vee p \\ \hline p \end{array}$

11. Leyes Conmutativas (LC)

Su representación simbólica es: $\begin{array}{c} p \vee q \\ \hline q \vee p \end{array}$ o $\begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline q \wedge p \end{array}$

12. Reglas de Premisas (RP)

El conjunto de premisas está conformado por las proposiciones $P_1, P_2, \ldots, P_n$, donde C es la Conclusión.

$$\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline C = P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \end{array}$$

Ejercicios Resueltos

1 Determinar la validez de la inferencia: "Si el triángulo es isósceles entonces tiene dos lados iguales. Pero, el triángulo no tiene dos lados iguales; por lo tanto, no es isósceles".

Resolución

Sean:

p = El triángulo es isósceles

q = El triángulo tiene dos lados iguales

Entonces, el esquema de la inferencia es:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(\sim q)$	$\rightarrow$	$\sim p$
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V
		1	3	2	5	4

$\therefore$ Como el resultado de la tabla de verdad es una tautología, la inferencia es válida.

2 Mediante una tabla de verdad, establecer si es válida la inferencia:

$$\begin{array}{l} p \longleftrightarrow \sim q \\ q \vee r \\ \sim r \\ \hline \therefore \sim q \end{array}$$

Resolución

p	q	r	$(p \longleftrightarrow \sim q)$	$\wedge$	$(q \vee r)$	$\wedge$	$(\sim r)$	$\longrightarrow$	$\sim (q)$
V	V	V	F	F	V	F	F	V	F
V	V	F	F	F	V	F	V	V	F
V	F	V	V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	F	F	V	F
F	V	F	V	V	V	V	V	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V	V	V
			1	3	2	5	4	7	6

$\therefore$ El resultado de la tabla de verdad no es una tautología, por lo tanto, la inferencia es una falacia.

3 Establecer si es válida la inferencia:

$$\begin{array}{c} p \longrightarrow q \\ \sim p \triangle \sim r \\ r \longleftrightarrow q \\ \hline \therefore p \longrightarrow r \end{array}$$

Resolución

$$(p \longrightarrow q) \wedge (\sim p \triangle \sim r) \wedge (r \longleftrightarrow q) \longrightarrow (p \longrightarrow r)$$
$$V \qquad\qquad V \qquad\qquad V \qquad\qquad F$$

En conclusión, si $V(p \longrightarrow r) = F$, entonces, $V(p) = V$ y $V(r) = F$ trasladamos estos valores en la primera y tercera premisa:

$V(V \longrightarrow q) \longrightarrow V(q) = V$ (única posibilidad)

$V(F \longleftrightarrow q) \longrightarrow V(q) = F$ (única posibilidad)

$\therefore$ Como la variable q tiene los valores de verdad y falsedad a la vez, concluimos afirmando que la inferencia es válida.

4 Comprobar la validez del enunciado siguiente: "Si estudio, entonces no perderé matemáticas y si no juego fútbol, entonces estudiaré; pero perdí matemáticas. Por tanto, jugué fútbol".

Resolución

Sean:

$p =$ "estudio", $q =$ "pierdo matemáticas", $r =$ "juego fútbol".

Entonces, el enunciado dado es como sigue:

$$(p \longrightarrow \sim q) \wedge (\sim r \longrightarrow p) \wedge q \longrightarrow r$$
$$V \qquad\qquad V \qquad\quad V \quad F$$

Si $V(r) = F$ y $V(q) = V$, entonces en la primera y tercera premisas se tiene:

$V(p \longrightarrow F) = V$, entonces $V(p) = F$ y $V(V \longrightarrow p) = V$, entonces $V(p) = V$

$\therefore$ Como la variable p tiene los valores F y V a la vez, se deduce que la inferencia es válida.

Circuitos Lógicos

El valor de verdad de una proposición puede asociarse al pasaje de corriente en un circuito eléctrico controlado por un interruptor.

Mediante una proposición p para representar un interruptor se tiene:

Circuito Cerrado

Pasa corriente por el interruptor cuando $V(p) = V$.

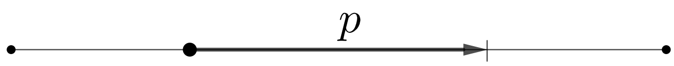


Figura 1.1:

Circuito Abierto

No pasa corriente por el interruptor cuando $V(p) = F$.

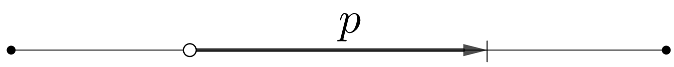


Figura 1.2:

Considerando las clases de instalaciones: en serie y paralelo.

Circuitos en Serie

Consideramos dos interruptores p y q conectados en serie:

Figura 1.3: $p \wedge q$

De aquí tenemos el comportamiento de la conjunción p y q.

Cuando se representa un circuito abierto en serie que deja pasar corriente, entonces deducimos que $\sim p \wedge \sim q$ es falso.

Figura 1.4: $\sim p \wedge \sim q$

Circuitos en Paralelo

Consideramos dos interruptores conectados en paralelo:

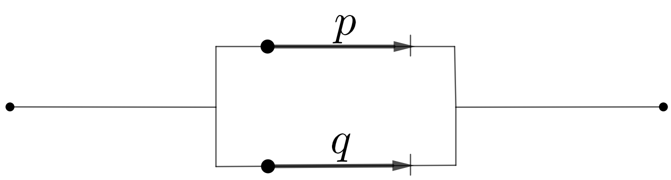


Figura 1.5: $p \vee q$

De aquí tenemos el comportamiento de la conjunción p o q.

Cuando se representa un circuito abierto en paralelo que no deja pasar corriente, entonces deducimos que $\sim p \vee \sim q$ es falso.

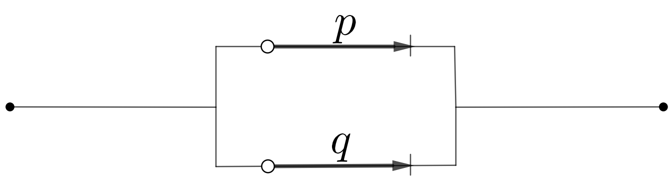
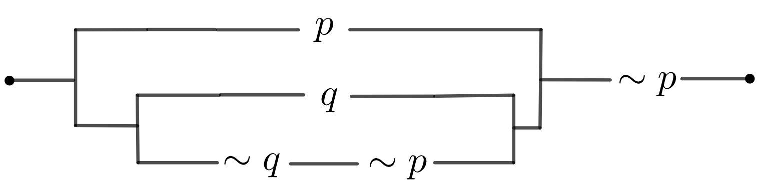


Figura 1.6: $\sim p \vee \sim q$

Ejercicios Resueltos

1 Determinar la menor expresión que representa el circuito dado:

a) Circuito:



Resolución

$$\{p \vee [q \vee (\sim q \wedge \sim p)]\} \wedge \sim p \qquad \text{Absorción}$$

$$\equiv \{p \vee [\sim p \vee q]\} \wedge \sim p \qquad \text{Asociativa}$$

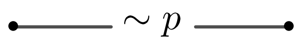
$$\equiv \{(p \vee \sim p) \vee q\} \wedge \sim p \qquad \text{Complemento}$$

$$\equiv \{V \vee q\} \wedge \sim p \qquad \text{Identidad}$$

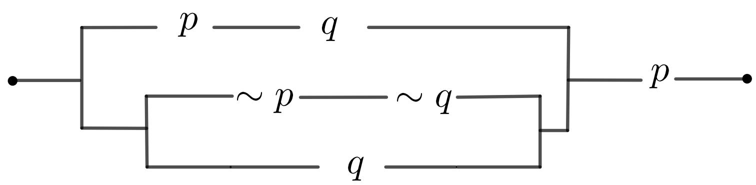
$$\equiv V \wedge \sim p \qquad \text{Identidad}$$

$$\equiv \sim p$$

Por lo tanto el circuito equivalente es:



b) Circuito:



Resolución

$$\{(p \wedge q) \vee [(\sim p \wedge \sim q) \vee q]\} \wedge p \qquad \text{Absorción}$$

$$\equiv \{(p \wedge q) \vee [q \vee \sim p]\} \wedge p \qquad \text{Asociativa}$$

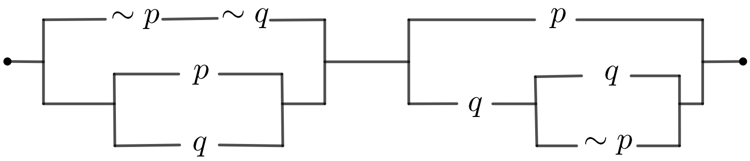
$$\equiv \{[(p \wedge q) \vee q] \vee \sim p\} \wedge p \qquad \text{Absorción}$$

$$\equiv (q \vee \sim p) \wedge p \qquad \text{Absorción}$$

$$\equiv p \wedge q$$

Por lo tanto el circuito equivalente es:

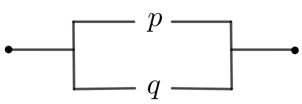
c) Circuito:



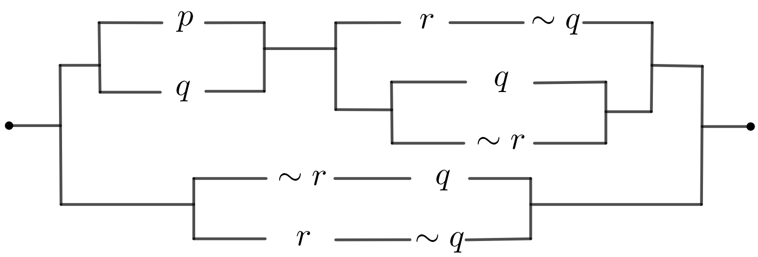
Resolución

$$
\begin{aligned}
&[(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \vee q)] \wedge \{p \vee [q \wedge (q \vee \sim p)]\} && \text{Absorción}\\
&\equiv [(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \vee q)] \wedge \{p \vee q\} && \text{Negación}\\
&\equiv [\sim (p \vee q) \vee (p \vee q)] \wedge (p \vee q) && \text{Complemento}\\
&\equiv V \wedge (p \vee q) && \text{Identidad}\\
&\equiv p \vee q
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el circuito equivalente es:



d) Circuito:



Resolución

$$\{(p \vee q) \wedge [(r \wedge \sim q) \vee (q \vee \sim r)]\} \vee [(\sim r \wedge q) \vee (r \wedge \sim q)] \qquad \text{Negación}$$

$$\equiv \{(p \vee q) \wedge [\sim (\sim r \vee q) \vee (\sim r \vee q)]\} \vee [(\sim r \wedge q) \vee (r \wedge \sim q)] \qquad \text{Complemento}$$

$$\equiv \{(p \vee q) \wedge V\} \vee [(\sim r \wedge q) \vee (r \wedge \sim q)] \qquad \text{Identidad}$$

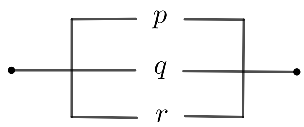
$$\equiv (p \vee q) \vee [(\sim r \wedge q) \vee \sim (\sim r \vee q)] \qquad \text{Complemento}$$

$$\equiv (p \vee q) \vee [(\sim r \wedge q) \vee q] \qquad \text{Absorción}$$

$$\equiv (p \vee q) \vee (q \vee r) \qquad \text{Idempotencia}$$

$$\equiv p \vee q \vee r$$

Por lo tanto el circuito equivalente es:



2 Construir el circuito lógico equivalente del esquema:

$[(p \longrightarrow q) \vee p] \wedge [(p \longrightarrow q) \vee \sim p]$

Resolución

$$[(p \longrightarrow q) \vee p] \wedge [(p \longrightarrow q) \vee \sim p] \qquad \text{Condicional}$$

$$\equiv [(\sim p \vee q) \vee p] \wedge [(\sim p \vee q) \vee \sim p] \qquad \text{Asociativa}$$

$$\equiv [(\sim p \vee p) \vee q] \wedge [(\sim p \vee \sim p) \vee q] \qquad \text{Idempotencia}$$

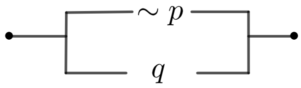
$$\equiv [(\sim p \vee p) \vee q] \wedge [\sim p \vee q] \qquad \text{Complemento}$$

$$\equiv V \wedge [\sim p \vee q] \qquad \text{Identidad}$$

$$\equiv \sim p \vee q$$

Por lo tanto el circuito lógico equivalente es:

3 Desarrollar las siguientes inferencias lógicas.



a) Demostrar:

$P_1 :\sim (p \vee q)$

$P_2 : r \longrightarrow (p \vee q)$

$\underline{P_3 : r \vee (s \longrightarrow p)}$

$C :\sim q \wedge \sim s$

Resolución

$P_1 :\sim (p \vee q)$

$P_2 : r \longrightarrow (p \vee q)$

$P_3 : r \vee (s \longrightarrow p)$

$P_4 :\sim r$: se deduce de la P_1 y P_2 mediante (MTT)

$P_5 : s \longrightarrow p$: se deduce de la P_3 y P_4 mediante (MTP)

$P_6 :\sim p \wedge \sim q$: se obtiene al utilizar (LD) de la P_1

$P_7 :\sim p$: se obtiene al utilizar (S) en la P_6

$P_8 :\sim s$: se deduce de la P_5 y P_7 mediante (MTT)

$P_9 :\sim q$: se obtiene al utilizar (S) en la P_6

$P_{10} :\sim q \wedge \sim s$: se deduce de la P_8 y P_9 al utilizar (A)

b) Demostrar:

$P_1 :\sim p$

$P_2 : q \longrightarrow p$

$\underline{P_3 :\sim r \vee q}$

$C :\sim r$

Resolución

$P_1 :\sim p$

$P_2 : q \longrightarrow p$

$P_3 :\sim r \vee q$

$P_4 :\sim q$: se deduce de la P_1 y P_2 mediante (MTT)

$P_5 :\sim s$: se deduce de la P_3 y P_4 mediante (MTP)

Examen de repaso

1 Simbolizar las proposiciones siguientes, diciendo claramente lo que representan las letras mayúsculas elegidas como símbolos. Para las proposiciones matemáticas utilizar los símbolos matemáticos tópicos.

a) Si el libro cuesta más de cien pesetas, entonces Roy no podrá comprarlo

b) O esta es la casa de Soledad o la dirección que nos han dado no es correcta.

c) Se ha levantado aire y ha refrescado.

d) Si x es menor que tres, entonces es menor que cuatro.

e) Si x no es igual a cinco, entonces o es mayor que cinco o es menor que cinco.

2 Utilizando los símbolos dados, simbolizar las proposiciones siguientes. (No es necesario escribir las proposiciones en castellano)

Sea

P = Juan ha venido demasiado pronto

Q = María ha venido demasiado tarde

R = El Sr. Pérez está enfadado

a) Si Juan ha venido demasiado pronto o María demasiado tarde, entonces el Sr. Pérez está enfadado.

b) Si María ha venido demasiado tarde, entonces Juan no ha venido demasiado pronto.

c) O el Sr. Pérez está enfadado o María no ha venido demasiado tarde.

d) María ha venido demasiado tarde y Juan ha venido demasiado pronto, y el Sr. Pérez está enfadado.

e) Si el Sr. Pérez no está enfadado, entonces Juan no ha venido demasiado pronto y María no ha venido demasiado tarde.

f) O María no ha venido demasiado tarde o Juan ha venido demasiado pronto

g) Si María no ha venido demasiado tarde y Juan no ha venido demasiado pronto, entonces el Sr. Pérez no está enfadado

3 Completar las proposiciones siguientes eligiendo de entre las palabras escritas al final la que está definida por la proposición dada.

a) La proposición molecular que utiliza el término de enlace (y) es una....................
b) La proposición molecular que utiliza el término de enlace (no) es una.......................
c) La combinación de una o mÃ¡s proposiciones atómicas con un término de enlace de proposiciones se denomina.............................
d) En lógica una proposición completa que no tiene término de enlace se denomina........................
e) La proposición molecular que utiliza el término de enlace (si.......entonces.....) se denomina ....
f) La proposición situada antes del término de enlace en una proposición condicional se denomina...................
g) La proposición situada después del término de enlace en una proposición condicional se denomina..........................
h) La proposición molecular que utiliza el término de enlace (o) es una...................

Antecedente	Conjunción
Atómica	Consecuente
Proposición molecular	disyunción
Condicional	Negación
Equivalencias notables	Tautología

4 Señalar el término de enlace dominante en las proposiciones siguiente. Indicar después cómo será la proposición en símbolos lógicos y añadir los paréntesis donde sean necesarios

a) No ocurre que, o Jaime es el más alto o Juan es el más alto
b) Tomás no es nuestro representante y José no es nuestro capitan.
c) O β está antes que α y θ está antes que φ o yo no soy griego.
d) Antonio se marcha ahora y o yo iré con él o Pedro irá con él.

e) Si el baile empieza a las seis, entonces nosotros llegaremos pronto y Pilar llegará tarde.

5. En algunas de las proposiciones siguientes son necesarios paréntesis para que correspondan a las proposiciones moleculares indicadas en la izquierda. Poner los paréntesis en los lugares correspondientes cuando sean necesarios.

Capítulo 2

TEORÍA DE CONJUNTOS

2.1. Noción de Conjunto

Intuitivamente un conjunto es la reunión, colección o agrupación de objetos reales o ideales, a estos objetos se les denomina elementos del conjunto.
Los conjuntos generalmente se denotan con letras mayúsculas $A, B, C, \ldots Z$ y sus elementos separados por comas y encerrados entre llaves.

2.2. Determinación de conjuntos

Todo conjunto puede determinarse de dos maneras:

2.2.1. Por extensión

Cuando se mencionan uno a uno a sus elementos, o se da una idea de la sucesión de ellos.

2.2.2. Por comprensión

Cuando se enuncia a sus elementos por medio de una propiedad o cualidad común a ellos y que es valida únicamente a estos.

NOTA:

No todo conjunto se puede determinar por extensión y comprensión a la vez.

Ejemplo 1 *Consideremos:*

Por Extensión:

- $A = \{a, e, i, o, u\}$
- $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$
- $C = \{5, 15, 25, 35, 45, 55, \ldots\}$

Por Comprensión:

- $A = \{x/x \text{ es una letra vocal}\}$
- $B = \{y/y \text{ es un número impar positivo } \wedge y < 16\}$
- $C = \{10n + 5/n \text{es un número entero no negativo }\}$

2.3. Relacion de Pertenencia

Un elemento pertenece ($\in$) a un conjunto si forma parte de dicho conjunto. Un elemento no pertenece ($\notin$) a un conjunto si no cumple con la condición anterior.

Ejemplo 2 *Dado el conjunto* $A = \{4, 6, 7, 9\}$ *Entonces:*

- $4 \in A$ *(4 pertenece a A)*
- $9 \in A$ *(9 pertenece a A)*
- $5 \notin A$ *(4 no pertenece a A)*

2.4. Diagramas de Venn Euler

Son figuras geométricas cerradas que se utilizan para representar a los conjuntos; los elementos de estos se representan por puntos dentro de la figura.

Ejemplo 3 *Sea el conjunto* $A = \{1, 2, 3, 4\}$*, entonces su diagrama de Venn Euler se muestra en la figura 2.1.*

Figura 2.1: Diagrama de Venn Euler del conjunto A

2.5. Relación entre conjuntos

2.5.1. Inclusión $\subset$

Se dice que un conjunto A esta incluido entro conjunto B, cuando todos los elementos de A pertenecen a B y se denota por $A \subset B$. 2.2.

Figura 2.2: Inclusión: $A \subset B$

Nota 1 *Si $A \subset B$, luego se puede decir:*

- *A esta incluido en B*
- *A esta contenido en B*
- *A es subconjunto de B*

Nota 2 *Si algun elemento del conjunto A, no pertenece a B entonces decimos que A no esta incluido en B y se denota por $A \subseteq B$.*

Ejemplo 4 *Sean:*

1. $A = \{x/x\textit{es un arequipeño}\}$,
   $B = \{y/y \textit{ es un peruano}\}$,
   $\therefore A \subset B$: *"A esta incluido en B".*

2. $M = \{2, 4, 6\}$,
   $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
   $\therefore M \subset N$: *"M es subconjunto N".*

3. $P = \{a, b, c, d\}$,
   $Q = \{h, i, j, k\}$,
   $\therefore P \subseteq Q$: *"P no es subconjunto Q".*

2.5.2. Igualdad

Dos conjuntos A y B son iguales cuando tienen los mismos elementos sin importar el orden. Y se denota por: $A = B$

Se define:

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A}$$

2.5.3. Conjuntos diferentes ($\neq$)

Dos conjuntos son diferentes si uno de ellos tiene por lo menos un elemento que no posee el otro.
Se define:

$$\boxed{A \neq B \Leftrightarrow A \not\subset B \vee B \not\subset A}$$

EJERCICIOS

1. Resolver para el vector incognita **Solución**

Rta. $(4,0)$

2.5.4. Conjuntos comparables

Dos conjuntos A y B son comparables cuando sólo uno de ellos está incluido en el otro, es decir:

$$\boxed{A \subset B \text{ o } B \subset A}$$

NOTA:

Si dos conjuntos son iguales, entonces son comparables; lo contrario no siempre se cumple.

2.5.5. Conjuntos disjuntos

Si dice que dos conjuntos son disjuntos cundo no poseen elementos comunes. Simbolicamente:
A y B son disjuntos $\Leftrightarrow \exists x/x \in A \wedge x \notin B$

2.5.6. Conjuntos equipotentes

Dos conjuntos serán equipotentes cuando el número de sus elementos son iguales.

2.6. Cardinal de un Conjunto

Es el número entero, no negativo, que indica la cantidad de elementos diferentes de un conjunto. El cardinal de un conjunto A se denota $n(A)$.

Ejemplo 5 *Tenemos:*

$A = \{7, 4, 6, 3\} \rightarrow n(A) = 4$

$B = \{2, 4, 6, 8, 10\} \rightarrow n(B) = 5$

$C = \{6, 4, 4, 6, 4\} \rightarrow n(C) = 2$

2.7. Conjuntos especiales

2.7.1. Conjunto Nulo o vacio

Es aquel conjunto que carece de elementos y se le denota comunmente como: ϕ o $\{\}$.

Ejemplo 6 $A = \{x/x \text{ es un número entero} \wedge 3 < x < 4\}$ *es un conjunto vacio.*

Nota 3 *El conjunto vacio siempre esta incluido en cualquier conjunto. Esto es, sea A un conjunto cualquiera, entonces $\phi \subset A$.*

2.7.2. Conjunto unitario o Singleton

Es aquel conjunto que tiene un solo elemento.

Ejemplo 7 *El conjunto* $C = \{x/x \text{ es un número entero} \wedge 3 < x < 5\}$ *es unitario.*

2.7.3. Conjunto Universal o Referencial

Es un conjunto referencial dado que se elige de manera arbitraria de acuerdo a la situación particular que se esta tratando. Contiene a todos los conjuntos considerados y se le denota generalmente por: $\mathbb{U}$

Ejemplo 8 *Dados los conjuntos* $A = \{3, 5, 7, 9\}, B = \{5, 13, 19, 23\}$. *Un Conjunto universal para A y B puede ser cualquiera de los siguientes conjuntos:*

- $\mathbb{U} = \{x/x \text{ es impar} \wedge x < 25\}$

- $\mathbb{U} = \{x/x \text{ es un numero entero positivo}\}$

- $\mathbb{U} = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$

2.7.4. Conjunto de conjuntos ó Familia de Conjuntos

Es aquel conjunto, que por lo menos tiene a un conjunto como elemento.

Ejemplo 9 $A = \{\{3\}, 2\}, B = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$

2.7.5. Conjunto Potencia

Dado un conjunto A, se denomina conjunto potencia de A al que esta formado por todos los subconjuntos de A. Se le denota $P(A)$.

Ejemplo 10 *Dado* $A = \{7, 5, 3\}$, *los subconjuntos de* A *son:*

$$\phi, \{7\}, \{5\}, \{3\}, \{7, 5\}, \{7, 3\}, \{5, 3\}, \{7, 5, 3\}$$

Enonces el conjunto potencia de A *es :*

$$P(A) = \{\phi, \{7\}, \{5\}, \{3\}, \{7, 5\}, \{7, 3\}, \{5, 3\}, \{7, 5, 3\}\}$$

***Observación* 1** *Si* $n(A)$ *es el cardinal del conjunto* A, *se verifica que:*

$$n[P(A)] = 2^{n(A)}$$

Ejercicios Resueltos

1. Sea el conjunto :

$$A = \{1; 2; \{1\}; \{1, 3\}; \{\varnothing\}\}$$

Se tiene:

a). $3 \in A$ − − − − − − − − − − − − −→ (pertenece es dentro de la llave-cita) F

b). $\{1\} \in A$ V

c). $\varnothing \in A$ − − − − − − − − − − − − −→ (mas bien debe estar incluido) F d). $\{1,2\} \in A$ V

e). $\{1\} \subseteq A$ F

f). $\{\varnothing\} \subset A$ V

g). $\{1,\{1\}\} \subset A$ – – – – – – – – – -→ ($\subset$ todo debe estar dentro del conjunto) F

h). $n(A) = 6$ F

¿Cuántas proposiciones son falsas? Sol. 5

2 **Dado el conjunto unitario**

$$A = \{x+y; x+2y-3; 12\}$$

Calcular: $x^2 + y^2$ Sol. 90

3 **Dados los conjuntos**

$U = \{1,2,3,4,5,\ldots,15\}$

$A = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge x < 6\}$

$B = \left\{x/x \in \mathbb{N} \wedge \sqrt{3} < x < \sqrt{26}\right\}$

$C = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x > 10\}$

Calcular $n(A) \times n(B) \times n(c)$

Resolución

Cambiamos de representación para los conjuntos A, B, C, esto es,

$A = \{1,2,3,4,5\}$

$B = \{2,3,4,5\}$, pues$\sqrt{3} = 1{,}73205$ y $\sqrt{26} = 5{,}0990$

$C = \{11,12,13,14,15\}$

Por lo tanto, $n(A) \times n(B) \times n(c) = (5)(4)(5) = 100$

4 **Si los conjuntos** $A = \{7, m+3\}$ **y** $B = \{12, p-4\}$ **son conjuntos iguales. Hallar** $p+m$

Resolución

Si $A = B$, entonces tienen los mismos elementos, luego

$$\begin{cases} p-4 = 7 \\ m+3 = 12 \end{cases}$$

Entonces $p = 11$ y $m = 9$. Por lo tanto, $m + p = 20$.

5 **Dados los conjuntos iguales A, B y C, hallar $m + t + s$ $(m, t, s \in \mathbb{N})$. Si $A = \{15, 12, 9\}, B = \{2m, m+3, 15\}$ y $C = \{s+2, 12, 10+t\}$.**

Resolución

Como $A = B$, entonces se deduce que

$$\begin{cases} 2m = 12 \\ m + 3 = 9 \end{cases} \rightarrow m = 6$$

Tambien, como $A = C$, se tiene que

$$\begin{cases} s + 2 = 9 \\ 10 + t = 15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s = 7 \\ t = 5 \end{cases}$$

Por lo tanto, $m + t + s = 18$

6 **Si $n[P(A)]$ representa el numero de elementos del conjunto potencia de A. Hallar $n(A).n(B)$, si $n[P(A)] = 128$ y $n[P(B)] = 512$.**

Resolución

Como

$$\begin{cases} n[P(A)] = 128 \\ n[P(B)] = 512 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} n[P(A)] = 2^7 \\ n[P(B)] = 2^9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} n(A) = 7 \\ n(B) = 9 \end{cases}$$

Por lo tanto, $n(A).n(B) = 63$

7 **Dado el conjunto $A = \{x + 2/x \in \mathbb{Z}, x^2 < 9\}$, calcule el numero de elementos de A.**

Resolución

Determinamos el conjunto A por extensión, tenemos

$$\begin{aligned} A &= \{x + 2/x \in \mathbb{Z}, x^2 < 9\} \\ &= \{x + 2/x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}\} \\ &= \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $n(A) = 5$

8 **Para dos conjuntos comparables donde uno de ellos tiene 3 elementos más que el otro, se cumple que la suma de los cardinales de sus conjuntos potencia es 576.**

¿Cuántos subconjuntos tiene la unión de ellos?

Resolución

Se tiene los conjuntos comparables, donde: $B \subset A$

- $n[P(A)] + n[P(B)] = 576$
- $n(A) = n(B) + 3$

Reemplazando

$$\begin{aligned} 2^{n(A)} + 2^{n(B)} &= 576 \\ 2^{n(B)+3} + 2^{n(B)} &= 576 \\ 2^3 \times 2^{n(B)} + 2^{n(B)} &= 576 \\ 9 \times 2^{n(B)} &= 576 \\ 2^{n(B)} &= 2^6 \end{aligned}$$

Entonces:

- $n(B) = 6$
- $n(A) = 9$

Si:

$B \subset A \Longrightarrow A \cup B = A$

$$\therefore n[P(A \cup B)] = 2^9 = 512$$

9 **Dados los conjuntos A, B y C y los siguientes datos:**

$$n(A \times B) = 84$$

$$n(B \times C) = 98$$

$$n(A) + n(C) = 26$$

Calcular el número de subconjuntos propios de B.

Resolución

$$n(A \times B) = 84$$

$$n(B \times C) = 98$$

Sumando los dos se tiene:

$$\begin{aligned}
n(A \times B) + n(B \times C) &= 182 \\
n(A) \times n(B) + n(B) \times n(C) &= 182 \\
n(B)\,[n(A) + n(C)] &= 182 \\
n(B)\,(26) &= 182 \\
n(B) &= \frac{182}{26} \\
n(B) &= 7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
sub\ \ conjuntos\ \ propios\ \ de\ \ B &= 2^{n(B)} - 1 \\
&= 2^7 - 1 \\
&= 128 - 1 \\
&= 127
\end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

1 Dados:

$$A = \{a^2 + b^2 + c^2; d + e\}$$

$$B = \{c^2 + 1; d - e + 4; 5\}$$

Si: $A = B$; A es unitario, $c > a > b$ y son no negativos.

Hallar: $a + b + c + d \times e$

2 Sean los conjuntos:

$$U = \{x/x \in \mathbb{Z}, 1 \leqslant x \leqslant 9\}$$

$$A = \{2x/x \in \mathbb{Z}, 1 \leqslant x \leqslant 4\}$$

$$B = \{2x - 1/x \in \mathbb{Z}, 1 \leqslant x \leqslant 5\}$$

$$C = \{4; 5; 6\}$$

Hallar un subconjunto N de U tal que:

$$N \subset C \qquad N \subseteq A \qquad N \subseteq B$$

Entonces se puede afirmar que:

a). La solución para N es única.

b). Hay exactamente 2 soluciones.

c). Hay más de 3 soluciones.

d). Hay exactamente 3 soluciones.

e). No hay solución. Sol. $Hay \quad 3 \quad soluciones$

2.8. Operaciones entre Conjuntos

2.8.1. Unión ó Reunión

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por la agrupación de todo los elementos de A con todos los elementos de B. Se denota $A \cup B$ y se define:

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

PROPIEDADES

1. $A \cup B = B \cup A$

2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3. $A \cup A = A$

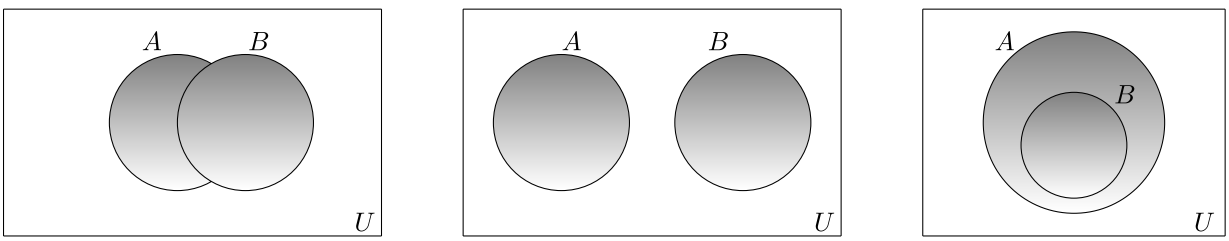
4. $A \cup U = U$

5. $A \cup \phi = A$

Ejemplo 11 *Dados* $A = \{6, 8, 2\}, B = \{3, 7\}$, *entonces:*

$$A \cup B = \{2, 3, 6, 7, 8\}$$

Diagramas:



2.8.2. Intersección

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a los dos conjuntos a la vez. Se denota $A \cap B$ y se define:

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

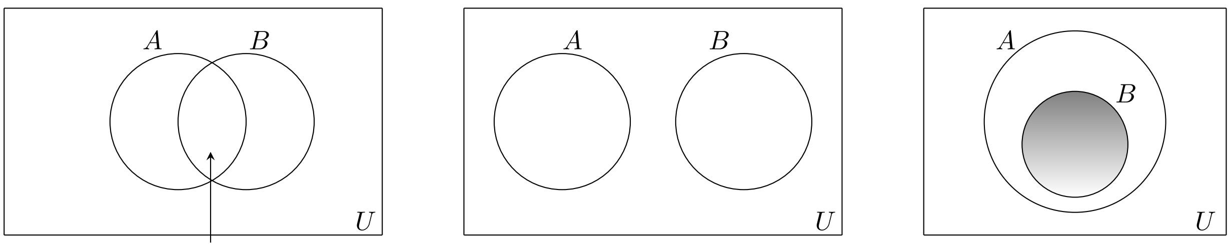
PROPIEDADES

1. $A \cap B = B \cap A$
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. $A \cap A = A$
4. $A \cap U = A$
5. $A \cap \phi = \phi$

Ejemplo 12 *Dados* $A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, *entonces:*

$$A \cap B = \{3, 5\}$$

Diagramas:



$A \cap B$ $\quad$ $A \cap B = \phi$ $\quad$ $A \cap B = B$

2.8.3. Diferencia

La diferencia de dos conjuntos A y B (en ese orden); es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A, pero no a B. Se denota por $A - B$ y se define:

$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

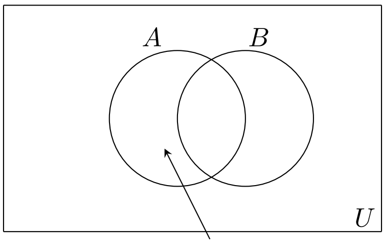
PROPIEDADES

1. $A - B \neq B - A$

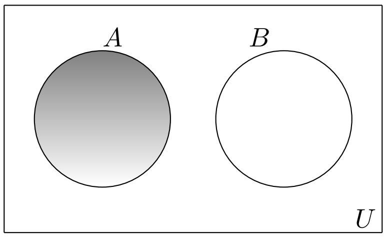
Ejemplo 13 *Dados* $A = \{6, 8, 4, 7, 2\}, B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, *entonces:*

$$A - B = \{8, 7, 2\}$$

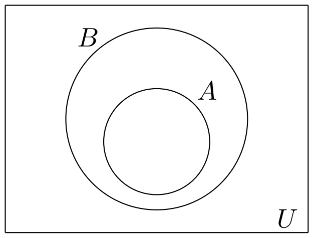
Diagramas:



$A - B$



$A - B = A$



$A - B = \phi$

2.8.4. Diferencia Simétrica

Dados dos conjuntos A y B, la diferencia simétrica de ellos es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o B pero no a ambos. Se denota por $A \triangle B$ y se define:

$$A \triangle B = \{x / x \in (A - B) \vee x \in (B - A)\}$$

PROPIEDADES

1. $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$

2. $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$

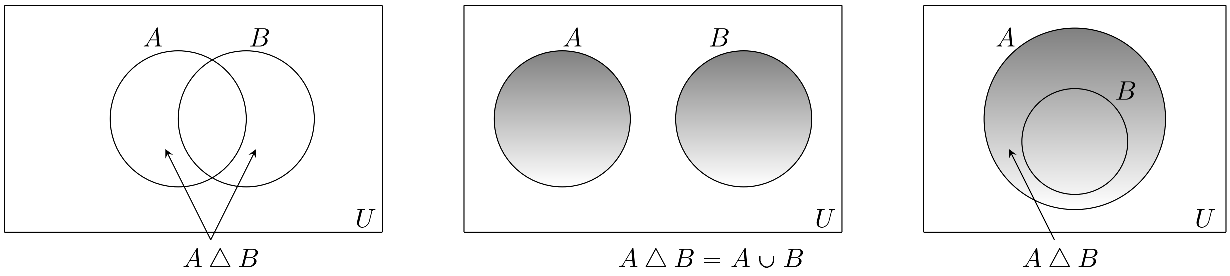
3. $A \triangle A = \phi$

4. $A \triangle \phi = A$

Ejemplo 14 *Dados* $A = \{6, 4, 2, 8\}, B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, *entonces:*

$$A \triangle B = \{2, 8, 3, 5, 7\}$$

Diagramas:



2.8.5. Complemento

El complemento de un conjunto A, es el conjunto formado por los elementos del conjunto universal $\mathbb{U}$ que no pertenecen a A. Se denota por $A^c, A'.\overline{A}, C(A)$ y se define:

$$A' = \{x/x \in \mathbb{U} \wedge x \notin A\} = \mathbb{U} - A$$

PROPIEDADES

1. $(A')' = A$

2. $\phi' = U$

3. $U' = \phi$

4. $A \cup A' = U$

5. $A \cap A' = \phi$

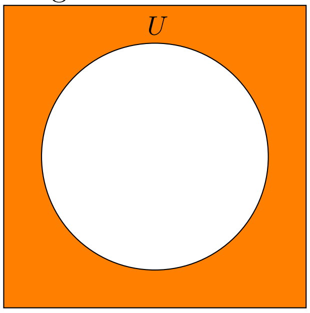
6. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

7. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Ejemplo 15 *Dados* $\mathbb{U} = \{x/x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x < 8\}, A = \{2, 3, 5\}$, *entonces:*

$$A' = \{1, 4, 6, 7\}$$

Diagramas:



2.9. Relaciones con Cardinales

1. Si A y B son disjuntos:
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

2. Para dos conjuntos cualquiera A y B:
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(a \cap B)$$

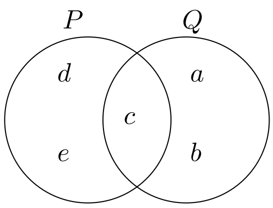
3. Para tres conjuntos cualesquiera A, B y C:
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Ejercicios Resueltos

1. Si $P \cup Q = \{a, b, c, d, e\}, P - Q = \{d, e\}, P \cap Q = \{c\}$. Calcular $n(Q - P) + n(Q)$

Resolución

Según las condiciones del problema se tiene la figura.



Luego se tiene:

$$\begin{cases} n(Q - P) = 2 \\ n(Q) = 3 \end{cases}$$

Entonces: $n(Q-P)+n(Q)=5$

2 Si $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$,$B=\{f,b,c,h,i,j\}$,$C=\{a,c,e,i,k,l\}$,$D=\{a,b,d,f,k,i,j\}$. Hallar $C\cap[D-(A\cap B)]$

Resolución

$$A\cap B=\{b,c,f\}$$

$$D-(A\cap B)=\{a,d,k,i,j\}$$

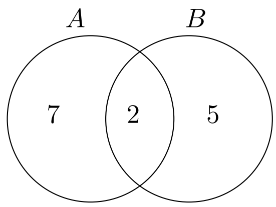
Luego:

$$C\cap[D-(A\cap B)]=\{a,i,k\}$$

3 Si $n(A\cap B)=2$, $n(A\cup B)=14$, $n(A-B)=7$. Hallar $n(A)-n(B)$

Resolución

De las condiciones del ejercicio se tiene la figura.



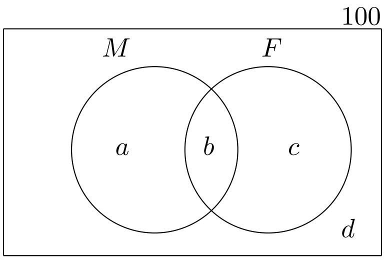
Entonces

$$n(A)-n(B)=9-7=2$$

4 De un grupo de 100 alumnos, 49 no llevan el curso Matemática y 53 llevan el curso de Fisica. Si 27 no llevan ninguno de estos cursos.¿Cuantos llevan uno, y solo uno de los cursos?

Resolución

Para resolver el problema consideramos la figura.



Datos:

$$\begin{cases} a+b+c+d=100 \\ c+d=49 \\ b+c=53 \\ d=27 \end{cases}$$

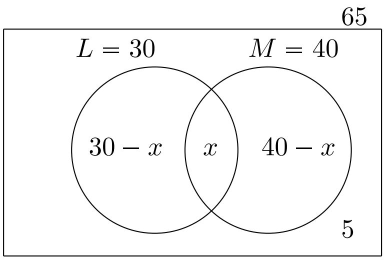
Si $d=27 \rightarrow c=22$, luego si $c=22 \rightarrow b=31$. Por lo tanto,

$$a+b+c+d=a+53+d=100 \rightarrow a=20$$

Finalmente, llevan solo un curso: $a+c=42$

5 De un grupo de 65 alumnos: 30 prefieren lenguaje, 40 prefieren matemática y 5 prefieren otros cursos. ¿Cuántos prefieren matemática y lenguaje?

Resolución



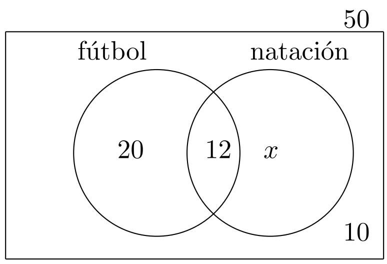
Se tiene del gráfico:

$$\begin{aligned} 30-x+x+40-x+5 &= 65 \\ -x &= 65-75 \\ -x &= -10 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \text{10 prefieren los dos cursos.}$$

6. De 50 estudiantes encuestados: 20 practican solo fútbol, 12 practican fútbol y natación y 10 no practican ninguno de estos deportes. ¿Cuántos practican natación y cuantos solo natación?

Resolución



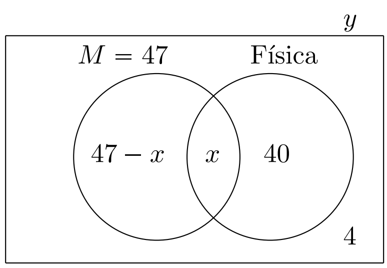
Del gráfico se tiene:

$$\begin{aligned} 20 + 12 + x + 10 &= 50 \\ x &= 50 - 42 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

$$\text{Practican Natación} = 12{+}8 = 20$$
$$\therefore \quad \text{Practican solo Natación} = 8$$

7. En una reunión de profesores de ciencias: 47 eran de matemática; 40 eran solo de física y 4 no enseñaban ninguno de estos cursos. ¿Cuántos profesores integran la reunión?

Resolución



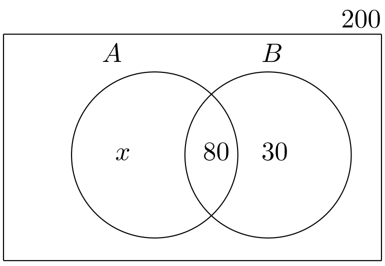
Del gráfico se tiene:

$$\begin{aligned} 47 - x + x + 40 + 4 &= y \\ 91 &= y \end{aligned}$$

$\therefore$ La reunión integral 91 profesores.

8 De 200 lectores: 80 leen la revista A y B; 110 son lectores de la revista B. ¿Cuántos leen solo la revista A? Sol:90

Resolución



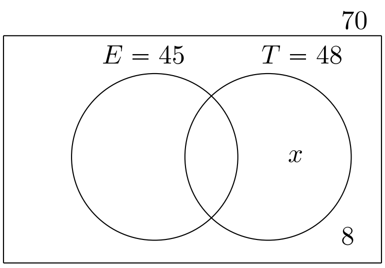
Del gráfico se tiene:

$$\begin{aligned} x + 80 + 30 &= 200 \\ x &= 200 - 110 \\ x &= 90 \end{aligned}$$

$\therefore$ 90 Leen solo la revista A.

9 En una asamblea de 70 integrantes de un club: 45 son estudiantes; 48 trabajan; 8 no trabajan ni estudian. ¿Cuántos trabajan, pero no estudian?

Resolución



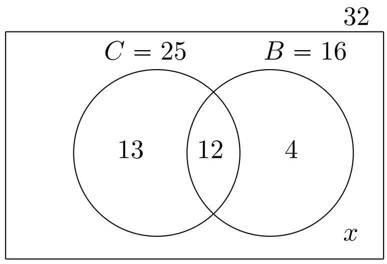
Del gráfico se tiene:

$$\begin{aligned} 45 + x + 8 &= 70 \\ x &= 70 - 53 \\ x &= 17 \end{aligned}$$

$\therefore$ Solo trabajan 17 personas.

10 En una peña criolla trabajan 32 artistas, de estos: 16 bailan; 25 cantan y 12 cantan y bailan. ¿Cuantos artistas no cantan ni bailan?

Resolución



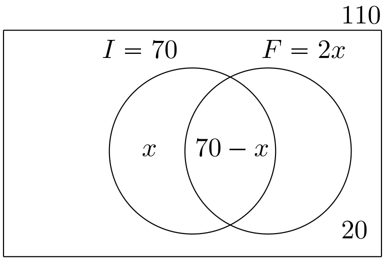
Del gráfico se tiene:

$$\begin{aligned} 4 + 12 + 13 + x &= 32 \\ x &= 32 - 29 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$\therefore$ 3 no cantan ni bailan.

11 De un grupo de 110 personas: 70 hablan ingles, 20 no hablan ni ingles ni francés; el número de los que hablan francés es el doble de los que hablan solamente ingles. ¿Cuántos hablan ingles y francés?

Resolución



Del gráfico se tiene:

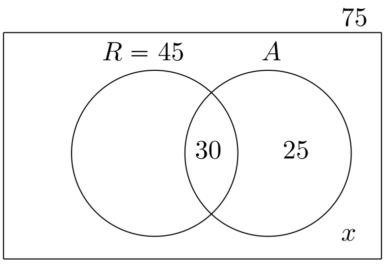
$$\begin{aligned} 2x + x + 20 &= 110 \\ 3x &= 90 \\ x &= 30 \end{aligned}$$

$$70 - x = 70 - 30$$
$$\therefore \quad 70 - x = 40 \text{ hablan los dos idiomas.}$$

12 De 75 alumnos de un aula, los 3/5 usa reloj; 1/3 de los alumnos solo usa anteojos; los 2/5 usa anteojos y reloj. ¿Cuántos no usan anteojos ni reloj?

Resolución

$$\left\{ \begin{array}{l} Reloj = \dfrac{3}{5}(75) = 45 \\ Solo \;\; anteojos = \dfrac{1}{3}(75) = 25 \\ Anteojos \;\; y \;\; reloj = \dfrac{2}{5}(75) = 30 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Reloj = 45 \\ Solo \;\; anteojos = 25 \\ Anteojos \;\; y \;\; reloj = 30 \end{array} \right.$$



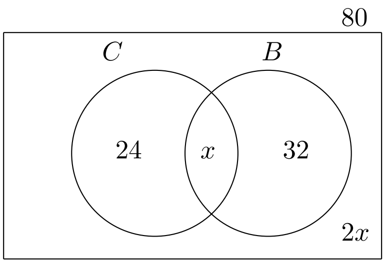
Del gráfico se tiene:

$$\begin{aligned} 45+25+x &= 75 \\ x &= 75-70 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad 5 \text{ no usan anteojos ni reloj.}$$

13 A una reunión asistieron 80 personas de las cuales 32 no cantan, pero si bailan y 24 no bailan, pero si cantan. Si el número de personas que no cantan ni bailan es el doble del número de personas que cantan y bailan. ¿Cuántas personas no cantan ni bailan? Sol:16

Resolución



Del gráfico se tiene:

$$\begin{aligned} 24+x+32+2x &= 80 \\ 3x &= 80-56 \\ 3x &= 24 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad 2x = 2(8) = 16 \text{ personas no cantan ni bailan.}$$

14 De un grupo de turistas: 31 visitaron el Callao, 29 visitaron Trujillo, 34 visitaron Cusco, 38 visitaron solo y nada mas que 1 lugar, 22 visitaron exactamente 2 lugares. ¿Cuantos visitaron los 3 lugares y cuantos eran en total?

Resolución

Para resolver el problema consideremos la figura 2.3.

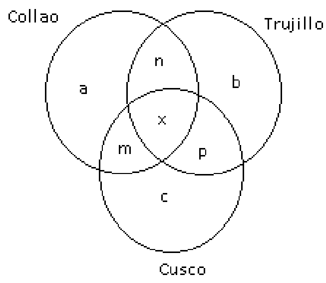


Figura 2.3:

$$a+m+n+x=31$$

$$b+n+p+x=29$$

$$c+m+p+x=34$$

sumando miembro a miembro

$$\begin{aligned}(a+b+c)+2(m+n+p)+3x &= 94\\ 38+2(22)+3x &= 94 \rightarrow x=4\end{aligned}$$

Luego, visitaron los tres lugares 4 turistas. Y como

$$a+b+c+m+n+p+x=38+22+4=64$$

Eran en total 64 turistas.

15 De 110 personas que leen por lo menos dos de las tres revistas A,B y C se observa que 40 leen las revistas A y B, 50 leen A y C, 60 leen B y C. ¿Cuantas personas leen las tres revistas?

Resolución

$$b+n=40$$

$$a+n=50$$

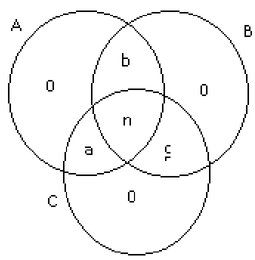


Figura 2.4:

$$c + n = 60$$

Sumando miembro a miembro

$$(a + b + c) + 3n = 150(1)$$

Por otro lado, de la figura 2.4, se tiene

$$(a + b + c) + n = 110(2)$$

Haciendo: (1)-(2)

$$2n = 40 \rightarrow n = 20$$

Luego, leen las tres revistas 20 personas.

16 En un salon de clase, formado por 35 alumnos, entre los hombres y mujeres, 7 hombres aprobaron matemática, 6 hombres lenguaje, 5 hombres y 8 mujeres no aprobaron ninguno de estos cursos, 3 aprobaron los 2 cursos y 11 aprobaron solo matemática. Si hay 16 hombres en el salón. ¿Cuantas mujeres aprobaron solo lenguaje?

Resolución

Para resolver el problema consideramos la figura 2.5. De las condiciones del problema

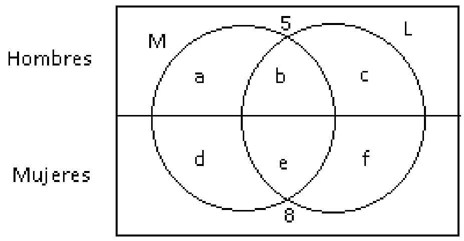


Figura 2.5:

$$\begin{cases} a+b=7 \\ b+c=6 \\ b+e=3 \\ a+d=11 \\ a+b+c+5=16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=2 \\ c=4 \\ d=6 \\ e=1 \end{cases}$$

Como el total de alumnos es 35, se tiene

$5+8+a+b+c+d+e+f = 5+8+5+2+4+6+1+f = 35 \rightarrow f = 4$

Luego, aprobaron solo lenguaje 4 mujeres.

Ejercicios propuestos

1. Una persona come huevos o queso en su desayuno: cada mañana durante el mes de Julio. Si come queso 25 mañanas y huevo 18 mañanas ¿ Cuántas mañanas come huevo y queso?

2. Se hizo una encuesta en una sala de la biblioteca, para libros; y se obtuvo el siguiente resultado:

   - 60 % leen el libro A
   - 50 % leen el libro B
   - 50 % leen el libro C
   - 30 % leen el libro A y B
   - 20 % leen el libro B y C
   - 30 % leen el libro A y C

- 10 % leen los tres libros.

a) ¿ Qué porcentaje leen exactamente dos libros?

b) ¿ Qué porcentaje no leen ninguno de los tres libros?

3. En una encuesta realizada en un grupo de 100 estudiantes de un instituto de Idiomas, se obtuvo el siguiente resultado: Estudiaban ingles, 28; portugués, 30; francés, 42; ingles y portugués, 8; ingles y francés, 10; portugués y francés, 5; los tres idiomas, 3. Se pregunta:

a) ¿ Cuántos estudiantes no aprendían ningún idioma ?

b) ¿ Cuántos estudiantes tenían el francés como único idioma de estudio?

4. De 60 deportistas se observa que 24 de ellos practican fútbol, 26 practican basquet y 25 practican voleibol; 13 practican fútbol y basquet; 10 practican basquet y voleibol, 9 practican fútbol y voleibol. Si 6 practican los 6 deportes. ¿Cuántos no practican ninguno de estos deportes? Sol:11

5. En una encuesta realizada a un grupo de 100 estudiantes de un instituto de idiomas se obtuvo el siguiente resultado: 28 estudian español; 30 estudian alemán; 42 estudian frances; 8 estudian español y alemán; 10 estudian español y frances; 5 estudian aleman y frances; 3 estudian los tres idiomas. ¿Cuántos estudiantes toman el frances como único idioma de estudio? Sol:30

6. Una encuesta realizada entre 82 madres de familia arrojo el siguiente resultado: 43 saben costura; 47 saben reposteríÂa; 58 saben tejido; 19 saben costura y reposteríÂa; 28 saben costura y tejido; 30 saben reposteríÂa y tejido; 11 saben las tres ocupaciones. ¿Cuántas amas de casa saben solo una de las tres especialidades? Sol:27

7. De 185 lectores de revistas: 47 leen la revista A; 53 leen la revista B; 65 leen la revista C; 15 leen las revistas Ay B: 13 leen las revistas B y C; 5 leen las revistas A, B y C; 17 leen las revistas A y C. ¿Cuántos leen la revista A, pero no la revista B? Sol:32

8 En una academia de computacion se observa que todos los que estudian Pascal, estudian Cobol; 15 estudian Pascal, Cobol y Basic; 60 estudian Basic; 80 estudian Cobol. La cantidad de los que estudian Cobol y Basic pero no Pascal es el doble de los que estudian solo basic y su vez es el triple de los que estudian solo Cobol. ¿Cuantos estudian Pascal pero no basic? Sol:11

9 En un congreso internacional de medicina donde solo asistieron cardiólogos se debatió el problema de la eutanacia, planteandose una moción:

- 115 Europeos votaron a favor
- 75 cardiologos votaron en contra
- 60 Europeos votaron en contra
- 80 cardiologos votaron a favor

Si el numero de cardiologos europeos excede en 30 al numero de americanos de otras especialidades y no hubo abstenciones. ¿ Cuántos médicos participaron en el congreso? Sol: 300

10 El registro central de la UNA proporcionó los siguientes datos con respecto a un grupo de 200 estudiantes del primer ciclo:

105 están inscritos en Matemática Básica, 115 en Cálculo I y 75 en Física I; 65 están en Matemática Básica y Cálculo I, 35 en Física I y Matemática Básica, 30 en Cálculo I y Física I y 20 están inscritos en los tres cursos. Determine el número de alumnos que están inscritos en:

a) Matemática Básica pero no en Física

b) Exactamente dos de los tres cursos

c) Solamente en uno de los tres cursos

d) No están inscritos en ninguno de los tres cursos.

11 Dados los conjuntos A, B y C contenidos en el universo U , simplificar:
$\{[A \cup (B \cap C)] - (B \cap A')\} \cap [A \cup (B \triangle C)]$ Rta. A

12
- $n(U) = 44$

- $n\left[(A \triangle B) - A\right] = 8$
- $n\left[A - (B \cup C)\right] = 8$
- $n\left(A' \cap B' \cap C\right) = 5$
- $n(C) = 19$
- $n\left[(B \cup C) - A\right] = 2$
- $n(A' \cap B' \cap C') = 4$

Hallar: $n(A)$ Rta. 7

13 Simplificar la expresión conjuntista:

$[A \cap (C \triangle A)] \cup [(B \cap C)' \cap A] \cup [B \cup (A \cap B')]$ Rta. $A \cup B$

14 Si:

$A = \left\{ \dfrac{x+3}{2} \in \mathbb{Z} / 1 < x < 3 \right\}$

$B = \left\{ x / x \in \mathbb{Z} \wedge 3 < \dfrac{x+7}{2} < 8 \right\}$

Determinar: $n[P(A)] + n[P(B)]$ Rta. 513

15 ¿ Cuántos de los 1600 estudiantes de ESFA están inscritos en teatro pero no en canto ? sabiendo que: 600 están inscritos en teatro, 650 en canto, 250 en teatro y baile, 350 en canto y baile, 200 3n teatro y canto, 950 en baile, 150 llevan los tres cursos. Rta. 400

16 Sean los siguientes conjuntos:

$A = \left\{ 5 - x^3 / \left(\dfrac{x}{5}\right) \in N, \quad 4 \leqslant \dfrac{3x+5}{5} < 13 \right\}$

$B = \left\{ x^4 + 1 / \sqrt{7x} \;\in \mathbb{Z}, \quad 27 < x - 1 < 62 \right\}$

Sea: $E = n[P(A \triangle B)]$. Calcular la suma de cifras de expresar $E - 1$ en base 8.

Rta. 21

17 Dado los conjuntos binarios:

$A = \{a + b, a - b, 6, 16\}$

$B = \left\{ \dfrac{a^2 + b^2}{2}, \overline{cd}, c + d \right\}$

Hallar la suma de todos los valores de R. Si $R = a \times c + b \times d$ Rta. 73

18 Soledad en su cumpleaños observa que: 13 de sus invitados tenían 15 años, 26 invitados eran hombres, 13 mujeres tenían 18 años, 34 invitados no tenían 18 años. si en total habían 55 invitados. Hallar cuántos hombres tenían 18 años. Rta. 8

19 A y B son dos conjuntos tales que:

- $n(A \cup B) = 12$
- $n(A \cap B) = 7$
- $n(A) = n(B) + 1$

Además : $n(A - B) = n[(A \cup B)']$

¿ Calcular cuántos subconjuntos propios tiene A' ? Rta. 31

20 Sean A, B y C tres conjuntos contenidos en un universo finito de 60 elementos si se cumple que:

- $n[(B - C) \cup (C - B)] = 40$
- $n[A - (B \cup C)] = 10$

Además la intersección de los tres conjuntos tienen 5 elementos, el conjunto $B \cap C \cap A'$ es vacío. ¿ Cuántos elementos tiene el conjunto $A' \cap B' \cap C'$? Rta. 5

21 En un momento dado de una fiesta se observa lo siguiente: 8 bailan y beben simultáneamente, 7 beben en el jardín, 9 bailan en el jardín. entre las personas que bailan y las personas que beben suman 25. Contando a las que bailaban o estaban en el jardín se obtuvo 22. Quienes bebian o estaban en el jardín eran 21. ¿ Cuántas personas habían en la fiesta si 2 estaban en el jardín, pero no bailaban ni bebían y 3 ni bailaban ni bebían ni salían al jardín ? Rta. 30

22 Se disponen de 6 tipos de vinos, los cuales se combinan para obtener sabores distintos a los que se tiene. ¿ Cuántos nuevos sabores se podrán obtener. si al mezclar siempre se realiza con una misma cantidad de cada vino ? Rta. 57

23 De 69 personas que asistieron a un complejo deportivo se supo que 29 practican atletismo, 32 practican baskett, 25 practican ciclismo, 7 practican atletismo y baskett, 12 practican atletismo y ciclismo, 11 practican baskett y ciclismo. ¿ Cuántas

personas practican los 3 deportes, si 10 no practican ninguno de los deportes ?

Rta. 9

24 Si:

- $n[P(A)] = n[P(B)] = 256$
- $n[P(C)] = n[P(D)] = 32$

Ademas se sabe que el número de elementos de $A \cup C$ es el mayor posible e igual a "a"y el número de elementos de $B \cap D$ es el mayor posible e igual a "b". Calcular "a"y "b" Rta. 13 y 5

25 Sabiendo que:

- $n(U) = 200$
- $n(A) = 80$
- $n(B) = 82$
- $n(C) = 78$
- $n(A \cap B) = 36$
- $n(B \cap C) = 32$
- $n[(A \cup C) - (A \triangle C)] = 34$
- $n[(A \cup B) - (A \cup C)] = 21$

Calcular: $n[(A \cup B) \triangle (B \cap C)]$ Rta. 94

26 Se tiene los conjuntos:

$A = \{a^2 + 1, 3a - 1\}$

$B = \{3x + y, x - y + 8\}$

que son conjuntos unitarios. Calcular: $S = a + x + y$

Si $a, x, y \in \mathbb{Z}$.

Dar como respuesta la suma de los valores que puede tomar "S ". Rta. 11

Capítulo 3

SISTEMA DE NÚMEROS REALES

Llamamos números reales al sistema formado por un conjunto $I\!R$, Empezamos con una situación práctica que ilustra el proceso de números reales.

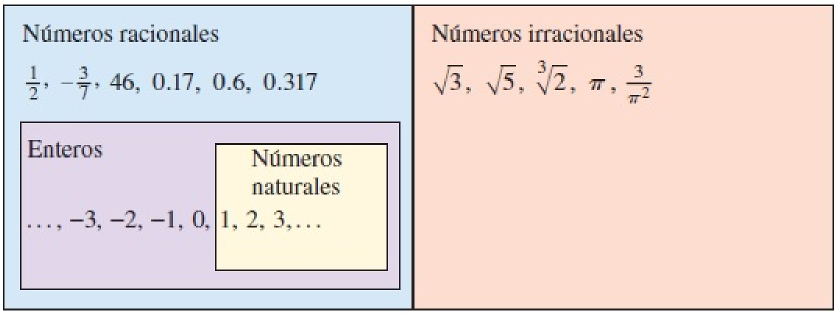


Figura 3.1: Gráfica del sistema de los números reales

Definiciones

- **Conjunto de los números naturales**: $N = 1; 2; 3; 4; 5; 6; ...$
- **Conjunto de los números enteros**: $\mathbb{Z} = ... - 3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; ...$
- **Conjunto de los números racionales**: son aquellos números que pueden expresarse como el cociente de dos enteros, donde el denominador no es cero.
  $\mathbb{Q}= \left\{\frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z},\quad b \neq 0\right\} = \left\{0{,}32;\ 5{,}31313\hat{1};\ 7{,}42\hat{2};\ \frac{3}{4}; ...\right\}$
- **Conjunto de los números irracionales**: Son aquellos números que no pueden ser convertidos en fracción. Tienen una cantidad infinita de decimales no periódicos.
  $\left\{\frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z},\quad b \neq 0\right\} = \left\{\sqrt{2};\ \sqrt{3};\ \pi;\ ...\right\}$.

Ejercicios Resueltos

1 Dé un ejemplo de:

a) Un número natural

b) Un entero que no sea número natural

c) Un número racional que no sea entero

d) Un número irracional

2 Mencione los elementos del conjunto dado que sean:

a) números naturales

b) números enteros

c) números racionales

d) números irracionales

$$A = \left\{1; -12; 20; \frac{22}{7}; 0.645; \sqrt{5}; 3{,}4\widehat{5}; -\frac{1}{5}; \sqrt[3]{3}\right\}$$

$$B = \left\{2.002; 0.555\ldots; \frac{\pi}{2}; -17; 17; \frac{17}{19}; \sqrt{49}; 1.1415; \frac{42}{6}\right\}$$

PROPIEDADES

1. **Conmutativas**.

   a) $a + b = b + a$

   b) $a \cdot b = b \cdot a$

2. **Asociativas**.

   a) $(a + b) + c = a + (b + c)$

   b) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

3. **Distributivas**.

   a) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

   b) $(b + c) \cdot a = a \cdot b + a \cdot c$

Ejercicios Resueltos

1. Complete cada enunciado y mencione la propiedad de números reales que haya empleado.

   a) $ab =$_________________; Propiedad __________

   b) $a + (b + c) =$___________; Propiedad ____________

   c) $a(b + c) =$_____________; Propiedad _____________

2. Exprese la propiedad de los números reales que se use.

   a) $7 + 10 = 10 + 7$; ____________________

   b) $2(3 + 5) = (3 + 5)2$; ____________________

   c) $x + (y + z) = (x + y) + z$; ____________________

   d) $5(m + n) = 5m + 5n$; ____________________

   e) $(2w + 3)5 = 10w + 15$; ____________________

   f) $(x + y)(a + b) = (x + y)a + (x + y)b$; ____________________

3. Reescriba la expresión usando la propiedad dada de los números reales.

   a) Propiedad Conmutativa de la adición, $w + 20 =$_________

   b) Propiedad Asociativa de la multiplicación, $6(2m) =$_________

   c) Propiedad Distributiva, $x(3 + 7) =$____________

   d) Propiedad Distributiva, $3m + 3n =$_______________

3.1. Adición

El número 0 es especial para la adición; recibe el nombre de identidad aditiva porque $a + 0 = 0 + a = a$ para cualquier número real a. Todo número real a tiene un negativo, $-a$, que satisface $a - a = 0$.

Ejercicios Resueltos

1. Uriel se ha preparado durante toda su vida, invirtió 2 años en el nivel preescolar, 6 en primaria, 3 en secundaria, 3 en el bachillerato, 5 más en la licenciatura y, finalmente, 3 años en un posgrado. ¿Durante cuántos años estudió Uriel?

Resolución

2. Luis ganó s/.1 500 en febrero, s/.3 500 en marzo, s/. 2 800 en abril, s/. 2 200 en el siguiente mes, ¿cuánto dinero ganó en total?

Resolución

3. Carlos nació en 1978, a la edad de 26 años se graduó en la carrera de ingeniería y 2 años después se casó. ¿En qué años se verificaron estos 2 sucesos?

Resolución

4. Efraín nació en 1960. A los 28 años, contrajo matrimonio y tres años después de casarse, nació su único hijo. Efraín falleció cuando su hijo tenía 14 años. ¿En qué año sucedió su fallecimiento?

Resolución

Para determinar el año del fallecimiento de Efraín, sumamos los años correspondientes a los eventos significativos de su vida a su año de nacimiento:

Año de fallecimiento $= 1960 + 28 + 3 + 14 = 2\,005$

Por lo tanto, Efraín falleció en el año 2 005.

5. Para viajar de una ciudad a otra, un automóvil completa el trayecto en tres etapas: recorre 210 kilómetros en la primera, 180 kilómetros en la segunda y 360 kilómetros en la tercera. ¿Cuál es la distancia total entre ambas ciudades?

Resolución

Para calcular la distancia total entre las dos ciudades, sumamos las distancias recorridas en cada una de las tres etapas del viaje:

Distancia total $= 210 + 180 + 360 = 750$

Por lo tanto, la distancia total entre las dos ciudades es de 750 kilómetros.

6. El automóvil líder en una carrera ha recorrido 640 kilómetros. Si aún le faltan 360 kilómetros para llegar a la meta, ¿cuál es la distancia total que deben recorrer todos los automóviles para completar la competencia?

Resolución

Para determinar la distancia total de la carrera, sumamos la distancia que el automóvil líder ya ha recorrido con la distancia que le falta para llegar a la meta:

Distancia total $= 640 + 360 = 1\ 000$

Por lo tanto, la distancia total que deben recorrer todos los automóviles para completar la competencia es de 1 000 kilómetros.

7. Una editorial publica 12 000 ejemplares de un libro de álgebra lineal, 8 000 ejemplares de uno de geometría analítica y 10 700 ejemplares de uno de cálculo diferencial e integral. ¿Cuál es el número total de ejemplares publicados en las tres áreas?

Resolución

Para encontrar el número total de ejemplares publicados en las tres áreas, sumamos las cantidades de cada tipo de libro:

Total de ejemplares $= 12\ 000 + 8\ 000 + 10\ 700 = 30\ 700$

Por lo tanto, la editorial ha publicado un total de 30 700 ejemplares de libros en las tres áreas de matemáticas.

8. En el desayuno, una persona consume un jugo de naranja con 20 calorías, huevos fritos con 800 calorías, una rebanada de pan con 50 calorías y un cóctel de frutas con 150 calorías. ¿Cuál es el total de calorías ingeridas?

Resolución

Para calcular el total de calorías consumidas en el desayuno, sumamos las calorías de cada alimento:

Total de calorías $= 20 + 800 + 50 + 150 = 1020$

Por lo tanto, la persona consume un total de 1020 calorías en el desayuno.

9. Un destacado jugador de fútbol nació en 1966. A los 17 años, ganó el mundial juvenil; a los 24, el mundial de primera categoría. Cuatro años más tarde, jugó y perdió una

final de campeonato mundial. Tres años después de ese evento, decidió retirarse del fútbol. ¿En qué año se produjo su retiro?

Resolución

Año de retiro $= 1966 + 17 + (24 - 17) + 4 + 3 = 1997$

Por lo tanto, el jugador se retiró en el año 1997.

10 En un día en la Antártica el termómetro marca una temperatura de 35°C bajo cero y el pronóstico meteorológico indica que en las siguientes horas la temperatura descenderá 18°C más, ¿cuál es la nueva temperatura que registrará el termómetro?

Resolución

Temperatura Inicial + descenso de temperatura $= -35^oC - 18^oC = -53^oC$.

Por lo tanto, la nueva temperatura que registrará el termómetro será de -53^oC.

11 En los últimos cuatro meses, una empresa ha registrado pérdidas por los siguientes montos: S/. 330,000; S/. 225,000; S/. 400,000 y S/. 155,000. ¿Cuál es el monto total acumulado de estas pérdidas?

Resolución

Para resolver la suma total de las pérdidas de la empresa en los últimos 4 meses, simplemente sumamos cada una de las cantidades reportadas:

$$\begin{array}{rl} 330\ 000 & + \\ 225\ 000 & \\ 400\ 000 & \\ \underline{155\ 000} & \\ 1\ 110\ 000 & \end{array}$$

Por lo tanto, el monto total de las pérdidas asciende a s/. 1 110 000.

3.2. Sustracción

La sustracción es la operación que deshace a la adición; para sustraer un número de otro, simplemente sumamos el negativo de ese número. Por definición $a + (-b) = a - b$.

Para combinar números reales con números negativos, usamos las siguientes propiedades.

PROPIEDADES

1. $(-1)a = -a$

2. $-(-a) = a$

3. $(-a)b = a(-b) = -(ab) = -ab$

4. $(-a)(-b) = ab$

5. $-(a+b) = -a-b$

6. $-(a-b) = -a+b$

Ejercicios Resueltos

1. Si una persona tiene una deuda de s/. 6,000 en su tarjeta de crédito y realiza con ella un pago de s/. 2,500, pero el banco cobra s/. 500 en concepto de intereses y recargos, ¿cuál será el saldo pendiente en la tarjeta?

Resolución

Los adeudos de la persona se representan con cantidades negativas; entonces, para obtener su nuevo saldo se efectúa la siguiente operación:

$$\begin{array}{r} -6\ 000\ + \\ -2\ 500 \\ -\quad 500 \\ \hline -9\ \ 000 \end{array}$$

El signo negativo del resultado indica que la persona le adeuda al banco es s/. 9000

2. *Resolución*

3.3. Multiplicación

El número 1 es especial para la multiplicación; recibe el nombre de identidad multiplicativa por que $a \cdot 1 = a$ para cualquier número real a. Todo número real a diferente de cero tiene un recíproco, $\frac{1}{a}$, que satisface $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

3.4. División

La división es la operación que deshace a la multiplicación; para dividir entre un número, multiplicamos por el recíproco de ese número. Si $b \neq 0$, entonces, por definición.

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

a es el numerador y b es el denominador (o divisor). Para combinar números reales usando la operación de división, usamos las siguientes propiedades.

PROPIEDADES

1. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
2. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$
3. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$
4. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
5. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$
6. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$

Ejercicios Resueltos

1 Ejecute las operaciones indicadas.

a) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} =$______________________

b) $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$______________________

c) $\frac{3}{4} - \frac{1}{5} + 3 =$______________________

d) $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{4}+6\right)$ =______________________

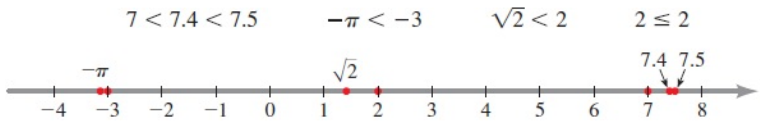
e) $0.5\left(\dfrac{2}{5}-\dfrac{8}{10}\right)$ =______________________

f) $\dfrac{\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{3}}{\dfrac{2}{3}}$ =______________________

g) $\dfrac{\dfrac{5}{4}}{\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{5}}$ =______________________

3.5. La recta real

Los números reales pueden ser representados por puntos sobre una recta, como se muestra en la Figura. La dirección positiva (hacia la derecha) está indicada por una flecha. Escogemos un punto de referencia arbitrario 0, llamado el origen, que corresponde al número real 0.



Los números reales son ordenados. Decimos que a es menor que b y escribimos $a < b$ si $b - a$ es un número positivo. Geométricamente, esto significa que a está a la izquierda de b en la recta numérica, o bien, lo que es lo mismo, podemos decir que b es mayor que a y escribimos $b > a$.

3.6. Valor absoluto y distancia

El valor absoluto de un número x, denotado por $\mid x \mid$, es la distancia de x a 0 en la recta de números reales. La distancia es siempre positiva o cero, de modo que tenemos $\mid x \mid \geqslant 0$ para todo número x.

Definición

Si x es un número real, entonces el valor absoluto de x es.

$$\mid x \mid = \begin{cases} x & , \; si \;\; x \geqslant 0 \\ -x & , \; si \;\; x < 0 \end{cases}$$

Propiedades del Valor Absoluto

1. $|x| \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$
2. $|x| = |-x|$
3. $|x| \geqslant x, \forall x \in \mathbb{R}$
4. $|x \cdot y| = |x||y|$
5. $|x|^2 = x^2$
6. $|x| = \sqrt{x^2}$
7. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}, \; y \neq 0$
8. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (Desigualdad Triangular)

Propiedades Básicas para Resolver Inecuaciones

1. $|x| = y \quad \Leftrightarrow \quad (y \geqslant 0) \wedge (x = y \vee x = -y)$
2. $|x| = |y| \quad \Leftrightarrow \quad x = y \vee x = -y$
3. Sí $y \geqslant 0$ y $|x| \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad -y \leqslant x \leqslant y$
4. Sí $|x| \geqslant y \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant y \vee x \leqslant -y$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \; |x| = |y| \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leqslant y^2$

EJEMPLOS

1 Evalúe cada expresión.

a) $|\, 400 \,| = 400$

b) $|\, -7 \,| = 7$

c) $|\, \sqrt{3} - 5 \,| = 5 - \sqrt{3}$

d) $|\, 3 - \pi \,| = \pi - 3$

e) $|\, 7 - \sqrt{7} \,| = 7 - \sqrt{7}$

f) $\dfrac{-1}{|\, 2 - \frac{\pi}{2} \,|} = \dfrac{-1}{2 - \frac{\pi}{2}}$

g) $|\, 3 - |\, 5 - 6 \,|| = 3 - 1 = 2$

Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes inecuaciones polinomicas:

1 Evalúe.

a) $\sqrt{2}\mid -2\mid +5\mid -\sqrt{2}\mid = 2\sqrt{2}+5\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

b) $\mid\sqrt{3}-2\mid + \mid\sqrt{3}-1\mid = 2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1=1$

c) $\mid\pi-5\mid - \mid -2\mid = 5-\pi-2=3-\pi$

d) $\mid 3-\sqrt{5}\mid - \mid\sqrt{5}-2\mid = 3-\sqrt{5}-\sqrt{5}+2=5-2\sqrt{5}$

2 Resuelva las ecuaciones siguientes para x.

a) $\mid 3-7x\mid = 4$

b) $\mid 2x+5\mid = 7$

Distancia entre puntos sobre la recta real

Si a y b son números reales, entonces la distancia entre los puntos a y b sobre la recta real es.

$$d(a.b)=\mid b-a\mid$$

Ejercicios Resueltos

1 Encuentre la distancia entre los números dados.

a) 2 y $8 \implies d=\mid 8-2\mid = 6$

b) -7 y $3 \implies d=\mid 3-(-7)\mid = 10$

c) -2 y $7 \implies d=\mid 7-(-2)\mid = 9$

d) -7 y $-3 \implies d=\mid -3-(-7)\mid = 4$

e) $-\frac{7}{3}$ y $\frac{3}{2} \implies d=\mid \frac{3}{2}-\left(-\frac{7}{3}\right)\mid = \frac{23}{6}$

2 Exprese cada decimal periódico como una fracción.

a) $0.\widehat{2}=\frac{2}{9}$

b) $0.\widehat{12}=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}$

c) $0.\widehat{254}=\frac{254}{999}$

d) $1.\widehat{6}$

e) $6.1\widehat{4}$

f) $5.3\widehat{23}$

3.7. Máximo entero

Definición

El MÁXIMO ENTERO es un número real x, denotado por $[\![x]\!]$, es el mayor de todos los números enteros menores o iguales a x, es decir.

$$[\![x]\!] = n \iff n \leqslant x < n+1 \qquad n \in \mathbb{Z}$$

PROPIEDADES

1. $[\![x]\!] = x \quad \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$
2. $[\![[\![x]\!]]\!] = [\![x]\!]$
3. $[\![x+n]\!] = [\![x]\!] + n, \qquad$ para todo $n \in \mathbb{Z}$
4. $[\![x]\!] \leqslant n \iff x < n+1$
5. $[\![x]\!] < n \iff x < n$
6. $[\![x]\!] \geqslant n \iff x \geqslant n$
7. $[\![x]\!] > n \Leftrightarrow [\![x]\!] \geqslant n+1 \iff x \geqslant n+1$

Ejercicios Propuestos

1. $[\![x]\!] = 4$
2. $[\![\mid x \mid -2x]\!] = 0$
3. $\left[\!\!\left[\dfrac{3x+1}{3-2x}\right]\!\!\right] = 2$
4. $\left[\!\!\left[\dfrac{\mid x \mid -2}{3-x}\right]\!\!\right] = -1 \qquad , \qquad -1 < x < 1$
5. $\left[\!\!\left[\dfrac{5+x}{5-x}\right]\!\!\right] \leqslant 1$
6. $\dfrac{\mid x \mid -1}{[\![x]\!] - 1} \geqslant 1$

Ejercicios Resueltos

1 $|x-2| = |3-2x|$

Resolución

$$\begin{array}{rcl} x-2=3-2x & \vee & x-2=-3+2x \\ 3x=5 & \vee & 1=x \\ x=\dfrac{5}{3} & \vee & x=1 \end{array}$$

$\therefore C.S. = \left\{1, \dfrac{5}{3}\right\}$

2 Si la expresión $A = \dfrac{|4x+7|-|x-7|}{x}$ tiene de respuesta una constante, para $x \in \langle 2,5\rangle$; halle dicha constante.

Resolución

Analizamos cada valor absoluto, primero $|4x+7|$

$$|4x+7| = \begin{cases} 4x+7; & x \geqslant -\dfrac{7}{4} \\ \\ -4x-7; & x \leqslant -\dfrac{7}{4} \end{cases}$$

Luego de $|x-7|$

$$|x-7| = \begin{cases} x-7; & x \geqslant 7 \\ \\ 7-x; & x \leqslant 7 \end{cases}$$

Entonces para $x \in \langle 2,5\rangle$

$$A = \frac{4x+7-(7-x)}{x} = \frac{4x+7-7+x}{x} = \frac{5x}{x} = 5$$

$\therefore$ El valor de la constante es 5.

1 Hallar el valor de $A = \left\llbracket \dfrac{3}{\sqrt{6}-1} \right\rrbracket$

Resolución

Como $2 < \sqrt{6} < 3$ entonces:

$$\begin{aligned} 1 < \sqrt{6}-1 < 2 \\ \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{6}-1} < 1 \\ \frac{3}{2} < \frac{3}{\sqrt{6}-1} < 3 \end{aligned}$$

Así tambien como: $\dfrac{3}{2} < 2 \Rightarrow 2 \leqslant \dfrac{3}{\sqrt{6}-1} < 3$

$\therefore A = \left\llbracket \dfrac{3}{\sqrt{6}-1} \right\rrbracket = 2$

2 Resolver la inecuación: $\llbracket |x| - 2x \rrbracket = 0$

Resolución

Primero: Si $x \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = x$

$2x \leqslant x \quad \wedge \quad x < 1+2x \quad \Rightarrow \quad x \leqslant 0 \quad \wedge \quad x > -1 \quad \Rightarrow \quad x \in < -1, 0]$

Entonces $x \in [0, +\infty > \wedge < -1, 0] \quad \Rightarrow \quad x = 0$

Segundoo: Si $x < 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = -x$

$2x \leqslant -x \quad \wedge \quad -x < 1+2x \quad \Rightarrow \quad x \leqslant 0 \quad \wedge \quad x > -\dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x \in < -\dfrac{1}{3}, 0]$

Entonces $x \in < -\infty, 0 > \wedge < -\dfrac{1}{3}, 0 > \quad \Rightarrow \quad \left\langle -\dfrac{1}{3}, 0 \right\rangle$

$\therefore x \in \left\langle -\dfrac{1}{3}, 0 \right]$

3 $\llbracket x^2 - 2x - 2 \rrbracket < 13$

Resolución

Por la propiedad: si $\llbracket x \rrbracket < a \quad \Rightarrow \quad x < a$

$[\![x^2 - 2x - 2]\!] < 13 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 2 < 13 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 < 16$

$(x-1)^2 < 16 \quad \Rightarrow \quad -4 < x - 1 < 4 \quad \Rightarrow \quad -3 < x < 5$

$\therefore\ x \in \langle -3, 5 \rangle$

4 Si $x \in [-1, 1]$, hallar el valor de $R = \left[\!\!\left[\dfrac{|x| - 2}{3 - x} \right]\!\!\right]$

Resolución

a) Si $x \in [-1, 0 >$ o sea para $x < 0$ entonces $|x| = -x$

$$B = \left[\!\!\left[\frac{-x-2}{3-x} \right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\frac{-(x+2)}{-(x-3)} \right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\frac{x+2}{x-3} \right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\frac{x-3+3+2}{x-3} \right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[1 + \frac{5}{x-3} \right]\!\!\right]$$

Si $x \in [-1, 0 >$ entonces:

$$-1 \leqslant x < 0$$

$$-4 \leqslant x - 3 < -3$$

$$-\frac{1}{3} < \frac{1}{x-3} \leqslant -\frac{1}{4}$$

$$-\frac{5}{3} < \frac{5}{x-3} \leqslant -\frac{5}{4}$$

$$-\frac{2}{3} < 1 + \frac{5}{x-3} \leqslant -\frac{1}{4}$$

Luego vemos que $\left[\!\!\left[1 + \dfrac{5}{x-3} \right]\!\!\right] = -1$, entonces $B = -1$, $\forall x \in [-1, 0 >$

b) Si $x \in [0, 1]$ o sea para $x > 0$ entonces $|x| = x$

$$B = \left[\!\!\left[\frac{x-2}{3-x} \right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[\frac{x-3+3-2}{3-x} \right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[-\frac{(-x+3)}{3-x} + \frac{1}{3-x} \right]\!\!\right] = \left[\!\!\left[-1 + \frac{1}{3-x} \right]\!\!\right]$$

Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ entonces:

$$-1 \leqslant -x < 0$$

$$2 \leqslant 3 - x < 3$$

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{3-x} \leqslant \frac{1}{2}$$

$$-\frac{2}{3} < -1 + \frac{1}{3-x} \leqslant -\frac{1}{2}$$

Luego vemos que $\left[\!\!\left[-1 + \dfrac{1}{3-x} \right]\!\!\right] = -1$, entonces $B = -1$, $\forall x \in [0, 1]$

$\therefore$ Por tanto de $a)$ y $b)$ el valor de $B = -1$, $\forall x \in [-1, 1]$

Ejercicios Propuestos

1. Averiguar cual de las siguientes proposiciones es FALSA:

   a) $\mathbb{R} \cap I = I$

   b) $I \cup (\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$

   c) $\mathbb{Q} \cap I = \varnothing$

   d) $\mathbb{R} - I = \mathbb{Z}$

   e) $(I \cap \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$

Resolución

2. Una de las siguientes proposiciones es incorrecta, identifique.

   a) $(\mathbb{N} \cup \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R}$

   b) $I \cap \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

   c) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

   d) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

   e) $\mathbb{N} \subseteq (\mathbb{Q} \cap I)$

Resolución

3. Averiguar, ¿cual de las siguientes proposiciones es FALSA?

   a) $\mathbb{Q} \cap I = \varnothing$

   b) $\mathbb{Q} \cup N = \mathbb{Q}$

   c) $(\mathbb{N} \cap I)^c = \mathbb{R}$

   d) $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = I \cap \mathbb{R}$

   e) $\mathbb{Q} - \mathbb{N} = \mathbb{Q}$

Resolución

4. Explique por qué la suma, la diferencia y el producto de dos números irracionales son números racionales. ¿El producto de dos números irracionales necesariamente es irracional? ¿Qué se puede decir de la suma?.

Resolución

5. ¿$\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ es racional o irracional? ¿$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ es racional o irracional? En general, ¿qué se puede decir acerca de la suma de un número racional y un número irracional? ¿Qué se puede decir del producto?.

Resolución

6. ¿Cuánto dinero le falta a Ernesto si su ahorro es de s/. 12 000 para comprar un automóvil que cuesta s/. 35 000?

7. Ángel al vender su casa en s/. 250 000, obtiene una ganancia de s/. 13 000, ¿cuánto le había costado su casa?

8. La suma de las edades de Laura y Carina es de 48 años, si Laura tiene 25 años, ¿cuál es la edad de Carina?

9. Si Fernanda tuviera 8 años menos tendría 35 y si Guillermo tuviera 10 años más tendría 25, ¿cuánto más joven es Guillermo que Fernanda?

10. Una cuenta de ahorro tiene un saldo de s/. 2 500, si se efectúa un retiro de s/. 1 500 y se cobra una comisión de s/. 7 por disposición ¿cuánto queda disponible en la cuenta?

11. Un rollo de tela tiene una longitud de 40 metros, el lunes se vendieron 3, el martes 8, el miércoles 5 y el jueves 6, ¿cuántos metros de tela quedan para vender el resto de la semana?

12. Un atleta debe cubrir una distancia de 10 000 metros, si recorre 5 850, ¿qué distancia le falta recorrer?

13. Juan solicitó un préstamo de s/. 20 000: el primer mes abonó s/. 6 000, el segundo s/. 4 000, y en el tercero s/. 5 500, ¿cuánto le falta pagar para cubrir su adeudo?

14. La edad de Abigail es de 31 años, la de Mario es de 59 y la diferencia de las edades de Carmen y Clara es de 37 años, ¿en cuánto excede la suma de las edades de Abigail y Mario a la diferencia de las de Carmen y Clara?

15. ¿Cuántos libros hay en 12 repisas, si cada una contiene 15 textos?

16. Juan tiene 3 docenas de canicas, Julio 5 docenas y Daniel tiene sólo 9 canicas, ¿cuántas canicas tienen en total los 3?

17. Se van a sembrar en un terreno 25 filas, cada una con 30 árboles, ¿cuántos árboles se van a plantar en total?

18. Rafael tiene 8 piezas de tela de 12 metros cada una, pretende vender a s/. 10 el metro, ¿cuánto dinero puede obtener por la venta de todas las piezas?

19. ¿Cuántos minutos hay en una semana, si una semana tiene 7 días, cada día tiene 24 horas y cada hora 60 minutos?

20 En un vecindario hay 28 edificios, cada uno tiene 12 departamentos, ¿cuántos departamentos hay en el vecindario?

21 Una caja de lapiceros contiene 20 paquetes, los que a su vez tienen 12 lapiceros cada uno, si hay 25 cajas, ¿cuántos lapiceros se tienen en total?

22 Rodrigo percibe un sueldo quincenal de s/. 2 700, ¿cuánto dinero recibe al cabo de un año?

23 Un autobús tiene capacidad para 42 pasajeros y un conductor, si a un evento asisten 3 grupos de 5 autobuses y cada uno se llena a su máxima capacidad, ¿cuántas personas en total asisten a dicho evento?

24 Una empresa de productos lácteos ocupa, para vender y distribuir leche, camiones con una capacidad de carga de 250 cajas, cada una de ellas contiene 12 litros y el precio del litro es de s/. 10, si un supermercado realiza un pedido de 4 cargas, ¿cuánto debe pagar por la compra del lácteo a la empresa?

25 Karen recibe un salario de s/. 850 semanales y, por ser una buena estudiante, tiene asignada una beca de s/. 1 000 mensuales. ¿Cuál es la cantidad de dinero que recibe en un mes? (Considera un mes igual a 4 semanas.)

26 A Maritza le da su papá s/. 20 diarios. Si en un año ella destina para pasajes y diversión s/. 2 300 anuales, ¿qué cantidad de dinero le sobra para sus otros gastos? (Considera un año igual a 365 días.)

27 Un cuarteto de músicos recibe como pago s/. 240 diarios por tocar entre semana en un restaurante, mientras que por tocar en el mismo lugar los fines de semana el pago es de s/. 480 diarios. ¿Cuánto dinero percibe cada integrante del grupo, si lo que ganan se reparte en forma equitativa? (Considera una semana igual a 7 días.)

28 El sueldo de un capturista de datos es de s/. 150 diarios con su respectivo descuento de s/. 30 por concepto de impuestos. ¿Qué cantidad recibe en un mes? (Considera un mes igual a 30 días.)

29 En la repartición de una herencia el abuelo designa en partes iguales un terreno de 12 hectáreas a 3 de sus nietos, si el precio por metro cuadrado es de s/. 250, ¿cuál es el monto que recibió cada uno de los herederos? (Considera una hectárea igual a 10 000 m^2.)

30 Roberto tiene 12 años, Mónica es 4 años más grande que Roberto y Julián tiene el doble de la edad de Mónica. ¿Cuánto es la suma de las edades de Roberto, Mónica y Julián?

31 Pablo asistió a las ofertas de una tienda departamental y se compró 3 pantalones en s/. 750 cada uno, con un descuento de s/. 225 por prenda; 4 camisas de s/. 600 la pieza con su respectivo descuento de s/. 120 por camisa y 5 playeras cuyas etiquetas marcaban un costo de s/. 250 y su descuento de s/. 75 en cada pieza, ¿cuánto pagó Pablo por los artículos?

32 Un granjero realiza la venta de media docena de borregos, 8 conejos y 3 cerdos: si el precio de un borrego es de s/. 600, el de un conejo s/. 150 y el de un cerdo es de s/. 450, ¿cuál es el importe que recibe por la venta de estos animales?

33 La hipoteca que contrajo Mary en enero de 2008 con un banco asciende a s/. 425 000, si durante el primer año Mary realiza el pago de s/. 6 500 mensuales, ¿a cuánto asciende su deuda para enero de 2009?

34 En un estadio hay 3 tipos de ubicaciones con diversos costos cada una: 25 000 en preferente especial, 15 000 lugares en la sección de preferente y 30 000 en general, si el costo de un boleto en preferente especial es de s/. 150, el de preferente s/. 100 y el de general de s/. 80, ¿cuál es el ingreso de la taquilla si hay un lleno total en el estadio?

35 ¿Cuántas veces cabe el número 15 en 345?

36 Ciento ochenta y seis mil pesos es lo que ahorraron 62 alumnos del Tecnológico de ingeniería para su graduación, si cada estudiante ahorró la misma cantidad, ¿cuánto dinero ahorró cada uno?

37 El producto de 2 números es 137 196, uno de ellos es 927, ¿cuál es el otro número?

38 ¿Cuántas horas hay en 3 360 minutos, si se sabe que una hora tiene 60 minutos?

39 Se reparten 7 200 libros de matemáticas a 4 escuelas, si cada una de ellas tiene 600 alumnos, ¿cuántos libros le tocan a cada estudiante?

40 ¿En cuántas horas recorrerá 144 kilómetros un automóvil que viaja a 16 kilómetros por hora?

41. ¿Cuántos días necesitará Fabián para capturar en su computadora los datos de un libro de matemáticas que contiene 224 páginas, si copia 4 páginas en una hora y trabaja 8 horas por día?

42. Un reloj se adelanta 3 minutos cada 4 horas, ¿cuánto se habrá adelantado al cabo de 20 horas?

43. Una fuente tiene capacidad para 2 700 litros de agua, ¿qué cantidad de este líquido debe echar por minuto una llave que la llena en 5 horas?

44. En una tienda de ropa, Omar compra igual número de pantalones que de chamarras con un costo total de s/. 1 500, cada pantalón cuesta s/. 200 y cada chamarra s/. 550, ¿cuántos pantalones y chamarras compró?

45. Los 3 integrantes de una familia deciden repartir los gastos que se generan en su casa: el recibo bimestral de luz llega de s/. 320; el recibo del teléfono de s/. 240 mensuales; la televisión por cable s/. 260 mensuales y el predio es des/. 3 600 anuales. ¿Cuánto dinero le toca aportar mensualmente a cada integrante, si los gastos se reparten de manera equitativa?

Capítulo 4

EXPONENTES Y RADICALES

La teoría que vamos a describir se enfoca en las expresiones exponenciales, abarcando todos los tipos de exponentes y las leyes que los rigen. Incluye las operaciones de potenciación y radicación, las cuales se definen mediante dichas expresiones exponenciales. Además, presentaremos las siguientes definiciones y teoremas relacionados con estas operaciones.

4.1. Exponente entero (positivos y negativos)

En notación exponencial, un producto de números idénticos se representa de manera más concisa. Por ejemplo, el producto $x.x.x.x$ se simplifica como x^4. A continuación, presentamos la definición general de esta notación.

Definición

Si x es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces la n-ésima potencia de x es.

$$\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x ...}_{n\ veces} = x^n$$

El número x se denomina base, y n se denomina exponente.

4.2. Exponente cero y negativo

Si $x \neq 0$ es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces

$$x^0 = 1 \qquad y \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

La familiaridad con las reglas siguientes es esencial para nuestro trabajo con exponentes y bases. Las bases a y b son números reales, y los exponentes m y n son enteros.

4.2.1. Leyes de exponentes

1. **Producto de bases iguales.**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

2. **Razón de bases iguales.**

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad a \neq 0$$

3. **Potencia de un Producto.**

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

4. **Potencia de una fracción.**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad b \neq 0$$

5. **Potencia de potencia.**

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

A continuación damos dos leyes adicionales que son útiles en la simplificación de expresiones con exponentes negativos.

1. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

2. $\dfrac{a^{-n}}{b^{-m}} = \dfrac{b^m}{a^n}$

Ejercicios Resueltos

1. Simplificar las siguientes expresiones. Que no tenga paréntesis ni exponentes negativos en la respuesta final.

   a) $\left[(2a)^{-1} + (2b)^{-1}\right]^{-1}$

   b) $(mn)^{-1}\left(m^{-1} + n^{-1}\right)^{-1}$

   c) $\left(x^{-2} + y^{-2}\right)^{-1}$

   d) $\dfrac{1}{2c^{-2}} + \dfrac{1}{3c^{-2}}$

   e) $\dfrac{z^{-3}}{4z} - \dfrac{z}{6z^5}$

   f) $b^{-5}\left(\dfrac{2ab}{\frac{a}{3b^2}}\right)$

   g) $\dfrac{\dfrac{2}{w} + w^{-1}}{\dfrac{w^2}{2} + \dfrac{1}{5w^{-2}}}$

   h) $\dfrac{x^{-1}}{\left(x + x^{-1}\right)^{-1}}$

4.3. Notación científica

Para escribir números extremadamente grandes o pequeños de manera compacta, los científicos emplean la notación exponencial.

Ejemplo

1. La estrella más cercana al Sol, Próxima Centauri, está aproximadamente a 40 000 000 000 000 de km de distancia

2. La masa del átomo de hidrógeno es alrededor de 0,00000 000 000 000 000 000 000 166 gr.

Definición

Se dice que un número positivo x está escrito en notación científica si está expresado de la siguiente forma:

$$x = a \times 10^n \quad donde \quad 1 \leqslant a < 10$$

y n es un entero

Nota: Solo la coma se mueve para la derecha o para la izquierda

Ejercicios Resueltos

1. Escriba cada número en notación científica.

   a) $65\ 500\ 000 = 6,55 \times 10^7$

   b) $3\ 100\ 000\ 000\ 000 = 3,1 \times 10^{12}$

   c) $0{,}000\ 028\ 536 = 2,8536 \times 10^{-5}$

   d) $0{,}0001213 = 1,213 \times 10^{-4}$

   e) $129\ 540\ 000 = 1,2954 \times 10^8$

   f) $7\ 259\ 000\ 000 = 7,259 \times 10^9$

   g) $0,000\ 000\ 0014 = 1,4 \times 10^{-9}$

   h) $0,000\ 702\ 9 = 7,029 \times 10^{-4}$

2. Escriba cada número en notación decimal.

   a) $3{,}14 \times 10^{16} = 31\ 400\ 000\ 000\ 000\ 000$

   b) $2{,}821 \times 10^{19} = 28\ 210\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$

   c) $2{,}570 \times 10^{-8} = 0,000\ 000\ 025\ 70$

   d) $9{,}999 \times 10^{-9} = 0,000\ 000\ 009\ 999$

   e) $7{,}14 \times 10^{14} = 714\ 000\ 000\ 000\ 000$

   f) $6{,}34 \times 10^{13} = 63\ 400\ 000\ 000\ 000$

g) $5{,}558 \times 10^{-4} = 0,000\ 555\ 8$

h) $6{,}257 \times 10^{-11} = 0,000\ 000\ 000\ 062\ 57$

3. Escriba en notación científica el número indicado en cada enunciado.

a) La distancia que recorre la luz en un año, es alrededor de: $5\ 900\ 000\ 000\ 000 = 5,9 \times 10^{12}$ millas.

b) El diámetro de un electrón es al rededor de: $0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 4 = 4 \times 10^{-13}$ centímetros.

c) Una gota de agua contiene más de 33 trillones de moléculas.

d) La distancia de la Tierra al Sol es de unos 93 millones de millas.

e) La masa de una molécula de oxígeno es de unos $0{,}000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 053 = 5,3 \times 10^{-23}$ g.

f) La masa de la Tierra es de unos $5\ 970\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 = 5,97 \times 10^{24}$ kg.

4. Use notación científica, las Leyes de Exponentes, y una calculadora para ejecutar las operaciones indicadas. Exprese su respuesta redondeada al número de dígitos significativos indicados por los datos dados.

a) $\dfrac{(0.00000564)\,(0.00234)}{(1594.00000)\,(0.00058)}$

b) $\dfrac{\left(13.54\times 10^{-7}\right)^{8}}{\left(15.05\times 10^{5}\right)^{11}}$

5. Si Ronaldo tuviera un millón $\left(10^{6}\right)$ de dólares en una maleta, y gasta mil dólares $\left(10^{3}\right)$ al día.

a) ¿cuántos años tardaría Ronaldo en gastarse todo el dinero? Gastando al mismo paso.

b) ¿cuántos años tardaría Ronaldo en vaciar la maleta llena con mil millones $\left(10^{9}\right)$ de dólares?

Resolución

a) Si Ronaldo gasta mil dólares al día, podemos calcular cuántos días le tomaría gastar todo el dinero:

Dinero total: 1 000 000 dólares

Gasto diario: 1 000 dólares

Días$=\dfrac{Dinero\ Total}{Gasto\ diario}=\dfrac{1\ 000\ 000}{1\ 000}=1\ 000$ días

Años $=\dfrac{dias}{365}=\dfrac{1000}{365}\approx 2.74$ años

Así que Ronaldo tardaría aproximadamente 2.74 años en gastarse todo el dinero, manteniendo el mismo ritmo de gasto diario.

b) Si Ronaldo tiene mil millones de dólares en una maleta y gasta mil dólares al día, podemos calcular cuántos días le tomaría vaciar la maleta llena:

Dinero total: 1 000 000 000

Gasto diario: 1 000

$$Dias = \frac{Dinerototal}{GastoDiario} = \frac{1\ 000000\ 000}{1\ 000} = 1\ 000\ 000 \text{ días}$$

$$\text{Años} = \frac{dias}{365} = \frac{1\ 000\ 000}{365} \approx 2739.73 \text{ años}$$

Así que Ronaldo tardaría aproximadamente 2739.73 años en vaciar la maleta llena, manteniendo el mismo ritmo de gasto diario.

4.4. Radicales

El símbolo $\sqrt{-}$ significa "la raíz positiva de", entonces $\sqrt{x} = y$ significa que $x = y^2$ y $y \geqslant 0$

Definición

Si n es cualquier entero positivo, entonces la raíz n principal de x se define:

$$\sqrt[n]{x} = y \quad significa \;\; que \quad x = y^n$$

Si n es par, debemos tener que $x \geqslant 0$ y $y \geqslant 0$.

PROPIEDADES

1. $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$
4. $\sqrt[n]{x^n} = \mid x \mid$, si n es par
5. $\sqrt[n]{x^n} = x$, si n es impar

Ejercicios Resueltos

1. Encuentre n tal que las siguientes expresiones sean verdaderas.

a) $\sqrt[3]{2} = 8 \cdot 2^n$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{8}} = 2^n$

c) $3 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{3} = 3^n$

d) $\sqrt{\sqrt{2}} = 4^n$

e) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = 2^n$

2. Evalúe las siguientes expresiones.

a) $\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$

b) $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

c) $\sqrt{1\dfrac{9}{16}} = \sqrt{\dfrac{16 \cdot 1 + 9}{16}} = \sqrt{\dfrac{25}{16}} = \dfrac{5}{3}$

d) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{8\cdot 3+3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}} = \frac{3}{2}$

e) $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$

f) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}} = \frac{3}{2}$

g) $\sqrt[4]{81^{-3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{81^3}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{3^3}\right)^4} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

h) $0{,}0016^{3/4} = \left(\frac{16}{10000}\right)^{3/4} = \left(\frac{2^4}{10^4}\right)^{3/4} = \left(\frac{2}{10}\right)^3 = \frac{8}{1000}$

4.5. Exponentes racionales

Para cualquier exponente racional $\frac{m}{n}$ en sus términos más elementales, donde m y n son enteros y $n > 0$, definimos.

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n} \quad \textit{es equivalente a} \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = x^{m/n}$$

Si n es par, entonces requerimos que $x \geqslant 0$.

Ejercicios Resueltos

1 Simplificar

a) $2\sqrt{24} - \sqrt{54} = 2\sqrt{4\times 6} - \sqrt{9\times 6} = 4\sqrt{6} - 3\sqrt{6} = \sqrt{6}$

b) $\sqrt{63}-\sqrt{175}+4\sqrt{112}$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{9\times 7}-\sqrt{25\times 7}+\sqrt{16\times 7} \\ &= 3\sqrt{7}-5\sqrt{7}+4\sqrt{7} \\ &= 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

c) $3\sqrt{45}+\sqrt{20}=3\sqrt{9\times 5}+\sqrt{4\times 5}=9\sqrt{5}+2\sqrt{5}=11\sqrt{5}$

d) $2\sqrt{18}-\sqrt{32}=2\sqrt{9\times 2}-\sqrt{16\times 2}=6\sqrt{2}-4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

e) $2\sqrt[3]{-16}-3\sqrt[3]{-54}=2\sqrt[3]{-8\times 2}-3\sqrt[3]{-27\times 2}=-4\sqrt[3]{2}+9\sqrt[3]{2}=5\sqrt[3]{2}$

2 Simplificar las siguientes expresiones.

a) $\left(\dfrac{a^y}{a^z}\right)^x\left(\dfrac{a^z}{a^x}\right)^y\left(\dfrac{a^x}{a^y}\right)^z=\dfrac{a^{xy}\cdot a^{yz}\cdot a^{xz}}{a^{xz}\cdot a^{xy}\cdot a^{yz}}=1$

b) $\left(\dfrac{w^{a+b}}{w^{2a}}\right)\left(\dfrac{w^{b+c}}{w^{2b}}\right)\left(\dfrac{w^{c+a}}{w^{2c}}\right)=\dfrac{w^aw^bw^bw^cw^cw^a}{w^{2a}w^{2b}w^{2c}}=1$

c) $\dfrac{2^{3a}\cdot 3^{2a}\cdot 5^a\cdot 6^a}{8^a\cdot 9^{3a/2}\cdot 10^a}$

$$\begin{aligned} &= \frac{2^{3a}\cdot 3^{2a}\cdot 5^a\cdot(2\times 3)^a}{(2\times 2\times 2)^a\cdot(3\times 3)^{3a/2}\cdot(5\times 2)^a} \\ &= \frac{2^{3a}\cdot 3^{2a}\cdot 5^a\cdot 2^a\cdot 3^a}{2^a\cdot 2^a\cdot 2^a\cdot(3^2)^{3a/2}\cdot 5^a\cdot 2^a} \\ &= \frac{2^{4a}\cdot 3^{3a}\cdot 5^a}{2^{4a}3^{3a}\cdot 5^a} \\ &= 1 \end{aligned}$$

d) $\dfrac{\left(x^{m+n}\right)^2\left(y^{m+n}\right)^2}{(xy)^{2m-n}}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^{2m+2n}\cdot y^{2m+2n}}{(xy)^{2m}/(xy)^{n}}\\
&= \frac{\cancel{x^{2m}}\cdot x^{2n}\cdot \cancel{y^{2m}}\cdot y^{2n}\cdot x^{n}\cdot y^{n}}{\cancel{x^{2m}}\cdot \cancel{y^{2m}}}\\
&= x^{2n}\cdot y^{2n}\cdot x^{n}\cdot y^{n}\\
&= x^{3n}\cdot y^{3n} = (x\cdot y)^{3n}
\end{aligned}$$

e) $\dfrac{10^{3x}\cdot 28^{x}\cdot 35^{x}}{8^{5x/3}\cdot 25^{2x}\cdot 49^{x}}$

3 Establezca si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

a) $\sqrt{6} = \sqrt{3} + \sqrt{3}$ ....(F)

b) $\sqrt{10} = \sqrt{12} - \sqrt{2}$.................(F)

c) $\sqrt{35} = \sqrt{7}\cdot\sqrt{5}$.....................(V)

d) $\sqrt{(-5)^2} = 5$........................(V)

e) $\sqrt{-9} = -3$..........................(F)

f) $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$..............(F)

g) $\dfrac{w^n}{w^m} = w^{n/m}$...........................(F)

4.6. Racionalización de denominador

A veces es necesario eliminar el radical en un denominador al multiplicar el numerador y el denominador por una expresión apropiada. Este procedimiento se denomina racionalización del denominador.

Ejercicios Resueltos

1. Racionalice el denominador:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{7}} = \dfrac{2\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7^2}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

b) $\sqrt{\dfrac{5}{x}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{5x}}{\sqrt{x^2}} = \dfrac{\sqrt{5x}}{x}$

c) $\sqrt{\dfrac{2}{11}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{11}}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}} = \dfrac{\sqrt{22}}{\sqrt{11^2}} = \dfrac{\sqrt{22}}{11}$

d) $\sqrt{\dfrac{m}{n}} = \dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{m}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{mn}}{\sqrt{n^2}} = \dfrac{\sqrt{mn}}{n}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}} = \dfrac{3\cdot\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}} = \dfrac{3\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^3}} = \dfrac{3\cdot\sqrt[3]{9}}{3} = \sqrt[3]{9}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{w^3}} = \dfrac{1\cdot\sqrt[4]{w}}{\sqrt[4]{w^3}\cdot\sqrt[4]{w}} = \dfrac{\sqrt[4]{w}}{\sqrt[4]{w^4}} = \dfrac{\sqrt[4]{w}}{w}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{a^5}} = \dfrac{1\cdot\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[6]{a}} = \dfrac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a^6}} = \dfrac{\sqrt[6]{a}}{a}$

h) $\dfrac{w}{x^{3/5}} = \dfrac{w}{\sqrt[5]{x^3}} = \dfrac{w\cdot\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^3}\cdot\sqrt[5]{x^2}} = \dfrac{w\cdot\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^5}} = \dfrac{w\cdot\sqrt[5]{x}}{x}$

i) $\dfrac{1}{a^{3/7}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^3}} = \dfrac{1\cdot\sqrt[7]{a^4}}{\sqrt[7]{a^3}\cdot\sqrt[7]{a^4}} = \dfrac{\sqrt[7]{a^4}}{\sqrt[7]{a^7}} = \dfrac{\sqrt[7]{a^4}}{a}$

Ejercicios Propuestos

1. Efectuar: $C = 3\sqrt{8} - 2\sqrt{18} + 4\sqrt{50}$

2. Simplificar:

a) $z = \sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{10}}{\left(\dfrac{49}{400}\right)^{-1/2}}} \cdot \sqrt[3]{5 - \dfrac{10}{27}} + \left(16^{1/2} + 81^{1/4}\right)$

b) $R = \left(\dfrac{2}{\sqrt{2}} + \dfrac{8}{\sqrt{8}}\right)^2 - \left(\dfrac{3}{\sqrt{3}}\right)^2$

c) $A = \left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{8}} - \dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{8}}\right)$

3. Dados: $R = \underbrace{3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + \dots}_{40 veces}$ y

$C = \underbrace{2\sqrt{20} + 2\sqrt{20} + 2\sqrt{20} + \dots}_{20 veces}$ Hallar:

$$A = \frac{C}{R} \cdot \left[\left(\frac{R}{60}\right)\left(\frac{C}{40}\right) + \left(\frac{R}{5} - \frac{11C}{40}\right)^2\right]$$

4. Efectuar: $Y = \left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}}\right)^{15+5^0} + \dfrac{2^{10}}{(2^2)^3} + 9 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{64}{27}}$

5. Racionalizar: $A = \dfrac{2\left(\sqrt{15} - \sqrt{7}\right)}{\sqrt{1} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}$

6. Si

$A = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots}}}$

$B = \sqrt{A\sqrt{A\sqrt{A \dots}}}$

$$C = \sqrt{1 + \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots}}}}$$

Halle: $A + B - 2C$

7. Si $\sqrt{x + 2\sqrt{y}} = \dfrac{2}{1 + \sqrt{3}} + \dfrac{7}{2\sqrt{2} - 1}$ Halle. $x + y$

Ejercicios de aplicación

1. **[Deuda nacional]** En el año 2010, la población de Perú era de $29{,}03 \times 10^6$, y la deuda nacional era de $28{,}497 \times 10^{11}$ dólares. ¿Cuánto era la parte que adeuda cada persona?

Resolución

2. **[Número de moléculas]** Una sala sellada en el hospital regional Manuel Núñez Butrón, con medidas de 5 m de ancho, 10 m de largo y 3 m de alto, está llena de oxígeno puro. Un metro cúbico contiene 1000 L, y 22,4 L de cualquier gas contienen $6{,}02 \times 10^{23}$ moléculas (número de Avogadro). ¿Cuántas moléculas de oxígeno hay en la sala?

Resolución

3. **[Distancia de la Tierra al Sol]** Se deduce de la Tercera Ley de **Kepler** del movimiento planetario, que el promedio de distancia de un planeta al Sol (en metros) es.

$$d = \left(\frac{MG}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot T^{2/3}$$

donde $M = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg es la masa del Sol, $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$ es la constante gravitacional, y T

es el período de la órbita del planeta (en segundos). Use el dato de que el período de la órbita de la Tierra es alrededor de 365,25 días. ¿ hallar la distancia de la Tierra al Sol?.

Resolución

4 [Comparación de raíces]

Sin usar calculadora, determine cuál número es más grande en cada par.

a) $3^{1/2} \square 3^{1/3}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} \square \left(\frac{1}{3}\right)^{1/3}$

c) $\sqrt[3]{11} \square \sqrt{13}$

d) $\sqrt{2} \square \sqrt[3]{3}$

Resolución

Capítulo 5

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una **variable** es una letra que simboliza un elemento de un conjunto específico. Al comenzar con variables, como x, y i z, y combinarlas con números reales mediante operaciones tales como suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación, se forma una expresión algebraica.

$$x^3 + 5x^2 - 8x + 3 \qquad\qquad \sqrt[3]{y} + 12 \qquad\qquad \frac{w^2 - 8}{w + 2}$$

Un **monomio** es una expresión de la forma ax^n, donde a es un número real y n es un entero no negativo.

Un **binomio** es una suma de dos monomios.

Un **trinomio** es una suma de tres monomios.

En general, una suma de monomios se llama polinomio.

5.1. Polinomios

Un polinomio es una expresión racional entera, respecto a una variable x representado por $P(x)$:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales, y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, entonces el polinomio tiene grado n.

El **grado de un polinomio** es la potencia más alta de la variable que aparece en el polinomio.

POLINOMIO	**TIPO**	**TÉRMINO**	**GRADO**
$2x^7$	monomio	1	7
$5x + 7x^9$	binomio	2	9
$2 - 11x - 2x^5$	trinomio	3	5
12	monomio	1	0
$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$	seis términos	6	5

5.2. Suma y resta de polinomios

Las operaciones entre términos semejantes consisten en sumar o restar sus coeficientes, manteniendo inalterada la parte literal de los términos algebraicos.

Ejercicios Resueltos

1 Calcule la suma y la diferencia.

a) $(7a - 12) - (12a - 7)$

b) $(4y^3 + 2y^2 - 3y + 9) - (3y^3 - 2y + 4)$

c) $(4x^2 - 2x + 4) + (7x^2 - 5x + 9)$

d) $(t^4 - t^3 - t + 3) - (4 + t - t^3 + t^2 + 2t^4)$

5.3. Multiplicación de expresiones algebraicas

Las operaciones realizadas con términos algebraicos, que pueden no ser semejantes, consisten en multiplicar y/o dividir sus coeficientes, basándonos en las leyes de los exponentes.

5.3.1. Fórmulas de productos notables

Estas operaciones, que incluyen multiplicar o elevar números a una potencia específica, tienen resultados que son sencillos de recordar.

1. $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

2. $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

3. $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$

4. $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

5. $(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$

6. $(A+B+C)^2=A^2+B^2+C^2+2(AB+AC+BC)$

Ejercicios Resueltos

1 Multiplique las expresiones algebraicas y simplifique.

a) $(a+2b)^2=a^2+4ab+4b^2$

b) $(2r-3s)^2=4r^2-12rs+9s^2$

c) $(x^{2024}+4)(x^{2024}-4)=x^{4048}-16$

d) $\left(3y+\sqrt{2^{11}}\right)\left(3y-\sqrt{2^{11}}\right)=9y^2-2^{11}$

e) $(\sqrt{w}-\sqrt{3})\left(\sqrt{3}+\sqrt{w}\right)=(\sqrt{w}-\sqrt{3})\left(\sqrt{w}+\sqrt{3}\right)=w-3$

f) $\left(x-1+x^2\right)\left(x-1-x^2\right)=(x-1)^2-x^4$

g) $(2x+y+5)(2x-y+5)=(2x+5)^2-y^2$

h) $(a+b+c)(a-b-c)=a^2-(b+c)^2$

i) $(1+3m)^3$

j) $(5+a)^3$

5.4. Factorización

La propiedad distributiva se utiliza para expandir expresiones algebraicas. En ocasiones, es necesario revertir este proceso al factorizar una expresión en un producto de términos más simples, aplicando nuevamente la propiedad distributiva.

Ejercicios Resueltos

1. Identifique y extraiga el factor común de la expresión algebraica para simplificarla y representarla como el producto de una expresión más sencilla y dicho factor.

   a) $15x - 3x^3$

   b) $21ab^4 + 14ab^3 - 7a^4b^2$

   c) $y(y - 2024) - 2024(y - 2024)$

   d) $(w - 22)^2 - 5(w - 22)$

2. Realice la factorización del trinomio para expresarlo como el producto de dos binomios.

   a) $m^2 - 6m + 5$

   b) $6a^2 + 11a - 21$

   c) $(3w + 2)^2 + 8(3w + 2) + 12$

   d) $2(x + y)^2 + 5(x + y) - 3$

5.4.1. Formulas especiales de factorización

Utilizando las fórmulas que se presentarán a continuación, es posible factorizar ciertas expresiones algebraicas notables. De hecho, las tres primeras fórmulas son las de productos notables, pero aplicadas de manera inversa.

1. $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$
2. $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$
3. $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$
4. $A^3 - B^3 = (A - B)\left(A^2 + AB + B^2\right)$
5. $A^3 + B^3 = (A + B)\left(A^2 - AB + B^2\right)$

Ejercicios Resueltos

1. Usar la fórmula de factorización especial para factorizar la expresión.

   a) $m^3 + 27n^3$

   b) $(z + 3)^2 - 4$

   c) $36 + 12a + a^2$

   d) $16x^2 - 24x + 9$

   e) $(w - 22)^2 - 5(w - 22)$

2 Factorice las expresiones agrupando términos.

a) $z^3 + 4z^2 + z + 4$

b) $3w^3 - w^2 + 6w - 2$

c) $2a^3 + a^2 - 6a - 3$

d) $x^3 + x^2 + x + 1$

e) $z^5 + z^4 + z + 1$

3 Factorice por completo la expresión. (Empiece por factorizar la potencia más baja de cada factor común).

a) $a^{5/2} - a^{1/2}$

b) $3b^{-1/2} + 4b^{1/2} + b^{3/2}$

c) $c^{-3/2} + 2c^{-1/2} + c^{1/2}$

d) $(z-1)^{7/2} - (z-1)^{3/2}$

e) $\left(x^2+1\right)^{1/2} + 2\left(x^2+1\right)^{-1/2}$

$$\begin{aligned} c^{-3/2} + 2c^{-1/2} + c^{1/2} &= c^{-3/2}\left(1 + 2c + c^2\right) \\ &= c^{-3/2}\left(1 + c\right)^2 \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

1 **[El poder de las fórmulas algebraicas]** Use la fórmula de una diferencia de cuadrados para factorizar $19^2 - 18^2$. Nótese que es fácil calcular mentalmente la forma factorizada.

Evalúe mentalmente cada expresión:

a) $33^2 - 32^2$

b) $123^2 - 121^2$

c) $1345^2 - 1344^2$

d) $10303^2 - 10203^2$

Resolución

2 Use la fórmula de productos notables

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

para evaluar mentalmente estos productos:

a) $79 \cdot 51$

b) $998 \cdot 1002$

Resolución

3 **[Diferencias de potencias pares]**

a) Factorice por completo las expresiones: $A^4 - B^4$ y $A^6 - B^6$

b) Verifique que $18\ 335 = 12^4 - 7^4$ y $2\ 868\ 335 = 12^6 - 7^6$

c) Use los resultados de las

partes (a) y (b) para factorizar los enteros 18 335 y 2 868 335. A continuación demuestre que en estas dos factorizaciones todos los factores son números primos.

Resolución

4 **[Factorización de $A^n - 1$]** Verifi que estas fórmulas al expandir y simplificar el lado derecho.

$A^2 - 1 = (A - 1)(A + 1)$

$A^3 - 1 = (A - 1)\left(A^2 + A + 1\right)$

$A^4 - 1 = (A - 1)\left(A^3 + A^2 + A + 1\right)$

Con base en el patrón mostrado en esta lista, ¿cómo piensa usted que sería posible factorizar

a) $A^5 - 1$

b) Ahora generalice el patrón que haya observado para obtener una fórmula de factorización para $A^n - 1$, donde n es un entero positivo.

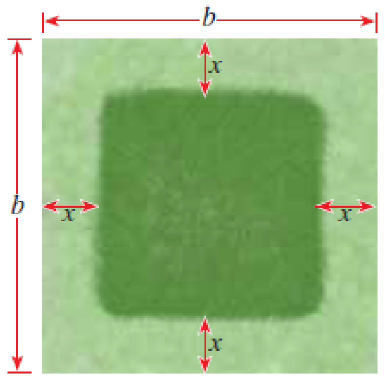
Resolución

5 **[Podar un campo de la UNA PUNO]** Cada semana, un campo cuadrado de cierto parque de la UNA-PUNO es podado alrededor de los bordes. El resto del campo se mantiene sin po-

dar para que sirva como área verde para animales y aves pequeños (vea la figura). El campo mide b metros por b metros, y la franja podada es de x metros de ancho.

a) Hallar el área de la parte podada.

b) Factorice por completo la expresión de la parte (a)



Resolución

❻ **[Factorización de $x^4 + ax^2 + b$]** Factorizar, usando cualquier método apropiado.

a) $a^4 + a^2 - 2$

b) $x^4 + 2x^2 + 9$

c) $x^4 + 4x^2 + 16$

d) $x^4 + 2x^2 + 1$

Resolución

❼ Un juego para adivinar el mes de nacimiento y la edad de una persona es el siguiente.

Pida a la persona que realice las operaciones siguientes, sin que usted las vea.

a) Determine el número

del mes en que nació, (enero, 1; febrero, 2; marzo, 3; etc.).

b) Multiplique el número del mes en que nació por 2.

c) Al resultado anterior sume 5.

d) Multiplique por 50 el resultado que obtuvo en el paso anterior.

e) A esto, añada el número de años que tiene.

f) Y, finalmente, al resultado reste 250.

Pida que le diga el resultado. Los dos dígitos de más a la derecha de este resultado proporcionarán la edad de la persona, mientras que el primero o dos primeros dígitos de la izquierda revelarán el mes en que nació la persona.

Capítulo 6

ECUACIÓN

DEFINICIÓN

Una ecuación es un enunciado que establece que dos expresiones algebraicos son iguales. Por ejemplo

$$2 + 5 = 7$$

Las ecuaciones contienen datos (valores conocidos) y las variables (valores que debemos obtener) que representa números.

$$7x + 11 = 18$$

Consideramos x como la **incógnita** de la ecuación, y nuestro objetivo es hallar el valor de x que haga que la ecuación sea verdadera. Los valores de la incógnita se denominan **soluciones o raíces** de la ecuación.

6.1. Ecuaciones equivalentes

Se denomina así cuando dos o más ecuaciones tienen el mismo conjunto solución. Por ejemplo

$$x + 3 = 7 \qquad y \qquad 3x - 6 = 6$$

PROPIEDAD DE LA IGUALDAD

1. $A = B \Leftrightarrow A + r = B + r$

2. $A = B \Leftrightarrow rA = rB$

6.2. Ecuación lineal

Se denomina ecuación lineal o de primer grado a las igualdades algebraicas que involucran incógnitas con exponente uno. Una ecuación lineal de una variable es aquella equivalente a la forma estándar.

$$ax + b = 0 \qquad a \neq 0$$

donde a y b son números reales y x es la variable o incógnita.

ECUACIÓN LINEAL	ECUACIÓN NO LINEAL	COMENTARIO
$13x - 5 = 6$	$x^2 + 4x - 4 = 0$	No es ecuación lineal, por que el polinomio es de segundo grado
$\sqrt{13}x + \frac{1}{4} - 2 = 0$	$\sqrt{4x} + 2x + 2 = 0$	No es ecuación lineal, por que la variable está afectada del signo radical
$\frac{x-1}{3} + 6 = x$	$\frac{5}{x-1} + 6x = 1$	No es ecuación lineal, por que el polinomio equivalente es de segundo grado

Ejercicios Resueltos

1. De las siguientes ecuaciones, despeje la variable indicada.

   a) $h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t,$ despeje t

   b) $s = \frac{n(n+1)}{2},$ despeje n

2. Resuelva la ecuación dada:

a) $\frac{1}{2}x - 2 = \frac{1}{3}x$

b) $\frac{1}{z} = \frac{3}{4z} + 2$

c) $\frac{3}{m+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3m+3}$

d) $\sqrt{3}w + \sqrt{12} = \frac{w+5}{\sqrt{3}}$

e) $(t-2)^2 = (t+2)^2 + 16$

6.2.1. Clasificación de las Ecuaciones

Las ecuaciones se clasifican de acuerdo a sus características, siendo las principales:

1. **Segun el grado:** puede ser de primer grado, segundo grado, tercer grado, etc.

2. **Segun sus coeficientes:** puede ser numéricos o literales.

3. **Segun sus incognitas:** Pueden ser de una, dos, tres o mas incógnitas.

4. **Segun sus soluciones:** Pueden ser compatibles o incompatibles.

    a) Compatibles: Son aquellos que tiene por lo menos una solución.

        - Determinada: Tiene un número finito de soluciones.

- Indeterminada: Tiene un número infinito de soluciones.

b) Incompatible: Son aquellos que no tienen solución.

Ejercicios Resueltos

I). Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $2(p-1)-3(p-4)=4p$

Resolución

$$\begin{aligned}
2p-2-3p+12 &= 4p\\
-p+10 &= 4p\\
10 &= 4p+p\\
10 &= 5p\\
2 &= p
\end{aligned}$$

2. $t=2-2[2t-3(1-t)]$

Resolución

$$\begin{aligned} t &= 2-2(2t-3+3t) \\ t &= 2-2(5t-3) \\ t &= 2-10t+6 \\ t+10t &= 8 \\ t &= \frac{8}{11} \end{aligned}$$

3. $\dfrac{x}{5} = 2x - 6$

Resolución

$$\begin{aligned} t &= 2-2(2t-3+3t) \\ t &= 2-2(5t-3) \\ t &= 2-10t+6 \\ t+10t &= 8 \\ t &= \frac{8}{11} \end{aligned}$$

4. $\dfrac{5y}{7} - \dfrac{6}{7} = 2 - 4y$

Resolución

$$\begin{aligned}
\frac{5y-6}{7} &= 2-4y \\
5y-6 &= 7(2-4y) \\
5y-6 &= 14-28y \\
5y+28y &= 14+6 \\
33y &= 20 \\
y &= \frac{20}{33}
\end{aligned}$$

5. $5+\dfrac{4x}{9}=\dfrac{x}{2}$

Resolución

$$\begin{aligned}
\frac{45+4x}{9} &= \frac{x}{2} \\
45+4x &= 9\cdot\frac{x}{2} \\
2(45+4x) &= 9x \\
90+8x &= 9x \\
90 &= 9x-8x \\
90 &= x
\end{aligned}$$

6. $\dfrac{x}{3}-4=\dfrac{x}{5}$

Resolución

$$\begin{aligned}
\frac{x-12}{3} &= \frac{x}{5} \\
5(x-12) &= 3x \\
5x-60 &= 3x \\
5x-3x &= 60 \\
2x &= 60 \\
x &= 30
\end{aligned}$$

7. $q = \frac{3}{2}q - 4$

Resolución

$$\begin{aligned}
q &= \frac{3q-8}{2} \\
2q &= 3q-8 \\
8 &= 3q-2q \\
8 &= q
\end{aligned}$$

8. $3x + \frac{x}{5} - 5 = \frac{1}{5} + 5x$

Resolución

$$\begin{aligned}
\frac{15x + x - 25}{5} &= \frac{1 + 25x}{5}\\
16x - 25 &= 1 + 25x\\
-25 - 1 &= 25x - 16x\\
-26 &= 9x\\
-\frac{26}{9} &= x
\end{aligned}$$

9. $y - \dfrac{y}{2} + \dfrac{y}{3} - \dfrac{y}{4} = \dfrac{y}{5}$

Resolución

$$\begin{aligned}
y - \frac{y}{2} + \frac{y}{3} - \frac{y}{4} - \frac{y}{5} &= 0\\
\frac{y \cdot 60}{60} - \frac{y \cdot 30}{2 \cdot 30} + \frac{y \cdot 20}{3 \cdot 20} - \frac{y \cdot 15}{4 \cdot 15} - \frac{y \cdot 12}{5 \cdot 12} &= 0\\
\frac{60y - 30y + 20y - 15y - 12y}{60} &= 0\\
80y - 57y &= 0 \cdot 60\\
23y &= 0\\
y &= 0
\end{aligned}$$

10. $\dfrac{2y - 3}{4} = \dfrac{6y + 7}{3}$

Resolución

$$\begin{aligned} 3(2y-3) &= 4(6y+7) \\ 6y-9 &= 24y+28 \\ -9-28 &= 24y-6y \\ -37 &= 18y \\ -\frac{37}{18} &= y \end{aligned}$$

11 $\dfrac{p}{3}+\dfrac{3}{4}p=\dfrac{9}{2}(p-1)$

Resolución

$$\begin{aligned} \frac{p\cdot 4}{3\cdot 4}+\frac{3p\cdot 3}{4\cdot 3} &= \frac{9(p-1)\cdot 6}{2\cdot 6} \\ 4p+9p &= 54(p-1) \\ 13p &= 54p-54 \\ 54 &= 54p-13p \\ \frac{54}{41} &= p \end{aligned}$$

12 $w+\dfrac{w}{2}-\dfrac{w}{3}+\dfrac{w}{4}=5$

Resolución

$$\begin{aligned}
\frac{w\cdot 12}{12}+\frac{w\cdot 6}{2\cdot 6}-\frac{w\cdot 4}{3\cdot 4}+\frac{w\cdot 3}{4\cdot 3} &= \frac{5\cdot 12}{12}\\
\frac{12w+6w-4w+3w}{\cancel{12}} &= \frac{60}{\cancel{12}}\\
17w &= 60\\
w &= \frac{60}{17}
\end{aligned}$$

13 $\dfrac{7+2(x+1)}{3}=\dfrac{8x}{5}$

Resolución

$$\begin{aligned}
\frac{(7+2x+2)5}{3\cdot 5} &= \frac{8x\cdot 3}{5\cdot 3}\\
45+10x &= 24x\\
45 &= 24x-10x\\
45 &= 14x\\
\frac{45}{14} &= x
\end{aligned}$$

14 $2\left(\dfrac{x}{5}+\dfrac{x}{3}\right)-\dfrac{3x}{10}=3\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2x}{5}\right)-1$

Resolución

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{5}+\frac{2x}{3}-\frac{3x}{10} &= \frac{3}{3}+\frac{6x}{5}-1\\
\frac{2x\cdot 6}{5\cdot 6}+\frac{2x\cdot 10}{3\cdot 10}-\frac{3x\cdot 3}{10\cdot 3} &= \frac{3\cdot 10}{3\cdot 10}+\frac{6x\cdot 6}{5\cdot 6}-\frac{1\cdot 30}{30}\\
\frac{12x+20x-9x}{\cancel{30}} &= \frac{30+36x-30}{\cancel{30}}\\
23x &= 36x\\
0 &= 36x-23x\\
0 &= 13x\\
0 &= x
\end{aligned}$$

15 $\dfrac{1-x}{3}-\dfrac{x-1}{12}=\dfrac{3x-1}{4}$

Resolución

$$\begin{aligned}
\frac{(1-x)\cdot 4}{3\cdot 4}-\frac{x-1}{12} &= \frac{(3x-1)\cdot 3}{4\cdot 3}\\
\frac{4-4x-x+1}{\cancel{12}} &= \frac{9x-3}{\cancel{12}}\\
5-5x &= 9x-3\\
5+3 &= 9x+5x\\
8 &= 14x\\
\frac{4}{7} &= x
\end{aligned}$$

16 $5-2\left(\dfrac{x}{5}+1\right)=\dfrac{x}{10}+3\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$

Resolución

$$\begin{aligned}
5-\frac{2x}{5}-2 &= \frac{x}{10}+\frac{3x}{2}-3\\
\frac{5\cdot 10}{10}-\frac{2x\cdot 2}{5\cdot 2}-\frac{2\cdot 10}{10} &= \frac{x}{10}+\frac{3x\cdot 5}{2\cdot 5}-\frac{3\cdot 10}{10}\\
\frac{50-4x-20}{\cancel{10}} &= \frac{x+15x-30}{\cancel{10}}\\
50-20+30 &= x+15x+4x\\
60 &= 20x\\
\frac{60}{20} &= x\\
3 &= x
\end{aligned}$$

17 $\dfrac{x+a}{a-b}+\dfrac{x-a}{a+b}=\dfrac{x+b}{a+b}+\dfrac{2(x-b)}{a-b}$

Resolución

$$\begin{aligned}
\frac{x-a}{a+b}-\frac{x+b}{a+b} &= \frac{2x-2b}{a-b}-\frac{x+a}{a-b}\\
\frac{x-a-x-b}{a+b} &= \frac{2x-2b-x-a}{a-b}\\
-\frac{a+b}{a+b} &= \frac{x-a-2b}{a-b}\\
-1(a-b) &= x-a-2b\\
-a+b+a+2b &= x\\
3b &= x
\end{aligned}$$

18 Determine el valor de $a+b-c$, si la ecuación es de primer grado en x.

$$\frac{b}{4}x^2 + \left(\frac{c}{3} - 1\right)x + a = x^2$$

Además $(2b = a)$ y tiene por raíz al número -1.

Resolución

Por dato: la ecuación es de primer grado.

$$\underbrace{\left(\frac{b}{4} - 1\right)}_{0} x^2 + \left(\frac{c}{3} - 1\right)x + a = 0$$

Entonces: $\begin{cases} b = 4 \\ a = 2b \Longrightarrow a = 8 \end{cases}$

Reemplazando a la ecuación y evaluando la raíz $x = -1$

$$\left(\frac{c}{3} - 1\right)(-1) + 8 = 0$$

entonces $c = 27$

$$\therefore a + b - c = 8 + 4 - 27 = -15$$

19 Resolver: $\sqrt[3]{14 - \sqrt{x}} + \sqrt[3]{14 + \sqrt{x}} = 4$

Resolución

Recuerda: $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt[3]{14-\sqrt{x}}+\sqrt[3]{14+\sqrt{x}}\right)^3 &= 4^3\\
\left(\sqrt[3]{14-\sqrt{x}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{14+\sqrt{x}}\right)^3+3\left(\sqrt[3]{14-\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt[3]{14+\sqrt{x}}\right)(4) &= 4^3\\
28+3\cdot\sqrt[3]{(14-\sqrt{x})(14+\sqrt{x})}(4) &= 64\\
\sqrt[3]{(14^2-x)} &= 3\\
x &= 169
\end{aligned}$$

20 Si la siguiente ecuación:

$$mx+(3-n)x = 5x+2m-10+n$$

tiene infinitas soluciones. Hallar $\dfrac{m}{n}$

Resolución

$$\begin{aligned}
mx+(3-n)x &= 5x+2m-10+n\\
mx+(3-n)x-5x &= 2m-10+n\\
(m-n-2)x &= 2m+n-10\\
x &= \frac{2m+n-10}{m-n-2}
\end{aligned}$$

Dato: infinitas soluciones:

$$\begin{cases} 2m+n-10=0 \\ m-n-2=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2m+n=10 \\ m-n=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m=4 \\ n=2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \frac{m}{n}=\frac{4}{2}=2$$

21 **Calcular x de:** $\quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1\right)-1\right)-1=0$

Resolución

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-1\right)-1\right)-1\right) &= 1 \\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)-1\right)-1\right) &= 1 \\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{4}-1\right)-1\right) &= 1 \\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x-2-4}{4}\right)-1\right) &= 1 \\
\frac{1}{2}\left(\frac{x-6}{8}-1\right) &= 1 \\
\frac{1}{2}\left(\frac{x-6-8}{8}\right) &= 1 \\
\frac{x-14}{16} &= 1 \\
x-14 &= 16 \\
x &= 16+14 \\
x &= 30
\end{aligned}$$

22 Resolver la siguiente ecuación $\quad 8^{27^{x-1}} = \sqrt[3]{2}^{9^{x+5}}$

Resolución

$$
\begin{aligned}
\left(2^{3}\right)^{27^{x-1}} &= \left(2^{1/3}\right)^{9^{x+5}} \\
2^{3\cdot\left(27^{x-1}\right)} &= 2^{\frac{1}{3}\cdot\left(9^{x+5}\right)} \\
3\cdot\left(27^{x-1}\right) &= \frac{1}{3}\cdot\left(9^{x+5}\right) \\
3\cdot\left(3^{3}\right)^{x-1} &= 3^{-1}\cdot\left(3^{2}\right)^{x+5} \\
3^{1+3(x-1)} &= 3^{-1+2(x+5)} \\
1+3x-3 &= -1+2x+10 \\
3x-2 &= 2x+9 \\
x &= 11
\end{aligned}
$$

23 $(a+1)\{x-a[(1-a)x+a]-1\}=(a^2-1)(a-1)$

Resolución

$$
\begin{aligned}
(a+1)\{x-a[(1-a)x+a]-1\} &= (a+1)(a-1)(a-1)\\
\{x-a[(1-a)x+a]-1\} &= (a-1)(a-1)\\
x-a[(1-a)x+a]-1 &= (a-1)^2\\
x-ax+a^2x-a^2-1 &= a^2-2a+1\\
x(1-a+a^2) &= 2a^2-2a+2\\
x\cancel{(1-a+a^2)} &= 2\cancel{(1-a+a^2)}\\
x &= 2
\end{aligned}
$$

24 Calcular "n" si: $\sqrt[n+2]{\dfrac{125^{2n+3}+25^{3n+4}}{150\left(5^{3n}\right)}}=5^{2n}$

Resolución

$$
\begin{aligned}
\sqrt[n+2]{\frac{(5^3)^{2n+3}+(5^2)^{3n+4}}{6(5^2)\left(5^{3n}\right)}} &= 5^{2n}\\
\sqrt[n+2]{\frac{5^{6n+9}+5^{6n+8}}{6(5^{3n+2})}} &= 5^{2n}\\
\sqrt[n+2]{\frac{5^{6n+8}(5+1)}{6(5^{3n+2})}} &= 5^{2n}\\
\sqrt[n+2]{\frac{5^{6n+8}}{5^{3n+2}}} &= 5^{2n}\\
\sqrt[n+2]{5^{6n+8-3n-2}} &= 5^{2n}\\
5^{\frac{3n+6}{n+2}} &= 5^{2n}\\
\frac{3(n+2)}{n+2} &= 2n\\
3 &= 2n\\
n &= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

25 $$\frac{a+1}{(a+b)^2}x+\frac{a+1}{(a-b)^2}=\frac{a+1}{a^2-b^2}+\frac{a+1}{(a-b)^2}x$$

Resolución

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(a+b)^2}x+\frac{1}{(a-b)^2} &= \frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{(a-b)^2}x\\
\frac{1}{(a+b)^2}x-\frac{1}{(a-b)^2}x &= \frac{1}{a^2-b^2}-\frac{1}{(a-b)^2}\\
\frac{(a-b)^2}{[(a+b)(a-b)]^2}x-\frac{(a+b)^2}{[(a-b)(a+b)]^2}x &= \frac{(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)(a^2-b^2)}-\frac{(a+b)^2}{[(a-b)(a+b)]^2}\\
\frac{(a-b)^2}{[a^2-b^2]^2}x-\frac{(a+b)^2}{[a^2-b^2]^2}x &= \frac{(a^2-b^2)}{[a^2-b^2]^2}-\frac{(a+b)^2}{[a^2-b^2]^2}\\
\left[(a-b)^2-(a+b)^2\right]x &= (a^2-b^2)-(a+b)^2\\
\left[a^2-2ab+b^2-a^2-2ab-b^2\right]x &= a^2-b^2-a^2-2ab-b^2\\
-4abx &= -2b(a+b)\\
x &= \frac{a+b}{2a}
\end{aligned}$$

26 Calcular: $x^{\sqrt[3]{x}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$

Resolución

$$
\begin{aligned}
x^{\sqrt[3]{x}} &= \frac{1^{1/3}}{3^{1/3}} \\
x^{x^{1/3}} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{1/3} \\
\left(x^{x^{1/3}}\right)^{1/3} &= \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{1/3}\right]^{1/3} \\
\left(x^{1/3}\right)^{x^{1/3}} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{1/9} \\
\sqrt[3]{x}^{\sqrt[3]{x}} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{3}} \\
\sqrt[3]{x}^{\sqrt[3]{x}} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{3\cdot\frac{1}{27}} \\
\sqrt[3]{x}^{\sqrt[3]{x}} &= \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\right]^{\frac{1}{27}} \\
\sqrt[3]{x}^{\sqrt[3]{x}} &= \left(\frac{1^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{27}} \\
\sqrt[3]{x}^{\sqrt[3]{x}} &= \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{27}} \\
\sqrt[3]{x} &= \frac{1}{27} \\
x &= \frac{1}{3^9}
\end{aligned}
$$

27 Si al triple de un número le restamos 16 se obtiene 20. ¿Cuál

es el número?

Resolución

Al número que buscamos lo llamamos: x

Podemos plantear la siguiente ecuación:

$3x - 16 = 20$

$3x = 20 + 16$

$x = 12$

El número buscado es 12.

28 Pedro, que actualmente tiene 42 años, tiene 8 años más que el doble de la edad de Antonio. ¿Qué edad tiene Antonio?

Resolución

A la edad de Antonio la llamamos: x

Podemos plantear la siguiente ecuación: $2x + 8 = 42$

$2x = 42 - 8$

$2x = 34$

$x = 17$

La edad de Antonio es 17.

29 En una clase de matemáticas en la UNA - Puno, compuesta por 52 estudiantes, se observa que el número de varones es 7 más que el doble de mujeres. ¿Cuántas mujeres hay en total

en la clase?

Resolución

- ♣ mujeres $= x$
- ♣ varones $= 7 + 2x$

Entonces:

$$\begin{aligned} 7 + 2x + x &= 52 \\ 3x &= 45 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad Hay \;\; 15 \;\; mujeres$$

30 Al sumarle a un número 34 unidades se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por 3. ¿Cuál es ese número?

Resolución

Al número que buscamos lo llamamos: x

Podemos plantear la siguiente ecuación: $x + 34 = 3x$

$x - 3x = -34$

$-2x = -34$

$x = 17$

El número buscado es 17.

31 La suma de tres números naturales consecutivos es igual al menor más 19. ¿Cuáles son estos tres números?

Resolución

Los números que buscamos los llamamos: $x, x+1, x+2$

Podemos plantear la siguiente ecuación: $(x)+(x+1)+(x+2) = x+19$

$x+x+1+x+2 = x+19$

$x+x+x-x = 19-1-2$

$2x = 16$

$x = 8$

Los números buscados son $8, 9 \ \ y \ \ 10$.

32 En un trabajo, Miguel ha ganado el doble de dinero que Ana, y Abel el triple de Miguel. Si en total han obtenido 144\$, ¿cuánto ha ganado cada uno?

Resolución

Escribimos los nombres con sus incógnitas: Ana: x, Miguel: $2x$, Abel: $3 \cdot 2x = 6x$

Podemos plantear la siguiente ecuación: $x+2x+6x = 144$

$9x = 144$

$x = 16$

Ana ganó 16\$, Miguel 32\$ y Abel 96\$.

33 Royer tiene 3 monedas más de cinco céntimos que de diez céntimos, y 5 monedas más de diez céntimos que monedas de veinticinco céntimos. En total tiene s/. 2,10. ¿Cuántas monedas de cada una tiene?

Resolución

- ♣ Monedas de 5 céntimos $= x + 8$
- ♣ Monedas de 10 céntimos $= x + 5$
- ♣ Monedas de 25 céntimos $= x$

Entonces:

$$\begin{aligned} 0{,}05(x+8) + 0{,}10(x+5) + 0{,}25(x) &= 2{,}10 \\ 0{,}05 \cdot 100(x+8) + 0{,}10 \cdot 100(x+5) + 0{,}25 \cdot 100(x) &= 2{,}10 \cdot 100 \\ 5(x+8) + 10(x+5) + 25(x) &= 210 \\ 40x + 90 &= 210 \\ 40x &= 120 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

- ♣ Monedas de 5 céntimos $= 11$
- ♣ Monedas de 10 céntimos $= 8$
- ♣ Monedas de 25 céntimos $= 3$

34 En un salón de clases hay 20 alumnos, y cada uno iba a recibir su regalo. Antes de la repartición, se perdieron algunos regalos. El tutor mandó inmediatamente que trajeran tantos regalos como regalos habían quedado y dos regalos más para reponer lo perdido. ¿Cuántos regalos se perdieron?

Resolución

Alumnos $= 20$

Cantidad de regalos $= 20 \cdot 2 = 40$

Sea: $\quad x$ la cantidad de regalos perdidos.

del enunciado:

Quedó: $\quad 40 - x \qquad\qquad$ perdió: $\; x$

Luego: $\; x = (40 - x) + 2 \Longrightarrow \; x = 21$

$$\therefore \quad \textit{Se perdieron } 21 \textit{ regalos}$$

35 **La edad de Diofanto.** Un matemático griego muy importante fue Diofanto de Alejandría (250 d.c.), quien hizo contribuciones en varias áreas de las matemáticas. Tal vez su trabajo más importante lo realizó en lo que ahora se conoce como teoría de números. De su obra Aritmética sólo sobreviven seis de los libros originales; el número total es un misterio.

En ella se encuentra una colección de problemas cuya solución es, en muchos de los casos, muy ingeniosas. Poco se sabe de él, pero algunos detalles de su vida se conocen a través del epitafio que, como un homenaje, se inscribió en su tumba. Una traducción libre del original es la siguiente:

Un transeúnte, ésta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después de la doceava parte, su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, falleció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivir, llorando, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad.

Con base en el texto del epitafio, plantee una ecuación para determinar la edad de Diofanto y responda las siguientes preguntas.

a) ¿A qué edad falleció Diofanto?

b) ¿Cuántos años vivió antes de casarse?

c) ¿Cuántos años vivió su hijo?

d) ¿Qué edad tenía Diofanto cuando nació su hijo?

Resolución

Si denotamos con x la edad, en años de Diofanto al morir, entonces la traducción de su epitafio en términos de la variable x es:

- Años de la niñez de Diofanto: $\frac{x}{6}$ años
- Edad a la que su cara se cubrió de barba: $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}$ años
- Edad a la que contrajo matrimonio: $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}$
- Edad de Diofanto cuando se convirtió en papá: $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5$
- Edad de Diofanto cuando falleció su hijo: $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}$
- Edad de Diofanto cuando murió: $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4$

Por tanto, podemos plantear la siguiente ecuación: $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$

a) ¿A qué edad falleció Diofanto?

$x=84$, así que Diofanto falleció a la edad de 84 años.

b) ¿Cuántos años vivió antes de casarse?

Con base en la relación dada en el epitafio, se tiene

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}=\frac{84}{6}+\frac{84}{12}+\frac{84}{7}=14+7+12=33$$

por lo que Diofanto se casó a los 33 años.

c) ¿Cuántos años vivió su hijo?

El texto es muy claro en este punto?. Tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, falleció.?, en consecuencia su hijo vivió 42 años.

d) ¿Qué edad tenía Diofanto cuando nació su hijo?

Por el planteamiento que se realizó anteriormente, se tiene: Edad de Diofanto cuando se convirtió en papá:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5=\frac{84}{6}+\frac{84}{12}+\frac{84}{7}+5=14+7+12+5=38$$

Por lo que Diofanto se convirtió en papá a la edad de 38 años.

Ejercicios Propuestos

1 En los Problemas de 1 - 12, resolver las ecuaciones.

1 $\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{2-x}{6}=x-2$ 2 $\dfrac{x}{5}+\dfrac{2(x-4)}{10}=7$

3. $\frac{9}{5}(3-x)=\frac{3}{4}(x-3)$
4. $\frac{2y-7}{3}+\frac{8y-9}{14}=\frac{3y-5}{21}$
5. $\frac{3}{2}(4x-3)=2[x-(4x-3)]$
6. $(3x-1)^2-(5x-3)^2=-(4x-2)^2$
7. $\frac{1}{2x(x-1)}-\frac{1}{(x+1)(2x+3)}=0$ Sol. $-\frac{3}{7}$
8. $\frac{2x+7}{5x+2}=\frac{2x-1}{5x-4}$ Sol. $\frac{13}{14}$
9. $\frac{x+1}{2x+1}+\frac{2x+3}{x+1}=\frac{5}{2}$ Sol. $-\frac{3}{5}$
10. $\frac{x-4}{x+5}-\frac{x+1}{x-2}=-\frac{12(x+3)}{(x+5)^2}$ Sol. $-\frac{19}{15}$
11. $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-6}{x-7}=\frac{x-5}{x-6}+\frac{x-2}{x-3}$ Sol. $\frac{9}{2}$
12. $32^{25^{x-1}}=\sqrt[5]{2}^{\sqrt[3]{5}^{x+3}}$
13. Un padre es tres veces mayor que su hijo. En 12 años, él tendrá el doble de la edad de su vástago. ¿Qué edades tienen el padre y el hijo ahora?
14. Hace cinco años, María tenía el doble de la edad de su hermano. Encuentre la edad actual de María si la suma de sus edades hoy es de 40 años.
15. Yo tengo el doble de monedas de diez centavos en mi bolsillo que de monedas de veinticinco centavos. Si tuviera 4 monedas menos de diez centavos y 3 monedas más de veinticinco centavos, tendría $ 2,60. ¿ cuántas monedas de diez centavos y de veinticinco centavos tengo?

6.3. Ecuaciones cuadráticas

Definición

Sean a, b y c constantes reales y $a \neq 0$ entonces la función f definida por la ecuación de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ se llama función cuadrática.

Si la función $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ se llama ecuación cuadrática.

Una ecuación cuadrática es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

6.3.1. Métodos de solución de ecuaciones cuadráticas

1. Por factorización

Propiedad de producto cero

$A \cdot B = 0$ si y sólo si $A = 0$ o $B = 0$

Ejercicios Resueltos

1 Resuelva la ecuación por factorización.

a) $a^2 + 8a + 12 = 0$

b) $3x^2 + 5x = 2$

c) $6m(m-1) = 21 - m$

2. Completando cuadrados

Para que el polinomio $x^2 + bx$ sea un cuadrado perfecto, sume, $\left(\dfrac{b}{2}\right)^2$ que es el cuadrado de la mitad del coeficiente de x. Esto resulta el cuadrado perfecto.

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Ejercicios Resueltos

1. Resuelva la ecuación completando el cuadrado.

a) $x^2 + 2x = 5$

b) $x^2 - 4x + 2 = 0$

c) $2x^2 + 8x + 1 = 0$

d) $3x^2 - 6x = 1$

e) $x^2 = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{8}$

3. Fórmula general

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, son:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Ejercicios Resueltos

1. Usando la fórmula cuadrática encuentre todas las soluciones reales de la ecuación dada.

   a) $x^2 - 2x - 15 = 0$

   b) $2x^2 + x - 3 = 0$

   c) $x^2 - 6x + 1 = 0$

   d) $2x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$

   e) $x^2 + 5x + 3 = 0$

   f) $x^2 = 3(x - 1)$

   g) $(3w + 2)^2 = 10$

   h) $(2z - 1)^2 = 8$

6.3.2. Discriminante

El discriminante de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con $(a \neq 0)$ es

$D = b^2 - 4ac.$

1. Si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

2. Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene exactamente una solución real.

3. Si $D < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real.

Ejercicios Resueltos

1. Use el discriminante para determinar el número de soluciones reales de la ecuación. No resuelva la ecuación.

   a) $x^2 - 6x + 1 = 0$

   b) $3x^2 - 6x + 9 = 0$

   c) $x^2 + 2{,}2x + 1{,}2 = 0$

   d) $x^2 + rx - s = 0 \ (s > 0)$

6.4. Otros tipos de ecuaciones cuadráticas

Ya sabemos como resolver las ecuaciones de primer y segundo grado, sin embargo existen otros tipos de ecuaciones tales como las ecuaciones fraccionarias, ecuaciones con radicales, etc. Que, con tan solo hacer un cambio de variable, o elevación a la potencia adecuada se puede transformar en ecuaciones lineales y cuadráticas.

6.4.1. Ecuación fraccionaria

Una ecuación fraccionaria es aquella cuya variable o incógnita se encuentra en el denominador.

Ejercicios Resueltos

1. En la naturaleza existen dos grupos de animales, los que comen y los son comidos. Sea s el número de insectos que ha consumido una gallina, y z es la densidad de presas (está dado por número de insectos por unidad de área); entonces, lo consumido a lo largo de un periodo, está dado por:

$$s = \frac{1{,}1z}{0{,}08z + 1}$$

.

2. Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación.

a) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{5}{4}$

b) $\dfrac{10}{x} - \dfrac{12}{x-3} + 4 = 0$

c) $\dfrac{x^2}{x+100} = 50$

d) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2} = 0$

e) $\dfrac{x}{x+7} - \dfrac{x+1}{x+3} = 1$

f) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{12}{x-3} = -4$

6.4.2. Ecuación con radicales

Son aquellas ecuaciones irracionales, es decir, son ecuaciones donde al menos una de las variables se encuentran afectada de algún signo radical o exponencial fraccionaria

Ejercicios Resueltos

1. Sabía Ud, que una forma de saber la profundidad d, de un pozo, es arrojando una piedra hacia adentro y medir el tiempo que le toma a la piedra chocar contra el agua. Esta dado por la ecuación.

$$T = \frac{\sqrt{d}}{4} + \frac{d}{1090}$$

2. Encuentre todas las soluciones reales de las siguientes ecuaciones.

   a) $\sqrt{2t+1} + 1 = t$

   b) $\sqrt{5-z} + 1 = z - 2$

   c) $2x + \sqrt{x+1} = 8$

   d) $\sqrt{\sqrt{w-5} + w} = 5$

6.4.3. Ecuaciones de grado superior con exponente entero

Son ecuaciones de tipo cuadrático, que se caracterizan por que la parte literal de los términos algebraicos de la ecuación son de grado superior, se puede hacer un cambio de variable conveniente, de tal manera que la ecuación resultante es una ecuación equivalente de grado inferior, generalmente de segundo grado.

Ejercicios Resueltos

1. Muchos fenómenos físicos y químicos, se pueden estudiar através de una expresión matemática; sabemos que la densidad del agua a ciertas condiciones de temperatura y presión es 1 $kg./\ L$. Pero cuando la temperatura se encuentra entre 0^0C y 30^0C, el volumen V de agua en centímetros cúbicos, de un kilogramo de agua a una temperatura T, esta dado por:

$$V = -0{,}0000679T^3 + 0{,}0085043T^2 - 0{,}06426T + 999{,}87$$

2. Encuentre todas las soluciones reales de las siguientes ecuaciones.

   a) $x^4 - 13x^2 + 40 = 0$

   b) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

   c) $2x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

   d) $x^6 - 2x^3 - 3 = 0$

6.5. Ecuaciones que contiene exponentes fraccionarias

Son ecuaciones que contienen potencias fraccionarias, el procedimiento es similar al tema anterior, es decir, se debe hacer un cambio de variable de forma conveniente, con la finalidad de convertirlo en una ecuación de segundo grado.

Ejercicios Resueltos

1. En un estanque hay peces de una sola clase, entonces la población de peces P, se modela mediante la siguiente ecuación, que nos permita conocer la población en función del tiempo t.

$$P = 140 + 10t^{1/2} + 3t$$

2. Encuentre todas las soluciones reales de las siguientes ecuaciones.

a) $x^{4/3} - 5x^{2/3} + 6 = 0$

b) $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} - 4 = 0$

c) $4(x+1)^{1/2} - 5(x+1)^{3/2} + (x+1)^{5/2} = 0$

d) $x^{1/2} + 3x^{-1/2} - 10x^{-3/2} = 0$

e) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

Ejercicios Resueltos

1 Hallar las raíces de la ecuación: $\dfrac{x}{6} - \dfrac{3}{x} = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\frac{x}{6} - \frac{3}{x} &= \frac{1}{2} \\
\frac{x^2 - 18}{6x} &= \frac{1}{2} \\
x^2 - 3x - 18 &= 0 \\
(x-6)(x+3) &= 0
\end{aligned}$$

$$\therefore x = 6 \qquad \wedge \qquad x = -3$$

2 Hallar las raíces de la ecuación: $\sqrt[5]{x^2} - 3\sqrt[5]{x} + 2 = 0$

Resolución

Hacemos un cambio de variable:

$$\boxed{\bullet \;\; a = \sqrt[5]{x} \Longrightarrow a^5 = x}$$

Reemplazando a la ecuación se tiene:

$$\begin{aligned}
a^2 - 3a + 2 &= 0 \\
(a-1)(a-2) &= 0
\end{aligned}$$

$$a = 1 \qquad \wedge \qquad a = 2$$

$$\therefore \quad x = a^5 = 1^5 = 1 \quad \wedge \quad x = a^5 = 2^5 = 32$$

3 Resolver: $4^{x+2} + 128 = 3\left(2^{x+5}\right)$

Resolución

$(2^2)^x \cdot 4^2 + 128 = 3 \cdot 2^x \cdot 2^5$

$16(2^x)^2 + 128 = 3 \cdot 32 \cdot 2^x$

$16 \cdot (2^x)^2 + 128 = 96 \cdot 2^x$

$(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 =$

Hacemos un cambio de variable:

$$\boxed{\bullet \quad a = 2^x}$$

$$\begin{aligned} a^2 - 6a + 8 &= 0 \\ (a-4)(a-2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad a = 4 \quad \wedge \quad a = 2$$

$$\therefore \quad a = 2^x = 4 = 2^2 \quad \Rightarrow x = 2 \qquad \wedge$$

$$a = 2^x = 2^1 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

4 Hallar el valor entero de r en:

$$r^2x^2 - (r+2)x + 1 = 0$$

Sabiendo que sus dos raíces son iguales.

Resolución

$$r^2x^2 - (r+2)x + 1 = 0$$

Dato: $x_1 = x_2$ entonces se cumple.

$\triangle = 0 \Longrightarrow b^2 - 4ac = 0 \Longrightarrow b^2 = 4ac$

Reemplazando:

$[-(r+2)]^2 = 4r^2(1)$

$r^2 + 4r + 4 = 4r^2$

$3r^2 - 4r - 4 = 0$

Factorizando: $(3r+2)(r-2) = 0$

$\therefore\ r = 2$

5 Calcule el valor de m para que la ecuación:

$6x^2 + (2m+3)x + m = 0$ tenga solo una raíz.

Resolución

$$6x^2 + (2m+3)x + m = 0$$

Del enunciado se deduce:

$$\begin{aligned}
\triangle = (2m+3)^2 - 4(6)(m) &= 0 \\
4m^2 + 12m + 9 - 24m &= 0 \\
4m^2 - 12m + 9 &= 0 \\
(2m-3)^2 &= 0 \\
2m - 3 &= 0 \\
m &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

6. Encuentre la ecuación polinómica cuyas raices son:

$$r_1 = \frac{3+\sqrt{29}}{10} \qquad r_2 = \frac{3-\sqrt{29}}{10}$$

Resolución

Por formación de una ecuación de segundo grado.

$$x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 \cdot r_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
x^2-\left(\frac{3-\sqrt{29}}{10}+\frac{3+\sqrt{29}}{10}\right)x+\left(\frac{3-\sqrt{29}}{10}\right)\left(\frac{3+\sqrt{29}}{10}\right) &= 0\\
x^2-\left(\frac{6}{10}\right)x-\left(\frac{20}{100}\right) &= 0\\
x^2-\left(\frac{3}{5}\right)x-\left(\frac{1}{5}\right) &= 0\\
5\left(x^2-\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}\right) &= (5)0\\
5x^2-3x-1 &= 0
\end{aligned}$$

7. Si una de las raíces de la ecuación polinomial de coeficientes racionales:

$$P(x)=x^4-4x^3+ax^2+bx+c=0$$

es $\left(1+\sqrt[4]{2}\right)$; calcular. $a+b+c$

Resolución

Dato:

$$x=1+\sqrt[4]{2}$$

$$x-1=\sqrt[4]{2}$$

Elevando a la cuarta $(x-1)^4=2$, desarrollando

$x^4-4x^3+6x^2-4x+1=2$

$x^4-4x^3+6x^2-4x-1=0$

entonces:

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = -4 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad a + b + c = 6 - 4 - 1 = 1$$

Ejercicios Propuestos

1 Mediante foctorización, resolver las siguientes ecuaciones

a) $x^2 - 11x + 28 = 0$

b) $x^2 + 4x - 45 = 0$

c) $x^2 - 4x - 21 = 0$

d) $2x^2 + x - 1 = 0$

e) $4x^2 - 5x = 0$

f) $6x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{4} = 0$

g) $3x^2 - 11x + 10 = 0$

h) $4x^2 - 4x - 15 = 0$

i) $(x + 3)(x - 3) = x - 9$

j) $6x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$

Resolución

2 Completando Cuadrados, resolver las siguientes ecuaciones

a) $x^2 - 6x + 6 = 0$

b) $x^2 + 5x - 5 = 0$

c) $3x^2 - 6x - 3 = 0$

d) $x^2 + 2x - 4 = 0$

e) $2x^2 - 6x - 1 = 0$

f) $5x^2 + 4x - 1 = 0$

g) $3x^3 + x^2 - 10x = 0$

h) $7x + 3(x^2 - 5) = x - 3$

i) $2x(4x - 1) = 4 + 2x$

j) $x(x+1)(x+3) = (x+2)^3$

Resolución

3 Por fórmula, resolver las siguientes ecuaciones

a) $4x^2 + 20x + 25 = 0$

b) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

c) $5x(x + 2) + 6 = 3$

d) $(4x-1)(2x+3) = 18x-4$

e) $(x + 1)^2 = 2(x - 1)^2$

f) $(2x + 1)^2 = 3(x + 1)^2$

g) $\dfrac{7}{x-4} = -\dfrac{1}{x+2} - 2$

h) $\dfrac{5}{x+3} + \dfrac{1}{x-1} = 2$

i) $\dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4x + 3} = -3$

j) $x(3x + 2) = (x + 2)^2$

Ejercicios Propuestos

1 Resuelva las siguientes ecuaciones por el método apropiado.

a) $\sqrt{6x + 19} = x + 2$

b) $x - 1 = \sqrt{4x^2 - 26x + 46}$

c) $(x + 1)^3 - (x - 1)^3 = 8x$

d) $5x^2 - \dfrac{7}{2}x = \dfrac{1}{2}x + 1$

e) $\dfrac{x^2}{3} = \dfrac{11}{6}x + 1$

f) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

g) $2x^4 - x^2 - 1 = 0$

h) $2x^{2/3} + x^{1/3} - 1 = 0$

i) $9^{x^2} = 27^{(3-x)}$

j) $25^{(x^2)} = \dfrac{125}{5^x}$

k) $\sqrt{3x + 1} = x - 3$

l) $(x + 1)(1 - 2x) = (2x +$

$7)(19+x)$

m) $(1+2x)^2+(1+x)(1-x)=3x^2+2x+4$

n) $(x+4)^3-(x-3)^3=343$

ñ) $(x+2)^3-(x-1)^3=x(3x+4)+8$

o) $(5x-4)^2-(3x+5)(2x-1)=20x(x-2)+27$

p) $\dfrac{x+4}{x+5}-\dfrac{x+2}{x+3}=\dfrac{1}{24}$

q) $\dfrac{5}{x^2-1}-\dfrac{6}{x+1}=3\dfrac{5}{8}$

r) $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{2x+9}{x+3}$

s) $\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{x+1}$

t) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x}=\sqrt{16x+1}$

u) $\sqrt{2x+\sqrt{4x-3}}-3=0$

v) $2\sqrt{x}=\sqrt{x+7}+\dfrac{8}{\sqrt{x+7}}$

w) $\sqrt{x+\sqrt{x+8}}=2\sqrt{x}$

x) $\sqrt{6-x}+\sqrt{x+7}-\sqrt{12x+1}=0$

2. $\left(x-\dfrac{6}{x}\right)^2+4x-\dfrac{24}{x}=5$

3. $\left(x-\dfrac{3}{x}\right)^2-4x+\dfrac{12}{x}=12$

4. Determine el conjunto solución de: $p(x)=\dfrac{2}{x+5}+\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{20}{x^2-25}=0$

5. Hallar el valor de k para que la suma de las raíces de la ecuación $kx^2+4kx+3=x^2$ sea 10.

6. Dado el polinomio $p(x)$: $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x}{x^2-4}=0$. Hallar la suma de los elementos de $p(x)$.

7. Se quitan cuadrados iguales de cada esquina de una hoja metálica rectangular cuyas dimensiones son 20 por 16 pulgadas. Después los lados se doblan hacia arriba para formar una caja rectangular. Si la base de la caja tiene un área de 140 pulgadas cuadradas, determine el lado del cuadrado que se quitó de cada esquina.

8. Una caja con base cuadrada y sin tapa se construye a partir de una pieza cuadrada de metal cortando cuadrados de 2 pulgadas de cada esquina y doblando los lados hacia arriba. Encuentre las dimensiones de la hoja metálica, si el volumen de la caja será de 50 pulgadas cúbicas.

9. Se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 80 pies por segundo. La altura h (en pies) recorrida en t segundos está dada por la fórmula $h = 80t - 16t^2$

   a) ¿ Después de cuántos segundos la pelota alcanzará una altura de 64 pies?

   b) ¿ Cuánto tiempo tardará la pelota en regresar al piso?

   c) Determine la altura máxima que la pelota alcanza. (Sugerencia: El tiempo de recorrido hacia arriba es igual a la mitad del tiempo en regresar al piso).

10 Se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba desde el piso con una velocidad inicial de 128 pies por segundo. El proyectil está a una altura h después de t segundos del lanzamiento, en donde $h = 128t - 16t^2$

a) ¿ Después de cuánto tiempo el proyectil estará a una altura de 192 pies por encima del suelo?

b) ¿ En qué momento el proyectil regresará al suelo? Determine la altura máxima que alcanza el proyectil.

11 Soledad tiene una caja con hilos. Le dio la mitad de los hilos a Jorge y un tercio de las que le quedaban en la caja, se las dio a María. De esta manera, le quedaron 6 hilos a Soledad, ¿ Cuántos hilos tenía al principio ?

12 Nohelia, Antonio y su madre comieron un pastel. Nohelia comió la mitad del pastel, Antonio comió 1/4 del pastel y su madre comió 1/3 del pastel. ¿ Cuánto quedó del pastel?

13 La suma de tres números es 12. El segundo número es 1 más que tres veces el primero y el tercer número es 1 menos que 2 veces el segundo. Entonces ¿ cuales son los números ?

14 Roger recibió s/. 435 por trabajar 52 horas en una semana. La jornada laboral normal es de 40 horas semanales, y su jefe paga

una y media veces más de lo que paga por cada hora normal cada hora extra. Entonces, por cada hora, Roger recibe:

15. El largo de un cuadro es el doble del ancho. Si el marco del cuadro tiene $2cm$ de ancho y si el cuadro y su marco tienen una superficie $244cm^2$ mayor que la del cuadro, calcular las dimensiones del cuadro.

16. Hallar un número tal que sustraído en 4 y agregado en 9/4 es igual a 1/3 de sí mismo.

17. Una piscina puede ser llenada por tres cañerías en forma independiente. La primera cañería llena la piscina en $15h$; la segunda en $20h$ y la última en $30h$. ¿ En qué tiempo llenarían la piscina las tres cañerías juntas?

18. Un vendedor de nueces tiene dos clases de fruta; una de 0,90 céntimos el kg y otra de 0,60céntimos el kg. La competencia vende las nueces a 0,72céntimos el kg. ¿En qué proporciones debe mezclar las nueces, de tal forma que pueda competir en el mercado?

19. Un trozo de alambre de 100 pulgadas de largo se corta en dos, y cada pedazo se dobla para que tome la forma de un cuadrado. Si la suma de las áreas formadas es de $397pulg^2$, encontrar la

longitud de cada pedazo del alambre.

20 La empresa **tu casita** construyó una unidad habitacional con 40 departamentos, se conoce que si se fija un alquiler mensual de 120 dólares por departamento, todos serán ocupados, pero por 5 dólares de incremento en el alquiler uno quedará vacante. El alquiler en dólares que deberá fijarse con el objeto de obtener los mismos ingresos (que si se alquilaran a 120 dólares cada departamento), dejando algunos vacíos para mantenimiento.

Capítulo 7

APLICACIÓN DE ECUACIONES

GUÍA PARA MODELAR CON ECUACIONES

1. Identifique la cantidad que el problema le pide hallar. En general, esta cantidad puede ser determinada por una cuidadosa lectura de la pregunta que se plantea al final del problema. Después introduzca notación para la variable (llámela x o alguna otra letra).

2. De nuevo lea cada oración del problema y exprese, en términos de la variable que haya definido en el Paso 1, todas las cantidades mencionadas en el problema. Para organizar esta información, a veces es útil trazar un diagrama o hacer una tabla.

3. Encuentre el dato de importancia decisiva en el problema, que dé una relación entre las expresiones que haya citado en el Paso

2. Formule una ecuación (o modelo) que exprese esta relación.

4. Resuelva la ecuación, verifique su respuesta, y exprésela como una oración que conteste la pregunta planteada en el problema.

Ejercicios Resueltos

1. Escribir en notación matemática todo los problemas en términos de la variable indicada.

   a) La suma de tres enteros consecutivos; n primer entero de los tres.

   Resolución

   1° = n

   2° = n+1

   3° = n +2

$$\begin{aligned} Suma &= n + n + 1 + n + 2 \\ &= 3n + 3 \\ &= 3(n + 1) \end{aligned}$$

   b) El promedio de tres calificaciones de examen si las dos primeras calificaciones son 78 ; 82 y C_3 = tercera calificación de examen.

Resolución

$$\begin{aligned}\overline{PC} &= \frac{78+82+C_3}{3}\\ &= \frac{160+C_3}{3}\end{aligned}$$

c) El área (en m^2) de un rectángulo que mide tres veces más de largo que de ancho; w = ancho del rectángulo (en m).

Resolución

$$\begin{aligned}A_{\square} &= w\cdot 3w\\ &= 3w^2\end{aligned}$$

d) La distancia (en kilómetros) que un auto recorre en 45 minutos; v = rapidez del auto (en km/h).

Resolución

Convertimos de minutos a hora : $45\ \cancel{min}\left(\dfrac{1\ h}{60\ \cancel{min}}\right) = \dfrac{3}{4}\ h$

$$\begin{aligned}d &= v\cdot t\\ &= v\frac{km}{\cancel{h}}\cdot\frac{3}{4}\cancel{h}\\ &= \frac{3v}{4}km\end{aligned}$$

e) La suma de tres enteros consecutivos; n entero intermedio de los tres.

Resolución

$1° = n - 1$

$2° = n \qquad Suma = (n-1) + n + (n+1)$

$3° = n + 1 \qquad\qquad = 3n$

f) El promedio de cuatro calificaciones de preguntas de cada una de las tres primeras calificaciones es 8; q = cuarta calificación de preguntas.

Resolución

$$\begin{aligned}\overline{PC} &= \frac{8+8+8+q}{4}\\ &= \frac{24+q}{4}\end{aligned}$$

g) El interés obtenido después de un año sobre una inversión es $2\frac{1}{2}$ % de interés simple por año; x = número de dólares invertidos.

Resolución

$$\begin{aligned} I &= x \cdot i \cdot t \\ &= x \cdot 2{,}5 \cdot \frac{1}{100} \cdot 12 \\ &= x \cdot 0{,}025 \cdot 12 \\ &= 0{,}3x \end{aligned}$$

h) La renta total pagada por un departamento si la renta es \$ 795 al mes; n = número de meses.

Resolución

$$Renta = 795 \cdot n$$

i) El perímetro (en cm) de un rectángulo que es 5 cm más largo que su ancho; w = ancho del rectángulo (en cm).

Resolución

$$\begin{aligned} Perimetro &= 2 \cdot ancho + 2 \cdot largo \\ &= 2 \cdot w + 2 \cdot (5 + w) \\ &= 2w + 10 + 2w \\ &= 4w + 10 \end{aligned}$$

j) El tiempo (en horas) que tarda en recorrer una distancia determinada a 55 km/h; d = distancia dada (en kilómetros).

Resolución

$$
\begin{aligned}
Tiempo &= \frac{distancia}{velocidad}\\
&= \frac{d\cancel{km}}{55\frac{\cancel{km}}{h}}\\
&= \frac{d}{55}h
\end{aligned}
$$

2. Determine dos números cuya suma sea 15 y la suma de sus cuadrados sea 137.

Resolución

Planteo:

- $x + y = 15 \Longrightarrow y = 15 - x$
- $x^2 + y^2 = 137$

Reemplazando a la segunda ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} x^2 + (15 - x)^2 &= 137 \\ x^2 + 225 - 30x + x^2 &= 137 \\ 2x^2 - 30x + 88 &= 0 \\ x^2 - 15x + 44 &= 0 \\ (x - 11)(x - 4) &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x = 11 \quad \wedge \quad x = 4$$

3. Determine dos enteros impares consecutivos cuyo producto sea 143.

Resolución

Planteo:

$$\boxed{\bullet \ (x)(x+2) = 143}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 143 &= 0 \\ x^2 + 2x + 1 &= 144 \\ (x + 1)^2 &= 144 \\ x + 1 &= 12 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x = 11 \quad \wedge \quad x = 13$$

4 Encuentre dos enteros consecutivos cuyo producto sea 132.

Resolución

Planteo:

$$\boxed{\bullet\ (x)(x+1) = 132}$$

$$\begin{aligned} x^2 + x - 132 &= 0 \\ (x+12)(x-11) &= 0 \\ x = 11 \quad \wedge \quad x &= -12 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x = 11 \quad \wedge \quad x = 12 \qquad \vee \qquad x = -12 \quad \wedge \quad x = -11$$

5 La longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es 13 centímetros. Determine los otros dos lados del triángulo, si su suma es 17 centímetros.

Resolución

Planteo:

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ x + y = 17 \Longrightarrow y = 17 - x \\ \bullet\ x^2 + y^2 = 13^2 \end{array}}$$

Reemplazando a la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} x^2 + (17 - x)^2 &= 169 \\ x^2 + 289 - 34x + x^2 &= 169 \\ 2x^2 - 34x + 120 &= 0 \\ x^2 - 17x + 60 &= 0 \\ (x - 12)(x - 5) &= 0 \\ x = 12 \quad \wedge \quad x = 5 & \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x = 12 \quad \wedge \quad y = 5 \qquad \vee \qquad x = 5 \quad \wedge \quad y = 12$$

6. El perímetro de un rectángulo es de 20 m y su área de 24 m^2. Determine las longitudes de sus lados.

Resolución

Planteo:

- $2x + 2y = 20 \Longrightarrow y = 10 - x$
- $x \cdot y = 24$

Reemplazando en la segunda ecuación se tiene:

$$\begin{aligned} x(10-x) &= 24 \\ 10x - x^2 - 24 &= 0 \\ x^2 - 10x + 24 &= 0 \\ (x-6)(x-4) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = 6 \quad \wedge \quad x = 4$$

$$\therefore \quad x = 6 \quad \wedge \quad y = 4 \qquad \vee \qquad x = 4 \quad \wedge \quad y = 6$$

7. El diámetro de un círculo es 8 cm. ¿En cuánto debe aumentar el radio para que el área aumente $33\pi\ cm^2$?

Resolución

El área del circulo inicial es:

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ A &= \pi(4)^2 \\ A &= 16\pi\ cm^2 \end{aligned}$$

En cuanto debe aumentar el radio para que el área aumente

33π

$$
\begin{aligned}
Area\ aumentada &= A + 33\pi \\
\pi(r+x)^2 &= 16\pi + 33\pi \\
\cancel{\pi}(4+x)^2 &= 49\cancel{\pi} \\
(4+x)^2 &= 49 \\
4+x &= \sqrt{49} \\
x &= 7-4 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

8. Una empresa de taxis se dedica en renta de autos cobra 30 soles al día y 0,15 soles por kilómetro para rentar un auto. Royer renta un auto durante dos días y su cuenta llega a 108 soles. ¿Cuántas kilómetros recorrió?

Resolución

x = número de kilómetros recorridas

$$costo\ del\ recorrido\ +\ costo\ diario\ =\ costo\ total$$

$$
\begin{aligned}
0{,}15x + 2(30) &= 108 \\
0{,}15x &= 108 - 60 \\
0{,}15x &= 48 \\
x &= \frac{48}{0{,}15} \\
x &= 320
\end{aligned}
$$

$\therefore$ Royer manejó 320 kilómetros su auto rentado.

9 María hereda $100,000$ dólares y los invierte en dos bancos de depósito. Uno de los bancos paga 6 % y el otro paga $4\frac{1}{2}$ % de interés simple al año. Si el interés total de María es 5025 dólares al año, ¿cuánto dinero se invierte a cada una de las tasas de interés?

Resolución

x = la cantidad invertida al 6 %

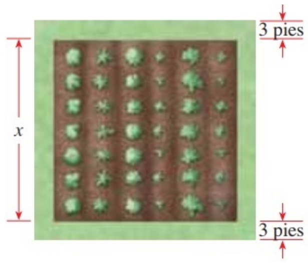
interés al 6 % + interés al $4\frac{1}{2}$ % = interés total

$$\begin{aligned}
6\cdot\frac{1}{100}(x)+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{100}(100000-x) &= 5025\\
\frac{6x}{100}+\frac{9}{200}(100000-x) &= 5025\\
\frac{2\cdot 6x}{2\cdot 100}+\frac{9}{200}(100000-x) &= \frac{200\cdot 5025}{200}\\
\frac{12x}{\cancel{200}}+\frac{9}{\cancel{200}}(100000-x) &= \frac{1005000}{\cancel{200}}\\
12x+9(100000-x) &= 1005000\\
12x+900000-9x &= 1005000\\
3x &= 1005000-900000\\
x &= \frac{105000}{3}\\
x &= 35000
\end{aligned}$$

$\therefore$ María ha invertido $35,000$ dólares al 6% y los restantes $65,000$ dólares al $4\frac{1}{2}$ %.

10 Un jardín cuadrado tiene un andador de 3 metros de ancho alrededor de su borde exterior. Si el área de todo el jardín, incluyendo los andadores, es de 900 m^2, ¿cuáles son las dimensiones del área plantada?

Resolución



$$\begin{aligned} Area\ total &= L^2 \\ 900 &= (x+6)^2 \\ \sqrt{900} &= x+6 \\ 30-6 &= x \\ 24 &= x \end{aligned}$$

$\therefore$ El área plantada del jardín es de unos 24 metros por 24 metros.

11 Un objeto fue disparado verticalmente hacia arriba a una velocidad inicial v_0 m/s alcanzará una altura de h metros después de t segundos, donde h y t están relacionadas por la fórmula

$$h = -16t^2 + v_0 t$$

Suponga que se dispara una bala verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 800 m/s.

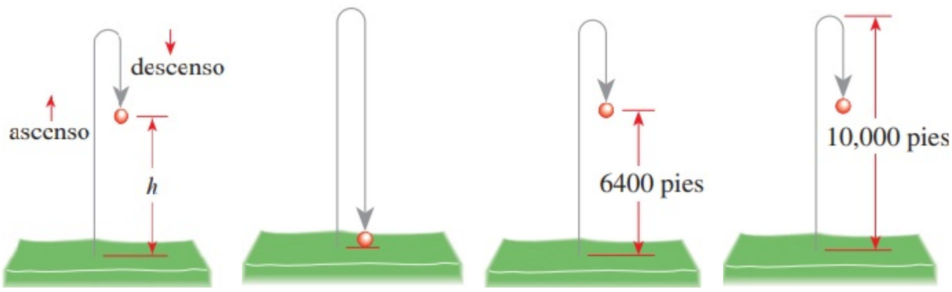
a) ¿Cuándo caerá la bala al nivel del suelo?

b) ¿Cuándo alcanza una altura de 6400 metros?

c) ¿Cuándo alcanza una altura de 10400 metros?

d) ¿Cuál es la altura del punto más alto al que llega la bala?

Resolución



a).

$$\begin{aligned} h &= -16t^2 + v_0 t \\ 0 &= -16t^2 + 800t \\ \cancel{16}t^2 - \cancel{800}t &= 0 \\ t^2 - 50t &= 0 \\ t(t-50) &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad t = 0 \quad \wedge \quad t = 50$$

Esto significa que la bala arranca ($t = 0$) al nivel del suelo y regresa a éste después de $t = 50$ segundos.

b).

$$\begin{aligned}
h &= -16t^2 + v_0 t \\
6400 &= -16t^2 + 800t \\
\cancel{16}t^2 - \cancel{800}t + \cancel{6400} &= 0 \\
t^2 - 50t + 400 &= 0 \\
(t-10)(t-40) &= 0 \\
\therefore \quad t = 10 \quad \wedge \quad t = 40
\end{aligned}$$

La bala llega a 6400 metros después de $t = 10$ s (en su ascenso) y otra vez después de $t = 40$s(en su descenso a tierra).

c).

$$\begin{aligned}
h &= -16t^2 + v_0 t \\
10400 &= -16t^2 + 800t \\
\cancel{16}t^2 - \cancel{800}t + \cancel{10400} &= 0 \\
t^2 - 50t + 650 &= 0
\end{aligned}$$

El discriminante de esta ecuación es $D = (-50)^2 - 4(650) = -100$, que es negativo. Entonces, la ecuación no tiene solución real. La bala nunca llega a una altura de 10400 metros.

d).

$$\begin{aligned} h &= -16t^2 + v_0 t \\ 16t^2 - 800t + h &= 0 \end{aligned}$$

El discriminante de esta ecuación tiene que ser $D \geqslant 0$

$$\begin{aligned} (-800)^2 - 4(16)(h) &\geqslant 0 \\ (-800)(-800) &\geqslant 4(16)h \\ 640000 &\geqslant 64h \\ h &\leqslant 10000 \end{aligned}$$

La máxima altura alcanzada es 10000 metros.

12 Por cada cuatro docenas de manzanas que un comerciante compra, le obsequian dos manzanas. ¿ Cuántos son de obsequio si llevó 4800 manzanas?

Resolución

$\looparrowright$ 4 docenas <> $12 \times 4 + 2 = 50$ manzanas.

En los 4800 que llevo hay:
$\dfrac{4800}{50} = 96$ grupos de 50
entonces habrá:

$2 \times 96 = 192$ manzanas de obsequio.

13 Juan es el doble de rápido que Pedro. Si juntos pueden hacer una obra en 10 días, ¿ Cuánto tiempo le tomará a Juan hacerlo solo?

Resolución

$$\left.\begin{array}{l} Juan\ hace : 2k \\ Pedro\ hace : 1k \end{array}\right\} : 3k\ Juntos\ hacen\ en\ un\ dia$$

$\Longrightarrow$ En 10 días hacen: $30k$

Juan lo haría solo en : $\dfrac{30k}{2k} = 15$ días

14 La mitad de un barril contiene vino y cuesta S/. 800. Si se agregan 50 l de vino de la misma calidad, el nuevo costo es S/. 1000. ¿ Cuál es la capacidad del barril?

Resolución

$$\begin{array}{rcc} Cantidad & & costo \\ \dfrac{barril}{2} & \longrightarrow & s/.\ 800 \\ \dfrac{barril}{2} + 50 & \longrightarrow & s/.\ 1000 \end{array}$$

Por aspa simple:

$$
\begin{aligned}
\frac{barril}{2}(1000) &= 800\left(\frac{barril}{2}+50\right)\\
5\ barril &= 4\ barril + 400\\
barril &= 400\ l
\end{aligned}
$$

15 Un padre deja al morir a cada uno de sus hijos $s/,12500$, pero uno de sus hijos no acepta y la herencia se reparte entre los demás, recibiendo cada uno $s/,15000$. ¿ Cuál es el valor de verdad de las siguientes proposiciones?.

I) El número de hijos es 6

II) El padre dejó a sus hijos $s/,75000$

III) Si los hijos hubieran sido 11 con, las mismas condiciones, cada uno recibiría $s/.\ 7500$.

Resolución

Cada uno recibe adicionalmente $15000 - 12500 = s/.\ 2500$

↬ los hijos que recibieron son: $\dfrac{12500}{2500} = 5$

I) El número de hijos es:

$5 + 1 = 6 \cdots (V)$

II) Herencia:

$12500 \times 6 = s/.\ 75000 \cdots (V)$

III) Si uno no aceptaría entonces c/u recibiría:

$$\frac{75000}{10} = s/.\ 7500 \cdots (V)$$

16 Un comerciante compra un lote de 60 televisores por $s/.$ 27000. Vendió después 3 docenas de ellos ganando $s/.$ 150 en cada uno de ellos. Halle el precio de venta de cada uno de los restantes si quiere obtener un beneficio total de $s/.$ 12600.

Resolución

DATOS:

- $P_{C_T} = s/.\ 27000$
- 60 Tv

$$\Longrightarrow P_{C_U} = \frac{27000}{60} = 450 \ / \ \text{Tv.}$$

Vende:

36 Tv. a $(450 + 150)$ / Tv

$$\Longrightarrow P_{V_1} = 36(600) = 21600$$

Los restantes:

24 Tv a s/. x c/ Tv

$$\Longrightarrow P_{V_2} = 24(x)$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned}
P_{V_T} &= P_{C_T} + G_T \\
P_{V_1} + P_{V_2} &= P_{C_T} + G_T \\
21600 + 24x &= 27000 + 12600 \\
x &= s/.\ 750
\end{aligned}$$

17 Linda compró manzanas a 4 por 3 soles y los vende a 5 por 7 soles. ¿ Cuál es el valor de verdad de las siguientes proposiciones?

I) Con 200 manzanas gana $S/.\ 130$

II) $S/.\ 208$ es la utilidad de 320 manzanas.

III) En una manzana gana $S/.\ 0,70$.

Resolución

Compra:

$$\begin{aligned}
4\ manz &\longrightarrow s/.\ 3 \\
20\ manz &\longrightarrow s/.\ 15
\end{aligned}$$

Vende:

$$\begin{aligned}
5\ manz &\longrightarrow s/.\ 7 \\
20\ manz &\longrightarrow s/.\ 28
\end{aligned}$$

En la compra y venta de 20 manz. gana s/. 13, entonces:

I) 200 manz gana

$13 \times 10 = S/.\ 130 \ldots (V)$

II) 320 manz gana

$13 \times 16 = S/.\ 208 \ldots (V)$

III) En una manzana gana

$\dfrac{13}{20} = S/.\ 0,64 \times (F).$

18 Por una docena de manzanas que compré me obsequiaron 1 manzana. Si he recibido 780 manzanas, entonces son ciertas:

I) Compre 72 decenas.

II) Si cada manzana cuesta s/. 0, 40 me ahorre s/ 24,50.

III) Gasté en total s/. 288.

Resolución

1 doc <> 12 + 1 = 13 manzanas.

$\sharp$ docenas $= \dfrac{780}{60} = 13$

Entonces el $\sharp$ manzanas compradas:

60 x 12 = 720 manzanas

I) $\sharp$ Docenas $= \dfrac{720}{10} = 72 \ldots (V)$

II) En 60 manzana que fueron de regalo ahorré:

$60 \times 0,\ 40 = S/.\ 24 \ldots (F)$

III) Gasté en 720 manzanas:

$$720 \times 0{,}40 = s/.\ 288 \ldots (V)$$

19 Hallar el mayor de dos números sabiendo que su suma es el máximo número de tres cifras diferentes y su diferencia es el máximo número de dos cifras iguales. Dar como respuesta la suma de las cifras de dicho número.

Resolución

Suma = 987

Diferencia = 99

$$\text{Mayor} = \frac{S+D}{2} = \frac{987+99}{2} = 543$$

$$\sum_{cifras} = 5+4+3 = 12$$

20 Un alumno pregunta al profesor la hora y esté le responde:\ Quedan del día 6 horas menos de las transcurridas". Entonces son ciertas:

I) El ángulo que forman las agujas de un reloj es 90º.

II) Hace una hora eran las 2 pm.

III) Dentro de una hora las agujas formarán un ángulo de 120º.

Resolución

$S = 24 \ ; \ D = 6$

$$\text{Horas transcurridas} = \frac{24+6}{2}$$

$$= 15h = 3pm$$

I) A las tres en punto se forma un ángulo recto.$\cdots$ (V).

II) Hace una hora eran las 2 pm $\cdots$ (V).

III) Dentro de una hora las agujas formarán un ángulo de 120º $\cdots$ (V).

21 A un número se le agregó 10, al resultado se le multiplicó por 5 para quitarle enseguida 26, a este resultado se extrae la raíz cuadrada para luego multiplicarlo por 3, obteniendo como resultado final 24. ¿Cuál es el número?

Resolución

Ubicando las operaciones en el orden en que han sido mencionadas tenemos:

$$\square \xrightarrow{+10} \square \xrightarrow{\times 5} \square \xrightarrow{-26} \square \xrightarrow{\sqrt{}} \square \xrightarrow{\times 3} = 24$$

Aplicando el **método del cangrejo**, se tiene:

$$8 \xleftarrow[-10]{} 18 \xleftarrow[\div 5]{} 90 \xleftarrow[+26]{} 64 \xleftarrow[()^2]{} 8 \xleftarrow[\div 3]{} = 24$$

Rta. $\boxed{8}$

22 Tengo tres cajas rojas con cuatro cajas verdes cada una, además que en cada una de las verdes contiene cinco cajas amarillas con seis cajas azules dentro de cada amarilla, ¿ cuántas cajas tengo en total ?

Resolución

$$\begin{array}{rcr} & Cajas & \\ 3\ Rojas & 3 & =3 \\ 4\ Verdes & 4\cdot 3 & =12 \\ 5\ Amarillas & 5\cdot 4\cdot 3 & =60 \\ 6\ Azules & 6\cdot\ 5\cdot 4\cdot 3 & =360 \\ & & Total\ 435 \end{array}$$

$Rta.$ $\boxed{435}$

23 Si necesito reunir la cantidad de $7,50$ soles utilizando únicamente monedas de 1 sol, 50 céntimos y 10 céntimos, y además se requiere que haya al menos una moneda de cada valor, ¿cuál sería la menor cantidad total de monedas que debería juntar?

Resolución

$$7,50 = \quad 6(1,00)+2(0,50)+5(0,10)$$

$$7,50 = \quad 6,00+1,00+0,50$$

$\therefore$ como mínimo son: $6+2+5=13$

$$Rta.\ \boxed{13}$$

24 Mary tiene $\frac{3}{4}$ de dinero que tiene Roy. Si Roy cediera el $x\,\%$ de su dinero a Mary, le quedaría $\frac{3}{4}$ del dinero que entonces tendría Mary. ¿ Cuál es el valor de x ?

Resolución

$$\begin{array}{lcl} \textit{Inicio} & & \textit{Final} \\ M = \frac{3}{4}R & \longrightarrow & R' = \frac{3}{4}M' \end{array}$$

$$\longrightarrow \quad R - x\,\%R = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}R + x\,\%R\right)$$

$$\begin{aligned} \cancel{R}(1 - x\,\%) &= \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4} + x\,\%\right)\cancel{R} \\ 1 - x\,\% &= \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4} + x\,\%\right) \\ \frac{16}{16} - \frac{9}{16} &= \frac{3}{4}x\,\% + x\,\% \\ \frac{\cancel{7}}{\cancel{16}} &= \frac{\cancel{7}}{\cancel{4}}x\,\% \\ \frac{1}{4} &= x\,\% \\ 25\,\% &= x\,\% \end{aligned}$$

$$Rta.\ \boxed{25\,\%}$$

25 Pepito, Jaimito y César son 3 niños que juntos tienen más de

8 soles. Si Jaimito tuviera 4 soles más, entonces tendría más dinero de lo que tienen Pepito y César juntos. Jaimito tiene menos soles que César, y éste tiene menos de 5 soles. Si los 3 niños tienen números enteros de soles ¿ Cuántos soles tiene Jaimito ?

Resolución

- $P + J + C > 8$
- $J < C < 5$

  $3 < 4 < 5$
- $J + 4 > P + C$

  $3 + 4 > 2 + 4$

$\therefore$ Jaimito tiene $s/.\ 3{,}00$

$Rta.$ $\boxed{s/.\ 3{,}00}$

26 Una pareja de esposos disponen de $s/.\ 350$ para asistir al teatro con todos sus hijos. Si compran entradas de $s/.\ 45$, le sobraría; y si compran entradas de $s/.\ 65$, le faltaría para más de uno. ¿ Cuántos hijos tiene dicha pareja?

Resolución

- $45x < 350$

  $x < 7,\widehat{7}..........(I)$

- $65x > 350 + 65$

  $x > 6,38......(II)$

De las ecuaciones (II) y (I) se tiene:

$$6,38 < x < 7,\widehat{7}$$

Son personas entonces $x = 7$

Rta. $\boxed{\text{Tiene 5 hijos.}}$

27 En un colegio existen 1000 alumnos que son atendidos por 19 personas entre profesores y profesoras. Cada profesor atiende 30 alumnos más que cada profesora. Únicamente, se decidió aumentar en 8 alumnos más la clase de cada profesora, reduciéndose así las de los profesores. ¿ A cuántos alumnos atiende ahora cada profesor ?

Resolución

Inicio:

Profesor: V

Profesora: M

- $M + V = 19 \longrightarrow \ M = 19 - V$
- $xM + (x + 30)V = 1000$

$x(19 - V) + (x + 30)V = 1000$

$$19x - \cancel{xV} + \cancel{xV} + 30V = 1000$$

$$\underset{\downarrow\atop 40}{x} = \frac{1000 - 30\,\underset{8}{V}}{19}$$

Final:

$$(x+8)M + RV = 1000$$

$$(x+8)(19-V) + RV = 1000$$

Como $x = 40$ y $V = 8$ se tiene:

$$48(11) + 8R = 1000$$

$$8R = 1000 - 528$$

$$R = \frac{472}{8}$$

$$R = 59$$

Rta. $\boxed{59}$

28 En una reunión, si los varones sacaran a bailar a toda las mujeres, 10 % de los varones se quedaría sin bailar. Si la cantidad de varones disminuye en 19 % y las mujeres aumentaran en 20 % para nuevamente salir todos a bailar, ¿ qué tanto por ciento del numero de mujeres se quedará sin bailar?

Resolución

$$\begin{aligned} 100\,\%V - M &= 10\,\%V \\ 90\,\%V &= M \\ V &= \frac{10M}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 100\,\%V - M &= 10\,\%V \\ 90\,\%V &= M \\ V &= \frac{10M}{9} \end{aligned}$$

$Rta.$ $\boxed{25\,\%}$

Ejercicios Propuestos

1. Escribir en notación matemática todo los problemas en términos de la variable indicada.

   a) La concentración (en oz/gal) de sal en una mezcla de 3 galones de salmuera que contiene 25 onzas de sal a la que se ha agregado agua pura; x = volumen de agua pura agregada (en galones).

   b) El valor (en céntimos) del cambio en un monedero que contiene el doble de monedas de 5 céntimos que de céntimo, monedas de 10 céntimos más que de 5 céntimos, y tantas monedas de 25 céntimos que de monedas de 5 combinadas; p = número de monedas de un céntimo cuatro.

Resolución

2. [**PROBLEMA DE CAÍDA DE CUERPOS**] Supongamos que un cuerpo se deja caer desde una altura h_0 sobre

el suelo. Entonces su altura después de t segundos está dada por $h = -16t^2 + h_0$, donde h se mide en metros. Use esta información para resolver el problema.

a) Si una pelota se deja caer desde 288 m sobre el suelo, ¿cuánto tarda en llegar al nivel del suelo?

b) Una pelota se deja caer desde lo alto de una casa de 96 $m$de alto.

- ¿Cuánto tardará la pelota en caer la mitad de la distancia al nivel del suelo?
- ¿Cuánto tardará en caer al suelo?

Resolución

3 **[PROBLEMA DE CAÍDA DE CUERPOS]** Use Ud. La fórmula $h = -16t^2 + v_0t$ que se estudia en el ejemplo anterior.

a) Una pelota de Futsal se lanza directamente hacia arriba a una velocidad inicial de $v_0 = 40\ m/s$.

- ¿Cuándo llega la pelota a una altura de 24 m?
- ¿Cuándo llega a una altura de 48 m?
- ¿Cuál es la altura máxima (h_{max}) alcanzada por la pelota?
- ¿Cuándo alcanza la pelota el punto más alto de su trayectoria?
- ¿Cuándo cae al suelo?

b) ¿Con qué rapidez debe ser lanzada hacia arriba una pelota de Futsal para que alcance una altura máxima de 100 m? [Sugerencia: Use el discriminante de la ecuación $16t^2 - v_0 t + h = 0$].

Resolución

4 **[ECUACIÓN DE LENTES]** Si F es la longitud focal de un lente convexo y un objeto se coloca a una distancia x desde el lente, entonces su imagen estará a una distancia "y" del lente,

donde F, x y y están relacionadas por la ecuación de lentes

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Suponga que un lente tiene una longitud focal de 4,8 cm y que la imagen de un objeto está 4 cm más cerca del lente que el objeto mismo. ¿A qué distancia del lente está el objeto?

Resolución

5. **[POBLACIÓN DE PECES]** La población de peces de lago Titicaca sube y baja de acuerdo con la fórmula $P = 1000(30 + 17t - t^2)$. Aquí P es el número de peces en el tiempo t, donde t se mide en años desde el 1 de enero de 2021, cuando la población de peces se estimó por primera vez.

   a) ¿En qué fecha la población de peces será otra vez la misma de como era el 1 de enero de 2021?

   b) ¿Antes de qué fecha habrán muerto todos los peces del lago Titicaca?

Resolución

6 [**POBLACIÓN DE PECES**] Un gran estanque en la localidad de Chupa es abastecido de peces. La población P de peces está modelada con la fórmula $P = 3t + 10\sqrt{t} + 140$, donde t es el número de días desde que los peces fueron introducidos en el estanque. ¿Cuántos días tardará la población de peces en llegar a 500?

Resolución

7 **[UTILIDADES]** Un fabricante de hornos encuentra que la utilidad P (en dólares), generada por producir x hornos de pollería por semana, está dada por la fórmula $P = \dfrac{1}{10}x(300 - x)$ siempre que $0 \leqslant x \leqslant 200$. ¿Cuántos hornos deben ser fabricados en una semana determinada para generar una utilidad de

$ 1250?

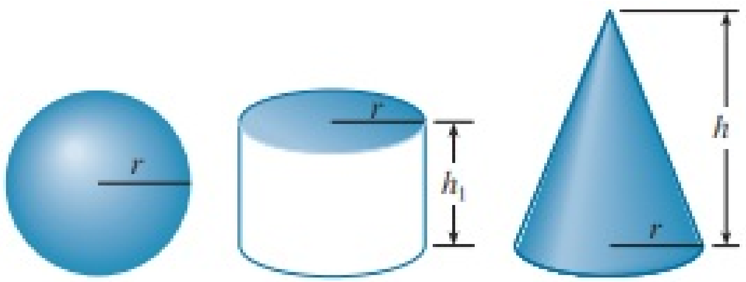
Resolución

8 **[VOLUMEN DE SÓLIDOS]** La esfera, el cilindro y el cono, como se muestra en la figura, tienen todos ellos la misma medida, de radio (r) y el mismo volumen (V).

a) Use las fórmulas conocidas del volumen, para demostrar que

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^2 h_1 \quad y \quad \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

b) De estas dos ecuaciones anteriores despeje ud. h_1 y h.



Resolución

Capítulo 8

DESIGUALDADES

CONJUNTOS E INTERVALOS

Un conjunto es una colección de objetos, y estos objetos se llaman elementos del conjunto. Si A es un conjunto, la notación $a \in A$ significa que a es un elemento de A, y $b \notin A$ quiere decir que b no es un elemento de A. Por ejemplo, si $\mathbb{Z}$ representa el conjunto de enteros, entonces $-2 \in \mathbb{Z}$ pero $\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$.

EJEMPLO

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2. $A = \{x/x \ \ \textit{es un entero y}\ 0 < x < 7\}$

Si A y B son conjuntos, entonces su unión $A \cup B$ es el conjunto formado por todos los elementos que están en A o B (o en ambos). La intersección de A y B es el conjunto $A \cap B$ formado por todos los elementos que están en A y B. En otras palabras, $A \cap B$ es la parte común de A y B. El conjunto vacío, denotado por $\varnothing$, es el conjunto que no contiene elementos.

Ejercicios Resueltos

1. Ponga el símbolo correcto ($<$, $>$, $=$) en el espacio.

   a) $-3 \ \square \ -4$

   b) $\pi \ \square \ 3{\cdot}13$

   c) $0.25 \ \square \ \dfrac{1}{4}$

   d) $3{,}333 \ \square \ 3{,}3\widehat{3}$

   e) $\dfrac{3}{7} \ \square \ 0.46$

   f) $|-3| \ \square \ |3|$

   g) $1.41 \ \square \ \sqrt{2}$

2. Escriba cada enunciado en términos de desigualdades.

   a) z es positivo

   b) w es menor a 5

   c) n es mayor o igual a 2π

   d) x es menor a $\dfrac{1}{2}$ y mayor a -3

   e) La distancia de R a 4 es como máximo 9

   f) w es negativa

   g) z es mayor a 5

   h) y es como máximo 6

   i) m es positiva y menor o igual a 12

j) t está al menos 5 unidades de π

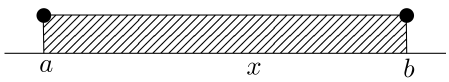
8.1. Intervalos

Los intervalos son subconjuntos de los números reales que sirven para expresar la solución de las inecuaciones, estos intervalos se representan gráficamente en la recta numérica real.

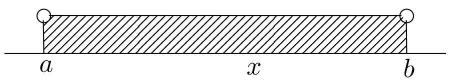
$$\langle a, b\rangle = \{x/a < x < b\} \qquad [a, b] = \{x/a \leqslant x \leqslant b\}$$

Consideramos los siguientes tipos de intervalos:

1. **Intervalo Cerrado** $([a, b] \Leftrightarrow a \leqslant x \leqslant b)$

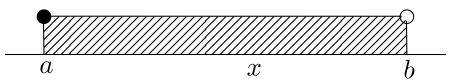


2. **Intervalo Abierto** $(\langle a, b\rangle \Leftrightarrow a < x < b)$

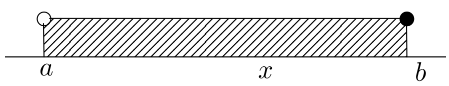


3. **Intervalo Semi abiertos** $(\langle a, b\rangle \Leftrightarrow a < x < b)$

   a) Cerrado en a y abierto en b: $([a, b\rangle \Leftrightarrow a \leqslant x < b)$



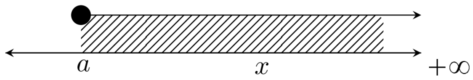
   b) Abierto en a y cerrado en b: $(\langle a, b] \Leftrightarrow a < x \leqslant b)$



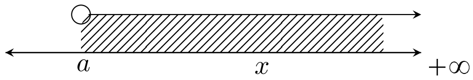
;

4. Intervalo Infinitos

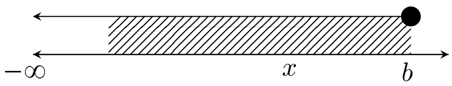
a) $[a, +\infty\rangle \Leftrightarrow x \geqslant a$



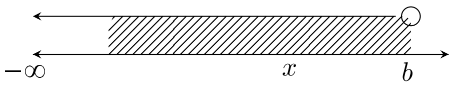
b) $\langle a, +\infty\rangle \Leftrightarrow x > a$



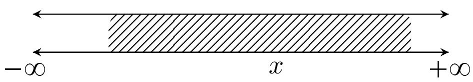
c) $\langle -\infty, b] \Leftrightarrow x \leqslant b$



d) $\langle -\infty, b\rangle \Leftrightarrow x < b$



e) $\langle -\infty, +\infty\rangle \Leftrightarrow -\infty < x < +\infty$



Ejercicios Resueltos

1 Exprese el intervalo en términos de desigualdades y, a continuación,grafique el intervalo.

a) $\langle -4, 0\rangle$

b) $[-5, -4]$

c) $[3, 7\rangle$

d) $\left\langle -\frac{1}{2}, 2 \right]$

e) $\langle -\infty, 4]$

f) $[-3, +\infty\rangle$

2. Exprese la desigualdad en notación de intervalos y, a continuación, grafique el intervalo correspondiente.

a) $x < 4$

b) $x > 6$

c) $-2 < x < \frac{1}{2}$

d) $x \leqslant 9$

e) $5 < x \leqslant 8$

3. Grafique el conjunto.

a) $[2, 3\rangle \cup [1, 4]$

b) $\left\langle 1, \frac{9}{2} \right] \cap \langle 0, 8\rangle$

c) $[-2, 4] \cap \langle 3, 7\rangle$

d) $\langle -1, 2\rangle \cup [0, 5]$

e) $\left\langle -\frac{2}{3}, 4 \right] \cap \langle -\infty, -1]$

f) $[2, 8] \cup \left\langle \frac{4}{3}, +\infty \right\rangle$

8.2. Inecuaciones lineales de una variable

Definición

La solución de una desigualdad en una variable es el conjunto de todos los valores de la variable, para los cuales la desigualdad es una proposición verdadera.

Nota:

- Cuando el mismo número real se suma o se resta a ambos lados de una desigualdad, el sentido de la desigualdad no se altera.
- El sentido de la desigualdad se preserva si ambos lados se multiplican (o dividen) por el mismo número positivo y se invierte cuando se multiplican (o dividen) por el mismo número negativo.

Ejercicios Propuestos

1. Resuelva las siguientes desigualdades:

   a) $2x + 1 > x + 5$

   b) $3x \leqslant 4 - x$

   c) $2x - 6x + 4 < x + 8$

   d) $4x - 10 \geqslant 12x - 4$

   e) $2u - 11 \leqslant 5u + 6$

   f) $5x + 7 > 31 - 3x$

   g) $3(2x - 1) > 4 + 5(x - 1)$

2. La familia Verdana tiene una huerta con 90 plantas de tomates. El número de plantas de cada fila excede en 3 al doble del

número de filas. Determinar el número de filas y el número de plantas por fila.

3. Se debe preparar un terreno cuadrado para sembrarlo y cercarlo con alambre. Si el costo por preparar el terreno es de $ 0.5 dólares por metro cuadrado, y la cerca cuesta $ 1 dólar el metro lineal. Determinar las dimensiones del terreno si el costo por prepararlo y cercarlo es de $ 120 dólares.

4. Hay que repartir $ 60.000 entre cierto número de amigos, presentes en una reunión, en partes iguales. Alguien nota que si hubieran dos amigos menos, a cada uno le corresponder´?a $ 2.500 más. Cuántos son los amigos presentes y cuánto le corresponde a cada uno? Soluci´on:

5. Dos trabajadores A y B realizan juntos una tarea en 10 días. Trabajando por separado, el trabajador A tardaría 5 días más que B. Determinar el número de días que tardaría en realizar la tarea cada uno de ellos trabajando por separado. Soluci´on:

6. La corriente de un río tiene una velocidad de 3km/h. Un bote recorre 40km contra la corriente y 40km con la corriente en un total de 14 horas. Determinar la velocidad del bote en aguas tranquilas.

7. Un comerciante rehúsa vender en 15000 pesos un cierto número de pacas de algodón. Dos meses más tarde, cuando el precio ha subido 5 pesos por paca, las vende en 15190 pesos. Si en el curso de los dos meses se destruyeron dos pacas, encontrar el precio por paca de la primera oferta y el número original de ellas.

8. Un terreno deportivo tiene forma rectangular, de tal manera que la medida de su ancho es a cm, y la medida de su largo es el triple de la medida de su ancho. El terreno se encuentra rodeado de una pista cuyo borde exterior también es rectangular, de lados paralelos a los del terreno y separados del terreno a la misma distancia. Determinar el ancho de la pista en términos de la medida del ancho del terreno, para que el área de la pista y la del terreno sean iguales.

9. Hallar tres números reales, sabiendo que el segundo es mayor que el primero en la misma cantidad que el tercero es mayor que el segundo, que el producto de los dos más peque?nos es 85 y que el producto de los dos mayores es 115.

10. Dos ciclistas A y B parten de un punto P al mismo tiempo y en direcciones que forman un ángulo recto entre sí. El ciclista

B se desplaza a 7 km/h más rápido que A. Después de 3 horas se encuentran a 39km de distancia uno del otro. Determinar la velocidad de cada ciclista.

Inecuaciones cuadráticas

Definición

Una desigualdad cuadrática de una variable, tal como x, es una desigualdad que tiene términos proporcionales a x y a x^2 y términos constantes. Las formas estándares de una desigualdad cuadrática son:

$ax^2 + bx + c > 0 \qquad$ (o bien < 0) o bien

$ax^2 + bx + c \geqslant 0 \qquad$ (o bien $\leqslant 0$)

en donde a, b y c son constantes determinadas ($a \neq 0$).

Nota (El método de solución de las desigualdades cuadráticas):

• Escribir la desigualdad en la forma estándar.

• Reemplazar el signo de desigualdad por un signo =y resolver la ecuación cuadrática resultante. Las raíces dividen la recta numérica en intervalos.

• En cada intervalo elegir un punto y probar la desigualdad dada en ese punto. Si es verdadera (falsa) en ese punto, entonces es verdadera (falsa) en todos los puntos de ese intervalo.

• Para una desigualdad estricta, en el conjunto solución no se incluyen los puntos extremos de los intervalos. Para una desigualdad no estricta sí se incluyen esos puntos extremos.

Ejercicios

1. Resuelva las siguientes desigualdades:

    •

8.3. Inecuaciones Fraccionarios

Una inecuación fraccionaria en una incógnita es de la forma.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \qquad o \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \qquad Q(x) \neq 0$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios diferentes de cero.

Para resolver una inecuación fraccionaria debe tenerse en cuenta que las inecuaciones dadas anteriormente es equivalente a las inecuaciones

$$P(x) \cdot Q(x) > 0 \qquad o \qquad P(x) \cdot Q(x) < 0 \quad y \quad Q(x) \neq 0$$

♠ Si $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Longrightarrow \dfrac{P(x) \cdot Q^2(x)}{Q(x)} > 0 \cdot Q^2(x) \Longrightarrow P(x) \cdot Q(x) > 0$

♠ Si $\dfrac{P(x)}{Q(x)} < 0 \implies \dfrac{P(x)\cdot Q^2(x)}{Q(x)} < 0\cdot Q^2(x) \implies P(x)\cdot Q(x) < 0$

Ejercicios Propuestos

1 Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{3}{x-5} \leqslant \dfrac{1}{2-x}$ $\quad$ *Rta.* $\langle -\infty, 2\rangle \cup \left[\dfrac{11}{4}, 5\right\rangle$

b) $\dfrac{x+1}{2-x} \geqslant \dfrac{x}{3+x}$ $\quad$ *Rta.* $\langle -3, 2\rangle$

c) $\dfrac{3x-2}{x+1} > -4$ $\quad$ *Rta.*$(-\infty, -1) \cup \left\langle \dfrac{-2}{7}, +\infty\right\rangle$

d) $\dfrac{1}{3x-7} \geqslant \dfrac{4}{3-2x}$ $\quad$ *Rta.* $\langle \frac{3}{2}, \frac{31}{14}] \cup \langle \frac{7}{3}, +\infty\rangle$

e) $\dfrac{x+2}{x-2} \geqslant \dfrac{x^2+2}{x^2}$ $\quad$ *Rta.* $\langle 2, +\infty\rangle$

f) $\dfrac{x-2}{x+2} \geqslant \dfrac{x}{x-2}$ $\quad$ *Rta.* $\langle -\infty, -2\rangle \cup [\frac{2}{3}, 2\rangle$

g) $\dfrac{x^3-4}{x^2+2} < \dfrac{x^3-2}{x^2+1}$ $\quad$ *Rta.* $\langle -2, +\infty\rangle$

h) $\dfrac{x-1}{x} \leqslant \dfrac{2x}{x+1} - \dfrac{x}{x-1}$ $\quad$ *Rta.* $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 0, 1\rangle$

i) $\dfrac{-x^3+x^2+22x-40}{x(x+7)} \geqslant 0$ *Rta.* $\langle -\infty, -7\rangle \cup [-5, 0\rangle \cup [2, 4]$

8.4. Inecuaciones Polinómicas

Las inecuaciones polinómicas tiene la forma:

$$P(x):\quad a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n > 0$$

$$Q(x): \quad a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n < 0$$

Y son llamados también inecuaciones de orden superior.

Existen tres casos para resolver inecuaciones polinómicas y son los siguientes:

CASO I:

El polinomio $P(x)$ tiene raíces reales de multiplicidad simple (es decir son números reales y diferentes).

$$p(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n)$$

Donde: $r_1 < r_2 < r_3 < \ldots < r_n$ los pasos a seguir son los siguientes:

1. Se hallan los valores críticos resolviendo el polinomio $p(x) = 0$.
2. Se ubica los valores críticos sobre una recta real.
3. Se anota con signos alternados $(+), (-), (+), (-) \ldots$ empesando de derecha a izquierda.
4. El conjunto solución lo conforman la unión de los intervalos con signo positivo si $p(x) > 0$, o la unión de intervalos con signos negativos si $p(x) < 0$.

CASO II:

Si alguna de las raíces del polinomio $p(x) = 0$ son reales de multiplicidad de orden mayor que uno se tiene:

1. Cuando una de las raíces del polinomio $p(x) = 0$ es **PAR** , en este caso a la raíz no se considera para la determinación de los intervalos.

2. Cuando una de las raíces del polinomio $p(x) = 0$ es **IMPAR**, en este caso solo se considera una raíz para la determinación de los intervalos y para dar la solución.

CASO III:

Cuando una de las raíces del polinomio $p(x) = 0$ no son reales, en este caso no se considera para la determinación de los intervalos.

Ejercicios Resueltos

1 Sea $M = \dfrac{x^4 + 9}{10x}$ y $x > 0$. Halle el mínimo valor entero de M.

Solución

Descomponemos el valor de M:

$$M = \frac{x^4}{10x} + \frac{1}{10x} + \frac{4}{10x} + \frac{4}{10x}$$

Por la desigualdad de medias:

$$\begin{aligned}
\frac{M}{4} &\geqslant \sqrt[4]{\frac{x^4}{10x}\frac{1}{10x}\frac{4}{10x}\frac{4}{10x}}\\
\frac{M}{4} &\geqslant \sqrt[4]{\frac{\cancel{x^4}}{10\cancel{x}}\frac{1}{10\cancel{x}}\frac{4}{10\cancel{x}}\frac{4}{10\cancel{x}}}\\
\frac{M}{4} &\geqslant \sqrt[4]{\frac{16}{10^4}}\\
M &\geqslant 4\left(\frac{2}{10}\right)\\
M &\geqslant 0{,}8
\end{aligned}$$

$\therefore \quad M_{min} = 1$

2. Si se lanza una pelota hacia arriba, el siguiente polinomio modela su altura en el instante t.

$$H(t) = 10 + 4t - t^2$$

Halle la máxima altura que logra alcanzar.

Resolución

Derivando

$$H'(t) = 4 - 2t$$

Igualamos a cero para obtener el tiempo donde se tiene la altura máxima.

$$\begin{aligned} 4-2t &= 0 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

Reemplazando

$H(2) = 10 + 4(2) - (2)^2 = 14$

3. Halle el conjunto solución de:

$$\frac{(x-7)^4(x-6)^7}{(x-5)^6} < 0$$

Resolución

Eliminamos las expresiones positivas

$$\frac{\cancel{(x-7)^4}(x-6)^7}{\cancel{(x-5)^6}} < 0$$

$$x-6<0 \quad \wedge \quad x \neq \{1,7\}$$

$$x<6 \quad \wedge \quad x \neq \{1,7\}$$

$\therefore \quad x \in \langle -\infty, 6\rangle - \{1\}$

Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes inecuaciones polinomicas:

1. $x^4 - 2x^2 - 8 < 0$ $\qquad$ *Rta.* $\langle -2, 2\rangle$

2. $(x^2+2x)(x^2-1)-24>0$ $\qquad$ *Rta.* $\langle -\infty,-3\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle$

3. $x^4+2x^3-x^2+4x-6<0$ $\qquad$ *Rta.* $\langle -3,1\rangle$

4. $x^5+3x^4-5x^3-15x^2+4x+12>0$ $\qquad$ *Rta.* $\langle -3,-2\rangle \cup \langle -1,1\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle$

5. $x^5-6x^4-x^3+29x^2+8x-15<0$ *Rta.* $\left\langle -\infty,\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\rangle \cup \left\langle -1,\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\rangle \cup \langle 3,5\rangle$

6. $\dfrac{x+4}{x^2+4x+4} \leqslant \dfrac{x-2}{x^2+4}$ $\qquad$ *Rta.* $\{\}$

7. $\dfrac{x}{x^2+4} \leqslant -\dfrac{x-3}{x^2+x+4}$ $\qquad$ *Rta.* $\varnothing$

8. $(x-2)(x-4)(x-1)<(x-2)(x+2)(x+7)$ *Rta.* $\left\langle -\infty,-\dfrac{5}{7}\right\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle$

9. $x^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)x<6$

10. $\dfrac{(x^2-x-6)^3(2-x)^5(3+x)^2}{(2x+1)(x^3-8)(x^2-4x)} \leqslant 0$

11. $\dfrac{x^4-2x^3-x^2-4x-6}{x^3-4x^2+x-4} \geqslant 0$

12. $\dfrac{x}{x-a}-\dfrac{2}{x-a}<\dfrac{8a^2}{x^2-a^2}$, $\qquad a>0$

13. $x^6-2x^5-4x^4+14x^3-33x^2+60x-35 \leqslant 0$

14. $x^7-2x^6-10x^5+20x^4+5x^3-7x^2+7x-24 \leqslant 0$

15 Hallar la inecuación entera de coeficientes racionales, de grado mínimo, cuya solución es: $\langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -2, 2\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$

16 Hallar la inecuación mas simple cuyo conjunto solución es: $\langle -\infty, -3\rangle \cup [-1, 1\rangle \cup [4, +\infty\rangle$

17 Construir una inecuación racional cuyo conjunto solución sea $\langle -\infty, -2\rangle \cup [-1, 3] \cup \langle 4, +\infty\rangle$

8.5. Inecuaciones Exponenciales

Las inecuaciones exponenciales en una incógnita son de la forma:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad \vee \quad a^{f(x)} < a^{g(x)} \quad , \quad a \in I\!R^{+}$$

Donde $f(x)$ y $g(x)$ son expresiones en x.

Para resolver estas inecuaciones se consideran dos casos:

CASO I:

Si $a > 1$ entonces las expresiones de la inecuación dada son desiguales en el mismo sentido.

$$\mathbf{Si} \quad \mathbf{a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)}$$

$$\mathbf{Si} \quad \mathbf{a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)}$$

CASO II:

Si $0 < a < 1$ entonces las expresiones de la inecuación dada son desiguales en sentido contrario.

$$\textbf{Si} \quad \mathbf{a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)}$$

$$\textbf{Si} \quad \mathbf{a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)}$$

Ejercicios Resueltos

1. Resolver la inecuación: $\sqrt[3]{(0{,}00032)^{5x-2}} > \sqrt{(0{,}2)^{\frac{2x+3}{2}}}$

Resolución

$$\sqrt[3]{\left(\frac{32}{100000}\right)^{5x-2}} > \sqrt{(0{,}2)^{\frac{2x+3}{2}}}$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2}{10}\right)^{5(5x-2)}} > (0{,}2)^{\dfrac{2x+3}{2(2)}}$$

$$(0{,}2)^{\dfrac{25x-10}{3}} > (0{,}2)^{\dfrac{2x+3}{4}}$$

$$(25x-10)4 < (2x+3)3$$

$$100x - 40 < 6x + 9$$

$$x < 49/94$$

2 Resolver la inecuación: $\left[(0{,}2)^{(x+1)(x-2)}\right]^{\frac{1}{x-3}} > \dfrac{(0{,}0128)^{3x-1}}{8^{3x-1}}$

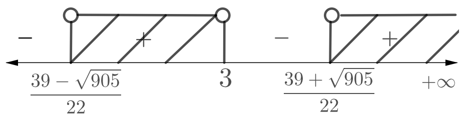
Resolución

$$(0{,}2)^{\frac{(x+1)(x-2)}{x-3}} > \left(\frac{0{,}0128}{8}\right)^{3x-1}$$
$$(0{,}2)^{\frac{(x+1)(x-2)}{x-3}} > (0{,}0016)^{3x-1}$$
$$(0{,}2)^{\frac{(x+1)(x-2)}{x-3}} > \left(\frac{2}{10}\right)^{4(3x-1)}$$
$$(0{,}2)^{\frac{(x+1)(x-2)}{x-3}} > (0{,}2)^{12x-4}$$

Como $0 < a < 1$ representa el segundo caso de inecuaciones exponenciales:

$$\frac{(x+1)(x-2)}{x-3} < 12x-4$$
$$\frac{(x+1)(x-2)-(12x-4)(x-3)}{x-3} < 0$$
$$\frac{x^2-x-2-12x^2+36x+4x-12}{x-3} < 0$$
$$\frac{11x^2-39x+14}{x-3} > 0$$
$$(11x^2-39x+14)(x-3) > 0, \quad x \neq 3$$

Puntos críticos: $x = \dfrac{39 \pm \sqrt{905}}{22}$, $x \neq 3$



$$\therefore C.S. = \left\langle \frac{39-\sqrt{905}}{22}, 3 \right\rangle \cup \left\langle \frac{39+\sqrt{905}}{22}, \infty \right\rangle$$

Ejercicios Propuestos

Resolver las siguientes inecuaciones exponenciales:

1. $9^{(x-1)^2} > \dfrac{9^{3-x}}{9^{x+3}\cdot 3}$

2. $\dfrac{(729)^{x^2}(243)^x}{(81)^{2x}} > \dfrac{(243)^6(27)^{5x-}}{(27)^{4x}}$

3. $\sqrt{81^{x+15}} < \sqrt{243^{x-10}}$

4. $(0{,}5)^{\frac{4x-3}{2}} > (0{,}0625)^{\frac{3x-2}{5}}$

5. $\sqrt[3]{(0{,}00032)^{5x-2}} > \sqrt{(0{,}2)^{\frac{3x-15}{4}}}$

6. $(0{,}216)^{\frac{5x+3}{4}} > \sqrt[5]{(0{,}36)^{\frac{2x+1}{6}}}$

7. $\sqrt[x+3]{\left(\dfrac{1}{25}\right)^{x-3}} \leqslant \sqrt[x+2]{(0{,}2)^{2x-2}}$

8. $\dfrac{3^{2x-3}\cdot 3^{4-x}}{3^{5x-1}} < \left(3^{2x+1}\right)^{x-2}$

Capítulo 9

RELACIONES Y FUNCIONES

9.1. Relaciones

Definición.-

Una **relación** implica una conexión o correspondencia. En el contexto de una relación, se refiere a la correspondencia que existe entre dos conjuntos, donde cada elemento del primer conjunto tiene al menos un elemento correspondiente en el segundo conjunto.

Cuando a cada elemento de un conjunto le corresponde solo uno del otro, se habla de **función**. Esto quiere decir que las funciones matemáticas siempre son, a su vez, relaciones matemáticas, pero que las relaciones no siempre son funciones.

9.1.1. Par Ordenado

Llamaremos así a la expresión matemática (a, b), donde a es la primera componente y b es la segunda componente.

Ejemplo: Son pares ordenados $(-2, 7)$, $(3, 10)$, $(\pi, \sqrt{2})$

Igualdad de pares ordenados

Definición

Dos pares ordenados son iguales si y solo si son iguales sus primeras y segundas componentes, respectivamente. La igualdad de pares (a, b) y (c, d) se define como:

$$\boxed{(a, b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \quad \wedge \quad d = b}$$

Ejemplo: Si $(2x - y, x + y + 3) = (x + y + 1, 2x + y)$, hallar $x + y$.

Resolución

Mediante igualdades de primeras y segundas componentes tenemos:

$$\begin{aligned} 2x - y = x + y + 1 \quad &\wedge \quad x + y + 3 = 2x + y \\ 2x - x = y + y + 1 \quad &\wedge \quad -y + y + 3 = 2x - x \\ x = 2y + 1 \quad &\wedge \quad x = 3 \end{aligned}$$

Sabemos que $x = 3$ entonces reemplazando en $x = 2y+1$ tenemos que $y = 1$.

$\therefore x + y = 3 + 1 = 4$

9.1.2. Producto Cartesiano

Definición

Dados dos conjuntos A y B no vacíos, se define el producto cartesiano de A por B representado por $A \times B$, como el conjunto de pares ordenados (a, b) de tal manera que la primera componente $a \in A$ y la segunda componente $b \in B$. Es decir:

$$\boxed{A \times B \quad = \quad \{(a, b)/a \in A \quad \wedge \quad b \in B\}}$$

Ejemplo: Si $A = \{1, 2, 3\}$

Resolución

$A \times B = \{(1, 4), (1, 9), (2, 4), (2, 9), (3, 4), (3, 9)\}$

Representación Geométrica del Producto Cartesiano

Para graficar el producto cartesiano $A \times B$ a cada uno de los conjuntos A y B lo representamos sobre dos rectas perpendiculares, al conjunto A en el eje horizontal y al conjunto B en el eje vertical, la intersección de ambos conjuntos serán los pares ordenados de $A \times B$.

Ejemplo: Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{5, 7, 9\}$.

Entonces:

$A{\times}B = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (1, 7), (2, 7), (3, 7), (1, 9), (2, 9), (3, 9)\}$

El conjunto A está en el eje horizontal y el
conjunto B está en el eje vertical.

Graficamente:

Observacion: Si $A = B = \mathbb{R}$ entonces este producto representa el plano cartesiano. El producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, se denota $\mathbb{R}^2$, donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales, se define como:
$\mathbb{R}^2 \quad = \quad \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in X \quad \wedge \quad y \in Y\right\}$

9.1.3. Relaciones Binarias

Definición 4.3 Se llama relación binaria entre los elementos de un conjunto A y los elementos de un conjunto B a todo subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$ esto es, una relación binaria R.

$$\boxed{R \text{ es una relación de } A \text{ en } B \Leftrightarrow R \subset A \times B}$$

donde:

- El conjunto A es el conjunto de partida.
- El conjunto B es el conjunto de llegada.

Ejemplo: Si $A = \{2, 8\}$ y $B = \{1, 9\}$.

Entonces:

$A \times B = \{(2,1),(2,9),(8,1),(8,9)\}$

Los siguientes conjuntos de pares ordenados son relaciones de A en B.

$R_1 = \{(2,9),(8,1)\}$ y $R_2 = A \times B$

Dominio de una Relación

Definición 4.4 Se llama dominio de una relación R de A en B, $(R \subset A \times B)$ al conjunto de todas las primeras componentes de los pares ordenados de la relación. Se denota $Dom\,(R)$ y se define por:

$$\boxed{R : A \longrightarrow B \quad \text{entonces} \quad Dom\,(R) = \{x \in A / \exists y \in B \quad \wedge \quad (x,y) \in}$$

Esto es: $x \in Dom(R) \Leftrightarrow \exists y \in B/(x,y) \in R$

Rango de una Relación

Definición 4.5 Se llama rango de una relación R de A en B, al conjunto de todas las segundas componentes de los pares ordenados de la relación. Se denota $Ran\,(R)$ y se define por:

$$\boxed{R : A \longrightarrow B \quad \text{entonces} \quad Ran\,(R) = \{y \in B / \exists x \in A \quad \wedge \quad (x, y) \in R\}}$$

Esto es: $y \in Ran(R) \Leftrightarrow \exists x \in A/(x, y) \in R$

Ejemplo: Si $R = \{(3,1),(3,9),(5,1),(6,9),(6,10)\}$. Hallar el dominio y el rango.

Resolución

$Dom\,(R) = \{3,5,6\}$ y $Ran\,(R) = \{1,9,10\}$

9.1.4. Clases de Relaciones

Considerando una relación R en A, es decir; $R : A \longrightarrow A$ donde A es un conjunto no vacío, se definen los siguientes tipos de relaciones:

Relación Reflexiva

La relación R se denomina Reflexiva, si todo elemento de A esta relacionado consigo mismo, es decir:

$$R \text{ es reflexiva en } A \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A \longrightarrow (x, x) \in R$$

Relación Simétrica

La relación R se llama Simétrica cuando para todos los pares (x, y) el par (y, x) también es un elemento de R; es decir:

$$R \text{ es simétrica en } A \quad \Leftrightarrow \quad \forall (x,y) \in A \longrightarrow (y,x) \in R$$

Relación Transitiva

La relación R se llama Transitiva cuando para todos los pares $(x,y) \in R$ y $(y,z) \in R$, el par (x,z) también es un elemento de R; es decir:

$$R \text{ es transitiva en } A \quad \Leftrightarrow \quad \text{Si}$$
$$(x,y) \in R \quad \wedge \quad (y,z) \in R \longrightarrow (x,z) \in R$$

Relación de Equivalencia

La relación R se llama de Equivalencia si es: Reflexiva, Simétrica y Transitiva.

Relación Antisimétrica

La relación R se denomina Antisimétrica si y solo sí, $(x,y) \in R$ y $(y,x) \in R$ entonces $x = y$. Formalmente:

$$R \text{ es antisimétrica en } A \quad \Leftrightarrow \quad \text{Si}$$
$$[(x,y) \in R \quad \wedge \quad (y,x) \in R] \longrightarrow x = y$$

9.1.5. Inversa de una Relación

Definición

Si $R \subset A \times B$ es una relación de A en B entonces a la relación inversa de R lo expresaremos por R^{-1} y está definido por:

$$\boxed{R^{-1} \quad = \quad \{(y,x) \in B \times A/(x,y) \in R\}}$$

Ejemplo: Si $R = \{(7,8),(6,4),(2,7)\} \quad \Rightarrow \quad R^{-1} = \{(8,7),(4,6),(7,2)\}$

9.1.6. Gráfica de una Relación de R en R

Llamaremos gráfica de una relación de R en R al conjunto de puntos $P(x,y)$ cuyas coordenadas satisfagan a dicha relación, la cual puede estar expresada de la siguiente manera:

$$E(x,y) = 0, \quad E(x,y) > 0, \quad E(x,y) < 0, \quad E(x,y) \geqslant 0, \quad E(x,y) \leqslant 0$$

Discusión de la Gráfica de una Relación

Dada la ecuación $E(x,y) = 0$ para trazar la gráfica de una relación daremos el siguiente criterio:

1. COORDENADAS AL ORIGEN

- Intersección con el eje X

  Para hallar el punto de intersección con el eje X hacemos $y = 0$ y se resuelve la ecuación $E(x, 0) = 0$.

- Intersección con el eje Y

  Para hallar el punto de intersección con el eje Y hacemos $x = 0$ y se resuelve la ecuación $E(0, y) = 0$.

2. SIMETRÍAS

   a) Simetría con el eje X Existe simetría con respecto al eje X si se cumple $E(x, y) = E(x, -y)$.

   b) Simetría con el eje Y Existe simetría con respecto al eje Y si se cumple $E(x, y) = E(-x, y)$.

   c) Simetría con el origen Existe simetría con respecto al origen si se cumple $E(x, y) = E(-x, -y)$.

3. EXTENSIÓN

   Consiste en determinar el dominio y rango de la relación.

   - $y = f(x)$ (Para calcular el dominio de la relación)
   - $x = f(y)$ (Para determinar el rango de la relación)

4. ASÍNTOTAS

Entre las clases de asíntotas figuran las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, ahora solo mencionaremos las dos asíntotas primeras.

- Asíntotas Verticales:

  Tienen la forma $x = a$ La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la relación $E(x, y) = 0$ si para cada $(x, y) \in E(x, y)$, se tiene que para "y" bastante grande la distancia de "x" a "a" es decir $|x - a|$ es muy pequeño.

  Para calcular las asíntotas verticales se despeja la variable "y" de la ecuación $E(x, y) = 0$.

- Asíntotas Horizontales:

  Tienen la forma $y = b$ La recta $y = b$ es una asíntota vertical de la relación $E(x, y) = 0$ si para cada $(x, y) \in E(x, y)$, se tiene que para "x" bastante grande la distancia de "y" a "b" es decir $|y - b|$ es muy pequeño.

  Para calcular las asíntotas verticales se despeja la variable "x" de la ecuación $E(x, y) = 0$.

5. TABULACIÓN

Consiste en calcular un número determinado de pares ordenados a partir de la ecuación $E(x, y) = 0$.

9.2. Función

La noción de **correspondencia** aparece en la vida diaria. Por ejemplo:

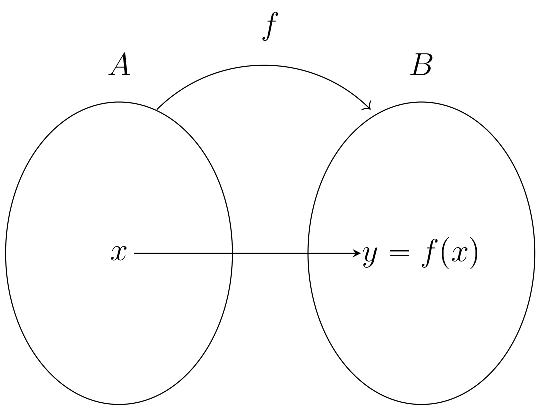
- La estatura es una función de la edad.
- La temperatura es una función de la fecha.
- El costo de enviar un paquete por correo depende de su peso.
- El área de un círculo es una función de su radio.
- El número de bacterias en un cultivo es función del tiempo.
- El peso de una astronauta es una función de su elevación.
- El precio de una mercancía es una función de la demanda de esa mercancía.
- A cada libro de una biblioteca le corresponde un número de páginas.
- A cada ser humano le corresponde una fecha de nacimiento.

Estos ejemplos de correspondencia involucran dos conjuntos.

Definición

Una función es una relación entre un conjunto de entrada, llamado dominio, y un conjunto de salida, llamado rango, que asigna a cada elemento del dominio un único elemento del rango.

Formalmente, una función se denota como $f : A \longmapsto B$, donde f es el nombre de la función, A es el dominio y B es el rango. Para cada elemento x en el dominio A, la función asigna un único valor $f(x)$ en el rango B. Esto quiere decir, que dos pares ordenados distintos no pueden tener la misma primer componente.



Ejemplo

1. Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$ se tiene que:

Resolución

- $f = \{(1, d), (2, b), (3, c)\}$ es una función.

- $f = \{(2,b),(3,c),(3,d)\}$ no es una función, ya que no cumple con la definición.

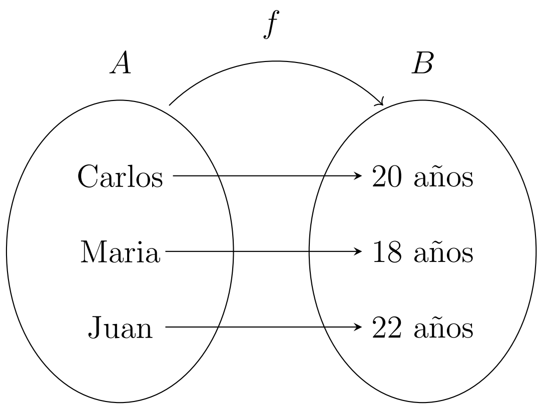
- $f = \{(2,a),(3,a),(4,d)\}$ es una función.

2. Sea $A = \{Carlos, Juan, Maria\}$ y $B = \{18\text{años}, 20\text{años}, 22\text{años}\}$ y se define la función f "tiene la edad" de A en B.

Resolución

$f = \{(Carlos, 20\text{años}), (Maria, 18\text{años}), (Juan, 22\text{años})\}$.

Esquemáticamente se muestra en al figura



Dominio y Rango de una Función

- Se llama **dominio** de una función f al conjunto de todas sus primeras componentes y se denota por $Dom(f)$, D_f es decir.

$$\boxed{D_f = \{x \in X / \exists y \in Y \quad \wedge \quad (x,y) \in f\}}$$

- Se llama **rango** de una función f al conjunto de todas sus segundas componentes y se denota por $Ran(f)$, R_f es decir.

$$\boxed{R_f = \{y \in Y / \exists x \in X \quad \wedge \quad (x,y) \in f\}}$$

Ejemplo

1. Sean $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{a,b,c,d\}$ y la función $f = \{(1,a),(2,b),(3,b)\}$, se tiene que $Dom(f) = \{1,2,3\}$ y $Ran(f) = \{a,b\}$.

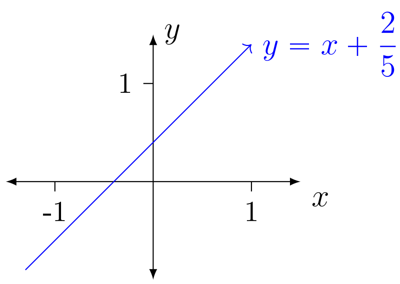
9.2.1. Funciones Especiales

1. Función Lineal

Es aquella cuya gráfica siempre es una linea recta y cuya regla de correspondencia tiene la siguiente forma general:

$$f(x) = ax + b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

$D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \mathbb{R}$

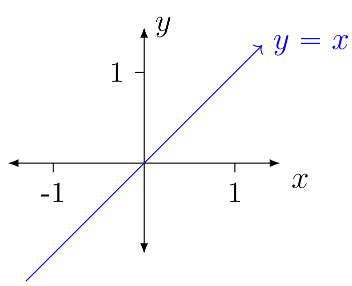


2. Función Identidad

Es una función tal que la imagen de cualquier elemento es éste mismo y cuya regla de correspondencia tiene la siguiente forma general:

$$f(x) = x$$

$D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \mathbb{R}$

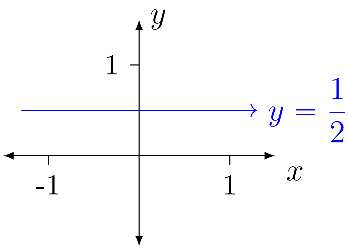


3. Función Constante

Una función f es constante si la variable dependiente y toma el mismo valor de a para cualquier elemento del dominio (variable independiente x) y cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = a$$

$D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = a$

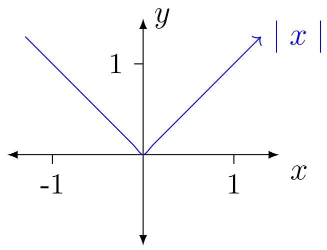


4. Función Valor Absoluto

La función valor absoluto tiene la siguiente regla de correspondencia:

$$f(x) = |x|, \text{ donde } \quad |x| = \begin{cases} x; & x \geqslant 0 \\ -x; & x \leqslant 0 \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = [0, +\infty >$



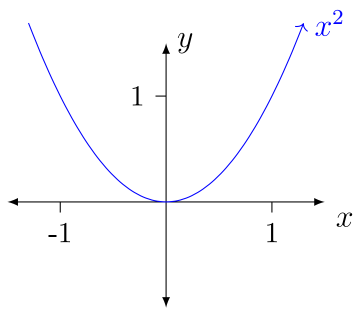
5. Función Cuadrática

Son funciones polinómicas de grado 2, es decir, el mayor exponente del polinomio es x elevado a 2 y cuya regla de correspondencia tiene la siguiente forma general:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

Si $a > 0$ $\quad D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = [\dfrac{4ac - b^2}{4a}, +\infty >$

Si $a < 0$ $\quad D_f = \mathbb{R}$ y $R_f =< -\infty, \dfrac{4ac - b^2}{4a}]$

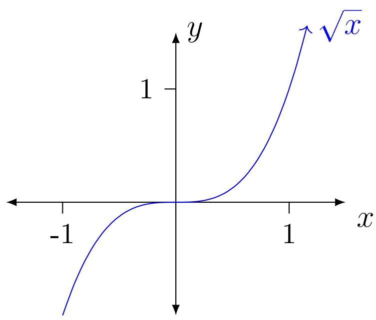


6. Función Cúbica

Las funciones cúbicas (o funciones de tercer grado) son funciones polinómicas de grado 3, tiene la siguiente forma general:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0$$

$D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \mathbb{R}$



9.2.2. Operaciones de Funciones

Consideramos dos funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ si $D_f \cap D_g \neq \varnothing$

7. Función Polinómica

s aquella cuya gráfica siempre es una linea recta y cuya regla de correspondencia tiene la siguiente forma general:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Donde a_0, a_1, $a_2, \ldots$, a_{n-1}, a_n son números reales, $a_n \neq 0$.

8. Función Racional

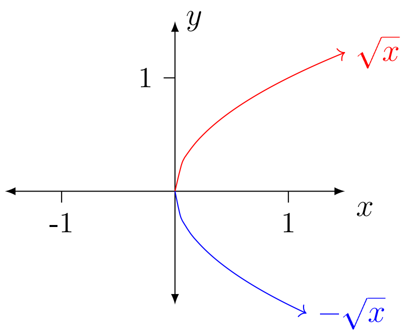
Las funciones racionales $f(x)$ son el cociente de dos polinomios. La palabra racional hace referencia a que esta función es una razón tiene la siguiente forma general:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde $Q(x) \neq 0$
Representa una función hiperbólica.

9. Función Raiz Cuadrada

Es aquella cuya gráfica siempre es una linea recta y cuya regla de correspondencia tiene la siguiente forma general:



$$f(x) = \sqrt{x}$$

$D_f = \mathbb{R}^+$ y $R_f = [0, +\infty >$

10. Función Signo

Es aquella cuya gráfica siempre es una linea recta y cuya regla de correspondencia tienen la siguiente forma general:

$$f(x) = sgn(x), \text{ donde } sgn(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \{-1, 0, 1\}$

1. IGUALDAD DE FUNCIONES

Diremos que son funciones f y g son iguales si:

11. Función Máximo Entero

Su regla de correspondencia tiene la siguiente forma general:

$f(x) = \|x\|$ donde $\|x\| = n \Leftrightarrow n \leqslant x < n + 1$

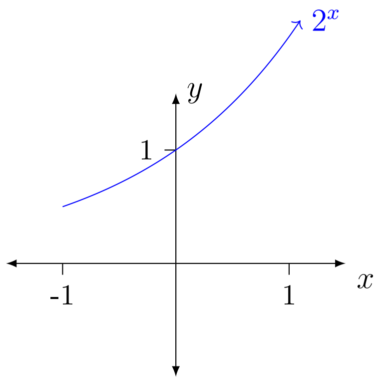
$D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \mathbb{Z}$

12. Función Exponencial

Llamaremos función exponencial de base "a" a la función que se define de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y regla de correspondencia tiene la siguiente forma general:

$$f(x) = a^x, \text{ donde } a > 0,\ a \neq 1$$

$D_f = \mathbb{R}$ y $R_f = \mathbb{R}^+$
Cuando la base $a > 1$ (Creciente)
Cuando la base $0 < a < 1$ (Decreciente)



13. Función Logarítmica

Se llama función logarítmica de base "a" y es denotada por $y = log_a x$, tal que $x > 0$, a la función inversa de la función exponencial $f(x) = a^x$ y su regla de correspondencia es:

$$f(x) = log_a x$$

donde $x > 0 \wedge a > 0 \wedge a \neq 1$

$D_f = \mathbb{R}^+$ y $R_f = \mathbb{R}$

Cuando la base $a > 1$ (Creciente)
Cuando la base $0 < a < 1$ (Decreciente)

$$f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad \forall x \in D_f = D_g$$

Su dominio: $D_f = D_g$

Ejemplo: Las funciones $f(x) = x^3 + 2$, $g(x) = x^3 + 2$

Son iguales porque $D_f = D_g = \mathbb{R}$ y $f(x) = g(x)$

2. SUMA DE FUNCIONES

Si f y g son dos funciones con dominio D_f y D_g respectivamente.

$$f+g:\ I\!R \longmapsto I\!R$$
$$x \longmapsto (f+g)(x) =$$
$$f(x)+g(x)$$

Su dominio: $\forall x \in D_{f+g} = D_f \cap D_g$

3. RESTA DE FUNCIONES

Si f y g son dos funciones con dominio D_f y D_g respectivamente.

$$f-g:\ I\!R \longmapsto I\!R$$
$$x \longmapsto (f-g)(x) =$$
$$f(x)-g(x)$$

Su dominio: $\forall x \in D_{f-g} = D_f \cap D_g$

4. MULTIPLICACIÓN DE FUNCIONES

Si f y g son dos funciones con dominio D_f y D_g respectivamente.

$$f\cdot g:\ I\!R \longmapsto I\!R$$
$$x \longmapsto (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$$

Su dominio: $\forall x \in D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g$

5. DIVISIÓN DE FUNCIONES

Si f y g son dos funciones con dominio D_f y D_g respectivamente.

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} :\ & I\!R \longmapsto I\!R \\ & x \longmapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

Su dominio: $\forall x \in D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \wedge g(x) \neq 0$

Ejemplo

1. Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Hallar las funciones $f+g$, fg, $f-g$, $\dfrac{f}{g}$ y calcular sus dominios.

Resolución

$Dom(f) = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ y $Dom(g) = \mathbb{R} - \{0\}$

- $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \sqrt{x}+\frac{1}{x} = \frac{x\sqrt{x}+1}{x}$; $Dom(f+g) = Dom(f) \cap Dom(g) = \mathbb{R}_+$
- $(fg)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sqrt{x}}{x}$; $Dom(fg) = Dom(f) \cap Dom(g) = \mathbb{R}_+$

- $(f-g)(x) = f(x)-g(x) = \sqrt{x}-\frac{1}{x} = \frac{x\sqrt{x}-1}{x}$; $\quad Dom(f-g) = Dom(f) \cap Dom(g) = \mathbb{R}_+$
- $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{x}} = x\sqrt{x}$; $\quad Dom(\frac{f}{g}) = [Dom(f) \cap Dom(g)] - \{x \in \mathbb{R}/g(x) = 0\}$

Como $g(x) \neq 0$ para cada x en su dominio, entonces

$$Dom\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R}_+$$

2 La **función factorial** $f(n) = n!$ se define como el producto de los n primeros enteros positivos; es decir,

$$f(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1) \cdot n$$

a) Evalúe $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$ y $f(7)$

b) Demuestre que $f(n+1) = f(n) \cdot (n+1)$

c) Simplifique $\dfrac{f(5)}{f(4)}$ y $\dfrac{f(7)}{f(5)}$

d) Simplifique $\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$.

Resolución

- $f(2) = 2 \times 1 = 2$
- $f(3) = 3 \times 2 \times 1 = 6$

- $f(5) = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
- $f(7) = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

b).

- $f(n+1) = f(n) \cdot (n+1)$

$\underbrace{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \ldots \times n} \times (n+1) = n! \times (n+1)$

$n! \times (n+1) = n! \times (n+1)$

c).

- $\dfrac{f(5)}{f(4)} = \dfrac{5 \times 4!}{4!} = 5$
- $\dfrac{f(7)}{f(5)} = \dfrac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 42$

d).

- $\dfrac{f(n+1)}{f(n)} = \dfrac{f(n) \times (n+1)}{f(n)} = n+1$

3. Otra función de un entero positivo n proporciona la suma de los n primeros enteros positivos al cuadrado:

$$s(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Encuentre el valor de la suma $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots 100^2$

Resolución

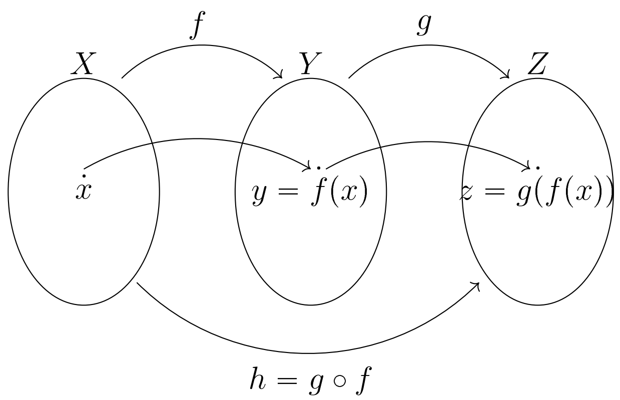
$$S(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$S(100) = \frac{1}{6}(100)(101)(201) = 338350$$

9.2.3. Composición de Funciones

Definición

Dadas dos funciones f y g, tales que: $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ y que $R_f \cap D_g \neq \varnothing$, entonces la función compuesta denotado por: $g \circ f$ es aquella función definida por:

$$\boxed{h = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ es la regla de correspondencia}}$$



$$\boxed{D_{g\circ f} = \{x/x \in D_f \quad \wedge \quad f(x) \in D_g\}}$$

Observación: Para que exista la composición de funciones $g \circ f$ es necesario que $R_f \cap D_g \neq \varnothing$

1. Dadas los conjuntos $A = \{-2, 0, 1, 2, 4\}$,$B = \{-2, -1, 0, 3, 4, 5\}$,$C = \{-4, 0, 1, 2\}$ y las funciones $f : A \to B, g : B \to C$

definidas por

$f = \{(-2,-1),(0,3),(1,4),(2,0),(4,5)\}$,

$g = \{(-2,0),(-1,-4),(3,1),(5,2)\}$. Hallar $g \circ f$

Resolución

Tenemos que $Ran(f) = \{-1,0,3,4,5\}$ y $Dom(g) = \{-3,-1,3,5\}$, luego se tiene que $Ran(f) \cap Dom(g) = \{-1,3,5\} \neq \phi$, nos interesa los pares de g y f que tengan como segundas y primeras componentes a$-1,3$ y 5 respectivamente, esto es:

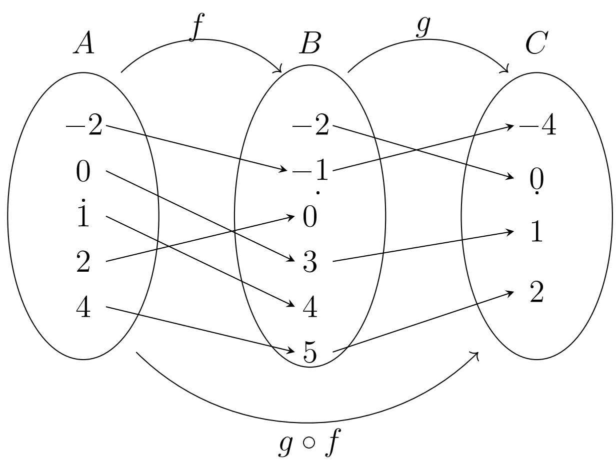
$$(-2,-1) \in f \wedge (-1,-4) \in g \rightarrow (-2,-4) \in g \circ f$$

$$(0,3) \in f \wedge (3,1) \in g \rightarrow (0,1) \in g \circ f$$

$$(4,5) \in f \wedge (5,2) \in g \rightarrow (4,2) \in g \circ f$$

Por lo tanto, $g \circ f = \{(-2,-4),(0,1),(4,2)\}$.

Esquemáticamente:



$$\therefore g \circ f = \{(-2,-4),(0,1),(4,2)\}$$

Propiedades de la Composición de Funciones

1. $f \circ g \neq g \circ f$ No es conmutativa
2. $(f+g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$ Distributiva
3. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ Asociativa

1. $(f \cdot g) \circ h = (f \circ h) \cdot (g \circ h)$
2. $I^n \circ I^m = I^{nm}$, $n, m \in \mathbb{Z}^+$
3. $f \circ I = I \circ f = f, \forall f$

9.2.4. Clases de Funciones

1. FUNCIÓN INYECTIVA

Definición

La función $f : X \longrightarrow Y$ es inyectiva (univalente) si cada elemento del rango le corresponde un único elemento del dominio, es decir, si existen dos elementos $x_1, x_2 \in D_f$ distintos $x_1 = x_2$ cuyas imágenes son distintas $f(x_1) \neq f(x_2)$ lo que es equivalente a decir:

$$\boxed{\text{Si } x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2}$$

Ejemplo

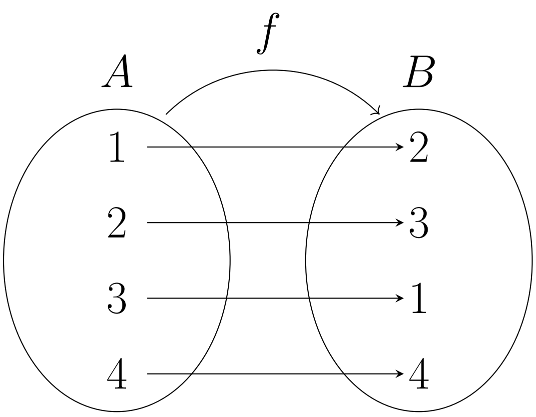
1. Determinar si las siguientes relaciones son funciones inyectivas:

$f = \{(1,2),(2,3),(3,1),(4,4)\}$ y

$g = \{(1,1),(2,3),(3,1),(4,4),(5,4)\}$.

Resolución

Se tiene que f es una función inyectiva, pues si tomamos dos elementos diferentes del dominio, las imágenes correspondientes son también diferentes. En el gráfico se observa claramente esta situación (uno a uno):

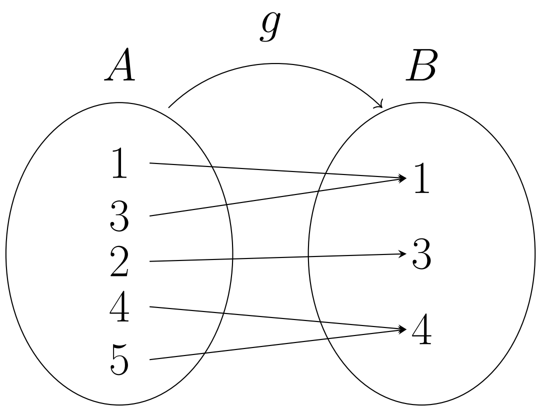


Por otro lado, en el grafico de g se observa que:

$1 \neq 3$ y $g(1) = g(3) = 1$

$4 \neq 5$ y $g(4) = g(5) = 4$

Esto es, hay dos elementos del dominio que tienen la misma imagen (dos a uno), por lo tanto g, no es inyectiva.



Observación. En forma gráfica se puede determinar si una función es inyectiva o no, para esto trazaremos un recta paralela al eje X, si dicha recta corta a la gráfica en dos partes o más, entonces la función f no es inyectiva y si corta en un sólo punto, entonces la función f es inyectiva.

2. FUNCIÓN SOBREYECTIVA

Definición

La función $f : X \longrightarrow Y$ es sobreyectiva (o suryectiva) sí y sólo sí, $\forall y \in B$, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$; esto quiere decir que todo elemento de B es imagen por lo menos de un elemento de A es decir el R_f coincide con el conjunto de llegada.

$$\boxed{f : X \longrightarrow Y \text{ es sobreyectiva si } R_f = B}$$

Ejemplo

1. Sean $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{1,3,5,7\}$ y las funciones de A en B: $f = \{(1,1),(2,1),(3,3),(4,5)\}$ y $g = \{(1,3),(2,1),(3,5),(4,7)\}$. Determinar si son o no funciones sobreyectivas.

   Resolución

   $Ran(f) \neq B$, luego f no es sobreyectiva de A en B o no estan definidas sobre B.

   $Ran(g) = B = \{1,3,5,7\}$, luego g es sobreyectiva o esta definida en B.

2. Dada la función: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/f(x) = x + 3$. ¿$f$ es sobreyectiva?

   Resolución

   Al ser $f(x) = x + 3$ una función lineal, podemos decir que el $R_f = \mathbb{R}$ y como el conjunto de llegada $\mathbb{R}$ es idéntico al rango de la función f.

   $\therefore$ La función si es sobreyectiva.

3. FUNCIÓN BIYECTIVA

Definición

La función $f : X \longrightarrow Y$ se llama función biyectiva, si la función f es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente.

Ejemplo: Determinar si la función $f : [0, 2 > \longrightarrow < -\infty, 0]$ tal que $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ es biyectiva.

Resolución

a) Analizamos si es inyectiva, es decir: $f(x) = f(x_1) \Rightarrow x = x_1$

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-2} = \frac{x_1}{x_1-2} \quad &\Rightarrow \quad xx_1 - 2x = x_1x - 2x_1 \\ &\Rightarrow \quad x = x_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto f es inyectiva.

b) Ahora veremos si f es sobreyectiva, para esto es suficiente ver si el rango de f coincide con el conjunto de llegada.

$$\begin{aligned} y = \frac{x}{x-2} \quad &\Rightarrow \quad x = \frac{2y}{y-1} \in [0, 2 > \\ &\Rightarrow \quad 0 \leqslant \frac{2y}{y-1} < 2 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{2y}{y-1} \wedge \frac{2y}{y-1} < 2 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{y}{y-1} \wedge \frac{1}{y-1} < 0 \end{aligned}$$

$y \in < -\infty, 0]$, luego $R_f = < -\infty, 0]$ entonces f es sobreyectiva.

$\therefore$ Como f es inyectiva y sobreyectiva entonces f es biyectiva.

9.2.5. Función Par y Función Impar

Definición.-

Sea f una función tal que siempre que x esté en el dominio, $-x$ también está en el dominio.

1. f es **PAR** si $f(-x) = f(x)$ para todo x en el dominio
2. f es **IMPAR** si $f(-x) = -f(x)$ para todo x en el dominio

9.2.6. Funciones Monótonas, Crecientes y Decrecientes

1. FUNCIÓN MONÓTONA

   La función f se llama monótoma si la función f es creciente o decreciente.

2. FUNCIÓN CRECIENTE

   La función f se llama creciente si para todo $x_1, x_2 \in D_f$ se tiene:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Reconocemos a una función como creciente, si al observar la gráfica de izquierda a derecha, ésta está de subida.

Si f es creciente con dominio $[x_1, x_2]$, se tiene: $R_f = [f(x_1), f(x_2)]$

3. FUNCIÓN DECRECIENTE

La función f se llama decreciente si para todo $x_1, x_2 \in D_f$ se tiene:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Reconocemos a una función como creciente, si al observar la gráfica de izquierda a derecha, ésta está de bajada.

Si f es decreciente con dominio $[x_2, x_1]$, se tiene: $R_f = [f(x_2), f(x_1)]$

9.2.7. Función Inversa

Consideremos la función $f = \{(x, f(x))/x \in D_f\}$ con dominio D_f y rango R_f entonces diremos que existe la función inversa, sí y sólo sí, f es inyectiva. Se define su función inversa denotada por f^{-1} ó f^*.

$$\boxed{f^{-1} = \{(f(x), x)/x \in D_f\}}$$

donde: $D_{f^{-1}} = R_f$ y $R_{f^{-1}} = D_f$

Observación. En el plano cartesiano las gráficas de las funciones f y f^{-1} son simétricas entre si respecto a la función identidad $f(x) = x$.

Propiedades de la Función Inversa

1. $f^{-1}(f(x)) = x$, $\forall x \in D_f$
2. $f(f^{-1}(x)) = x$, $\forall x \in D_{f^{-1}}$

Ejercicios Resueltos

1. Sea f una función definida en $\mathbb{Z}$ que cumple $f(x+3) = f(x) + f(3), \quad \forall x \in \mathbb{Z}$

¿ Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas ?

a) $f(0) = 0$

b) $f(-3) = 3$

c) $f(12) = 4f(3)$

Resolución

a). Si $x = 0$ entonces:

$$\begin{aligned} f(x+3) &= f(x) + f(3) \\ f(0+3) &= f(0) + f(3) \\ f(3) &= f(0) + f(3) \\ f(3) - f(3) &= f(0) \\ 0 &= f(0) \end{aligned}$$

$$\therefore f(0) = 0 \ldots\ldots\ldots (Verdadero)$$

b). Si $x = -3$ entonces:

$$\begin{aligned} f(x+3) &= f(x) + f(3) \\ f(-3+3) &= f(-3) + f(3) \\ f(0) &= f(-3) + f(3) \\ 0 &= f(-3) + f(3) \\ f(-3) &= -f(3) \end{aligned}$$

$$\therefore f(-3) = 3 \ldots\ldots\ldots (Falso)$$

c). Si $x = 9$ entonces:

$$\begin{aligned} f(9+3) &= f(9) + f(3) \\ f(12) &= f(6+3) + f(3) \\ &= f(6) + f(3) + f(3) \\ &= f(3+3) + f(3) + f(3) \\ &= f(3) + f(3) + f(3) + f(3) \\ f(12) &= 4f(3) \end{aligned}$$

$$\therefore f(12) = 4f(3) \ldots\ldots\ldots (Verdadero)$$

2 Determine una ecuación de una función $y = f(x)$ cuyo dominio es:

a) $[3, \infty)$

Resolución

Si $Dom(f) = [3, \infty) \Longrightarrow x - 3 \geqslant 0 \Longrightarrow x \geqslant 3 \Longrightarrow$ $y = \sqrt{x-3}$

b) $(3, \infty)$

Resolución

Si $Dom(f) = (3, \infty) \Longrightarrow x - 3 > 0 \Longrightarrow x > 3 \Longrightarrow$ $y = \ln(x-3)$

3 Determine una ecuación de una función $y = f(x)$ cuyo rango es:

a) $[3, \infty)$

Resolución

Si $Ran(f) = [3, \infty) \Longrightarrow y - 3 \geqslant 0 \Longrightarrow y \geqslant 3 \Longrightarrow$ $x = \sqrt{y-3}$

$$\therefore y = x^2 + 3$$

b) $(3, \infty)$

Resolución

Si $Ran(f) = (3, \infty) \Longrightarrow y - 3 > 0 \Longrightarrow y > 3 \Longrightarrow$

$$x = \frac{1}{\sqrt{y-3}}$$

$$\therefore y = \frac{1}{x^2} + 3$$

4 Se define las funciones

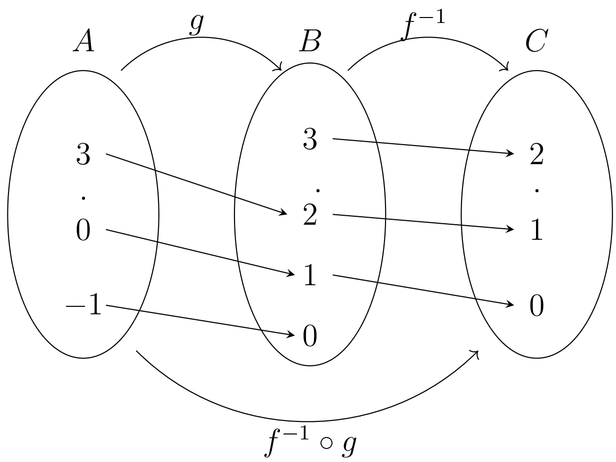
$$f = \{(0,1),(1,2),(2,3)\}$$

$$g = \{(-1,0),(0,1),(3,2)\}$$

Halle la suma de elementos del $Ran(f^{-1}og)$.

Resolución

Esquemáticamente:



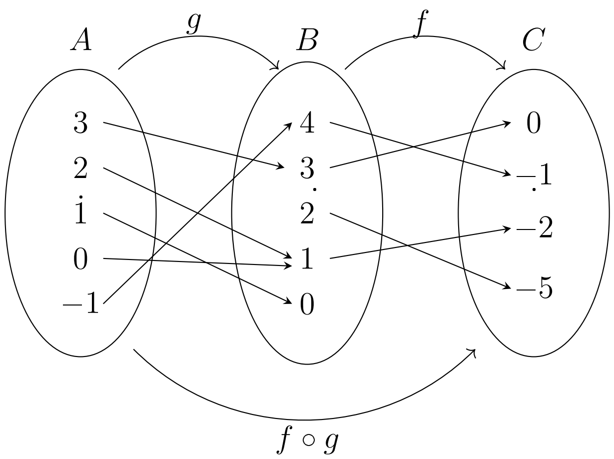
$$\therefore f^{-1} \circ g = \{(3,1);(0,0)\}$$

5 Hallar la composición $f \circ g$ para $f = \{(1,-2),(2,-5),(3,0),(4,-1)\}$

$g = \{(0,1),(1,0),(3,3),(-1,4),(2,1)\}$.

Resolución

Esquemáticamente:



$$\therefore\ f \circ g = \{(3,0);(2,-2);(0,-2);(-1,-1)\}$$

6 Dada la función

$$f : [a, 8] \longmapsto [b, 20]$$

donde $f(x) = 32 + 4x - x^2$, si f es biyectiva. Calcular: $a + b$

Resolución

Completando cuadrados:

$f(x) = 36 - (x-2)^2$, f es biyectiva y decreciente entonces:

- $f(a) = 20 \Rightarrow a = 6$
- $f(8) = b \Rightarrow b = 0$

$$\therefore \quad a + b = 6 + 0 = 6$$

7 Sea $f : I\!R \longmapsto I\!R$ una función, tal que $f(xy+1) = f(x)f(y)-$

$f(y) - x + 2 \qquad \forall x, y \in I\!R$. Si $f(0) = 1$, Hallar $f^*(x)$.

Resolución

$f(x)f(y) - f(y) - x + 2 = f(y)f(x) - f(x) - y + 2$

$\cancel{f(x)f(y)} - f(y) - x + \cancel{2} = \cancel{f(y)f(x)} - f(x) - y + \cancel{2}$

$f(x) = f(y) + x - y$

Si $y = 0$ entonces $f(x) = x + 1$

$$\therefore f^*(x) = x - 1$$

8 Si los pares ordenados $(x^2 + y^2, z + 2)$ y $(0, 10)$ son iguales, donde x , y , $z \in I\!R$. Hallar: $x + y + z$

Resolución

Si $(x^2 + y^2, z + 2) = (0, 10)$ igualando pares ordenados se tiene:

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \wedge \quad z + 2 = 10$$

$$x = 0 \quad \wedge \quad y = 0 \quad \wedge \quad z = 8$$

$$\therefore \quad x + y + z = 8$$

9 Sea la función $f = \{(3, u), (9, 6), (3, 2), (9, w), (1, 5)\}$ que tiene solo tres elementos. Determine: $u + w$.

Resolución

Igualando pares ordenados se tiene:

$$(3, u) = (3, 2) \quad \wedge \quad (9, w) = (9, 6)$$

$$\Longrightarrow u = 2 \qquad \wedge \qquad w = 6$$

$$\therefore \quad u + w = 8$$

10 Hallar el dominio de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-\mid x \mid}}{2x+1} - 10x$

Resolución

Por propiedad de Raíz cuadrada

$$1-\mid x \mid \geqslant 0 \quad \wedge \quad 2x + 1 \neq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \mid x \mid \leqslant 1 \quad \wedge \quad x \neq -\frac{1}{2}$$

$$-1 \leqslant x \leqslant 1 \quad \Longleftarrow por \;\; propiedad$$

$$\therefore \quad x \in [-1, 1] - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

11 La función f de $I\!R$ en $I\!R$ definida por $f(x) = \dfrac{2x+1}{|x|+2}$, tiene rango $[m, M]$.

Hallar : $2M - \dfrac{1}{2}m$.

Resolución

Por propiedad de valor absoluto

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x+1}{-x+2} \\ y(-x+2) &= 2x+1 \\ -xy+2y &= 2x+1 \\ 2y-1 &= x(2+y) \\ \frac{2y-1}{y+2} &= x \end{aligned}$$

$\therefore \quad y \in I\!R - \{-2\}$

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x+1}{x+2} \\ y(x+2) &= 2x+1 \\ xy+2y &= 2x+1 \\ 2y-1 &= 2x-xy \\ 2y-1 &= x(2-y) \\ \frac{2y-1}{-y+2} &= x \end{aligned}$$

$\therefore \quad y \in I\!R - \{2\}$

Entonces: $\quad m = -2 \qquad$ y $\qquad M = 2$

$$\begin{aligned} 2M - \frac{1}{2}m &= 2(2) - \frac{1}{2}(-2) \\ &= 4 + \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}) \\ &= 4 + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

1. Cual de las siguientes relaciones definen una función de A en A, si $A = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x < 12\}$:

   a) $R_1 = \{(1,3),(2,3),(4,5),(7,5),(8,8)\}$

   b) $R_2 = \{(1,3),(2,3),(3,4),(2,5),(4,5)\}$

   c) $R_3 = \{(1,3),(1,2),(1,4),(2,5),(4,5)\}$

2. Sea $f(x) = x^3 + 4x - 3$. Calcule $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$ y $f(\sqrt{2})$.

3. Sea $g(x) = \sqrt{x-1} + 2x$. Calcule $g(1)$, $g(3)$, $g(5)$ y $g(10)$

4. Sean f y g las funciones dadas. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Determine lo siguiente:

   a) $f(\frac{1}{a})$

   b) $g(a^2)$

   c) $f(\sqrt{a})$

   d) $[g(a)]^2$

   e) $\sqrt{f(a)}$

5. Sea la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/f(x) = mx+b$ con m y b constante, tal que $2f(2) + f(4) = 21$ y $f(-3) - 3f(1) = 16$. Hallar el valor $\dfrac{f(1)}{3}$.

6. Encuentre el dominio de la función f.

   a) $f(x) = \sqrt{3x-5}$

b) $f(x) = \sqrt{7-2x}$

c) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$

e) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3-9x}$

f) $f(x) = \dfrac{4x+7}{6x^2+13x-5}$

7. Sean las funciones

$f = \{(2,1),(3,5),(4,2),(5,8),(6,1),(7,4),(8,4)\}$ y

$g = \{(2,4),(3,3),(4,3),(5,1),(6,4),(7,6),(8,6)\}$; sea h una función con dominio $\{1,2,4,5,8\}$ tal que $g = h \circ f$. Hallar $h(1)+h(2)+h(4)+h(5)+h(8)$.

8. Sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,2,3,4\}$, si $f = \{(3,1),(x,3),(2,3)\}$ es una funcion de A en B; $g = \{(3,1),(y,z),(1,3)\}$ es una funcion inyectiva de A en A; $h = \{(1,1),(2,w),(3,2),(4,2)\}$ es una funcion sobreyectiva de B en A, determinar $yz-(x+w)$.

9. Determine si la función f es biyectiva.

a) $f(x) = 2x+9$

b) $f(x) = \dfrac{1}{7x+9}$

c) $f(x) = 5-3x^2$

d) $f(x) = 2x^2-x-3$

e) $f(x) = \sqrt{x}$

f) $f(x) = x^3$

g) $f(x) = 4$

10 Determine si f es par o impar.

a) $f(x) = 3x^3 - 4x$

b) $f(x) = 7x^4 - x^2 + 7$

c) $f(x) = 9 - 5x^2$

d) $f(x) = 2x^5 - 4x^3$

e) $f(x) = 2$

f) $f(x) = 2x^3 + x^2$

g) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

h) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4}$

i) $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

11 Sean las funciones f y g funciones de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ tales que $f(2x + 1) = 2x - 1$ y $g(x) = 3x - a$, con $a \in \mathbb{Q}$, donde $(f \circ g)(3) = (g \circ f)(a - 1)$. Hallar $f(a)$

Ejercicios Propuestos Adicionales

1 Sean $f, g, h : I\!R \rightarrowtail I\!R$ si $g(x) = 2x + 1$, $g(h(x) + f(x)) = x^2$, $g(h(x) + 2f(x)) = 3 - x^2 - 3x$, entonces $g(h(-g(f(1))))$ es:

a) 0 c) 2 e) 4

b) 1 d) 3

2 Sean f y g funciones reales inyectivas tales que: $f(x) = \dfrac{x+3}{2x}$, $x \neq 0$ $g^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$, $x \neq -3$ hallar: $11\left(g^{-1}of\right)\left(t - \frac{11}{5}\right)$ sabiendo que $\left(f^{-1} \circ g\right)(t) = 1$

a) -5 c) $-\dfrac{1}{4}$ d) 4

b) 5 e) -2

3 Hallar la suma de valores enteros de k para que la función $f(x) = 4x^2 - k(4x - 1) + 6$ no tenga interceptos con el eje x.

a) 0 c) 2 e) 4

b) 1 d) 3

4 Sean las funciones reales de variable real $f(x) = \begin{cases} x+2 \ , & x \leqslant 1 \\ x-1 \ , & x > 1 \end{cases}$ $g(x) = -x^2 + 1 \ , \ x \geqslant 0$ ¿ Cuáles de las siguientes proposiciones.

a) $(g \circ f)(x) = -x^2 - 4x - 3 \ , \ x \in [-2, 1]$

b) $Dom(g \circ f) = Dom(f)$

c) $(g \circ f)(x) = -x^2 + 2x \ , \ x \in [-2, +\infty[$

son verdaderas ?

5 Sean las funciones reales de variable real $f(x) = \begin{cases} x+2 & , \quad x \leqslant 1 \\ x-1 & , \quad x > 1 \end{cases}$ $g(x) = x^2 \;,\; x \geqslant 0$ ¿ Cuáles de las siguientes afirmaciones.

a) $(g \circ f)(x) = x^2 + 4x + 4 \;,\; x \in I\!R$

b) $g \circ f$ es función inyectiva.

c) $(g \circ f)(x) = x^2 - 2x + 1 \;,\; x \in]-\infty, -2[$

son verdaderas ?

6 Sean las funciones reales de variable real $f(x) = -\sqrt{2-x} + 3$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{|x-2| - |2x-6|}$ entonces, $Dom(f) \cap Dom(g) \cap Ran(f) \cap Ran(g)$ es igual a:

a) $]-\infty, 1]$

b) $[1, 2]$

c) $]-\infty, 2]$

d) ϕ

e) N. A.

7 Se definen las siguientes funciones de $I\!R$ en $I\!R$ $g(x) = x^2$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 1 \\ 0 & , \quad x = 1 \\ -1 & , \quad x < 1 \end{cases} ,$$

$h(x) = f(x-1)$ se afirma:

a) $Ran(h) = Ran(f)$

b) $Ran(fog) = \{0, 1\}$

c) $Dom(fog) = I\!R$

son verdaderas:

8 Sea $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrowtail I\!R$ definida por $f(1) = 4$, $f(2) = 4$, $f(n+2) = 4 + f(n)$ se afirma :

a) $f(8) = 16$

b) $f(35) = 68$

c) $f(n)$ es múltiplo de 4 , $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

Capítulo 10

MODELADO CON FUNCIONES

Empezamos con una situación práctica que ilustra el proceso de elaboración.

10.1. PASOS PARA MODELAR CON FUNCIONES

1. **Expresar verbalmente el problema**. Identificar verbalmente la cantidad que se desea modelar como función de las otras cantidades del problema.

2. **Escoger la variable**. Asignar un símbolo, como x, a una de las variables y expresar las demás variables en relación a este símbolo. Encontrar todas las variables utilizadas para expresar la función del Paso 1).

3. **Establecer el modelo**. Escribir la función en términos algebraicos al expresarla como una función de la única variable

seleccionada en el Paso 2.

4. **Usar el modelo**. Use la función para responder las preguntas formuladas en el problema. Si se busca encontrar un máximo o un mínimo, emplear los métodos escritos en las sesiones anteriores.

Ejercicios Resueltos

1. Formule una función que relacione el perímetro de un cuadrado con su área A.

Resolución

Área de un cuadrado:

✓ $A_{\square} = l^2 \Longrightarrow l = \sqrt{A}$

perímetro de un cuadrado:

✓ $P_{\square} = 4l \Longrightarrow P_{\square} = 4\sqrt{A}$

2. Formule una función que relacione el área de un círculo con su diámetro d.

Resolución

✓ $d = 2r \Longrightarrow r = \dfrac{d}{2}$

✓ $A_O = \pi r^2 \Longrightarrow A_O = \pi\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 \Longrightarrow A_O = \dfrac{\pi d^2}{4}$

3 Formule una función que relacione el diámetro de un círculo con su circunferencia ζ.

Resolución

$\checkmark \zeta = 2\pi r \Longrightarrow r = \dfrac{\zeta}{2\pi}$

$\checkmark d = 2r \Longrightarrow d = 2\left(\dfrac{\zeta}{2\pi}\right) \Longrightarrow d = \dfrac{\zeta}{\pi}$

4 Formule una función que relacione el volumen de un cubo con el área A de su base.

Resolución

$$\begin{cases} A = l^2 \\ V = l^3 \end{cases} \Longrightarrow V = l^2 \cdot l \Longrightarrow V = A \cdot \sqrt{A}$$

5 Formule una función que relacione el área de un círculo con la longitud x de un alambre que se dobla en forma de círculo.

Resolución

$\checkmark x = 2\pi r \Longrightarrow r = \dfrac{x}{2\pi}$

$\checkmark A_O = \pi r^2 \Longrightarrow A_O = \pi\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2 \Longrightarrow A_O = \dfrac{x^2}{4\pi}$

6 **[PROBLEMA DE NÚMEROS]**. La suma de dos números positivos cuyo producto es 50 se expresa como una función de uno de los números.

Resolución

$$\begin{cases} x \cdot y = 50 \\ f(x) = y + x \end{cases} \Longrightarrow y = \frac{50}{x} \Longrightarrow f(x) = \frac{50}{x} + x$$

7 **[PROBLEMA DE NÚMEROS]**. Formule una función que exprese la suma de un número y su recíproco cuando se trata de dos números distintos de cero.

Resolución

Sea: $x \neq 0$

recíproco de x: $\dfrac{1}{x}$

La suma del número y su recíproco es:

$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

8 **[PROBLEMA DE NÚMEROS]**. Se busca expresar como función de uno de los números la suma del cuadrado de uno de ellos y el doble del cuadrado del otro, dados dos números no negativos cuya suma es 1.

Resolución

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ f(x) = x^2 + 2y^2 \end{cases} \Longrightarrow y = 1 - x \Longrightarrow f(x) = x^2 + 2(1-x)^2$$

$$\therefore \; f(x) = 3x^2 - 4x + 2$$

9 **[PROBLEMA DE NÚMEROS]**. Se desea encontrar dos

números cuya suma sea 34 y cuya diferencia sea 10.

Resolución

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + \cancel{y} & = & 34 \\ x - \cancel{y} & = & 10 \end{array}\right. \Longrightarrow 2x = 44 \Longrightarrow x = 22$$

Reemplazando a la primera ecuación se tiene:

$x + y = 34 \Longrightarrow 22 + y = 34 \Longrightarrow y = 12$

Rpta: los números son 22 y 12.

10 **[PROBLEMA DE NÚMEROS]**. Se plantea encontrar dos números donde la suma sea el doble de su diferencia. Además, el número más grande se obtiene al sumarle 6 al doble del número más pequeño.

Resolución

a = más grande
b = pequeño

$$\left\{\begin{array}{rcl} a + b & = & 2(a-b) \\ a & = & 6 + 2b \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a + b & = & 2a - 2b \\ a & = & 6 + 2b \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \cancel{-a} + 3b & = & 0 \\ \cancel{a} - 2b & = & 6 \end{array}\right. \Longrightarrow b = 6$$

Reemplazando a la segunda ecuación se tiene:

$a - 2b = 6 \Longrightarrow a - 12 = 6 \Longrightarrow a = 18$

Rpta: los números son 6 y 18

11 **[VALOR DE MONEDAS]**. Un estudiante de la UNA - PUNO tiene 14 billetes en su bolsillo, todos ellos de denominaciones de 10 y 20 soles. El valor total de su cambio es de 270 soles. Se desea determinar la cantidad de billetes de 10 soles y de 20 soles que tiene.

Resolución

Sea:
x: billetes de \$10
y: billetes de \$20

$$\begin{cases} x+y &= 14 \\ 10x+20y &= 270 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\cancel{10x}-10y &= -140 \\ \cancel{10x}+20y &= 270 \end{cases} \Longrightarrow 10y = 130 \Longrightarrow y = 13$$

Remplazando a la primera ecuación se tiene.

$$x+y=14 \Longrightarrow x+13=14 \Longrightarrow x=1$$

Rpta: el alumno tiene un billete de s/. 10 y 13 billetes de s/. 20

12 **[PRECIO DE ENTRADA]**. En un parque de diversiones, el costo de entrada es de s/. 1,50 para los niños y s/. 4,00 para los adultos. Durante un día determinado, se registró un total de 2200 personas que ingresaron al parque, generando una recaudación total de s/. 5050 por la venta de boletos. Se busca determinar la cantidad de niños y adultos que ingresaron al parque.

Resolución

x =niños
y =adultos

$$\begin{cases} x+y & = & 2200 \\ 1{,}50x+4y & = & 5050 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -4x-\cancel{4y} & = & -8800 \\ 1{,}5x+\cancel{4y} & = & 5050 \end{cases} \Longrightarrow -2{,}5x=-3750 \Longrightarrow x=1500$$

Reemplazando a la primera ecuación y se tiene:

$$x+y=2200 \Longrightarrow 1500+y=2200 \Longrightarrow y=700$$

Rpta: ingresaron 1500 niños y 700 adultos

13 **[GASOLINERA]**. En una estación de servicio, se vende gasolina regular a s/. 2.20 por galón y gasolina premium a s/. 3.00 por galón. Al finalizar la jornada, se registró la venta de un total de 280 galones de gasolina, generando ingresos por s/. 680. Se desea determinar la cantidad de galones vendidos de cada tipo de gasolina.

Resolución

x: gasolina regular
y: gasolina premium

$$\begin{cases} x+y & = & 280 \\ 2{,}20x+3y & = & 680 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -3x-\cancel{3y} & = & -840 \\ 2{,}20x+\cancel{3y} & = & 680 \end{cases} \Longrightarrow -0{,}8x=-160 \Longrightarrow x=200$$

Remplazando a la primera ecuación se tiene.

$$x+y=280 \Longrightarrow 200+y=280 \Longrightarrow y=80$$

Rpta: se vendieron 80 galones de gas premiun y 200 galones de gas regular.

14 [**PUESTO DE FRUTAS**]. En el mercado central de la ciudad de Puno, hay un puesto que vende fresas en dos variedades: fresas estándar y fresas de lujo. El precio de un kilo de fresas estándar es de s/. 7, mientras que un kilo de fresas de lujo se vende por s/. 10. Durante un día, se vendieron en total 135 kilos de fresas, generando ingresos por s/. 1100. Se busca determinar la cantidad de kilos vendidos de cada tipo de fresas.

Resolución

x: fresa estándar
y: fresa de lujo

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 135 \\ 7x+10y & = & 1100 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} -10x-\cancel{10y} & = & -1350 \\ 7x+\cancel{10y} & = & 1100 \end{array}\right. \Longrightarrow -3x=-250 \Longrightarrow x=88{,}33$$

Remplazando a la primera ecuación se tiene.

$$x+y=135 \Longrightarrow 88{,}33+y=135 \Longrightarrow y=51{,}7$$

Rpta: se vendieron $88,33$ cajas de fresa estándar y $51,7$ cajas de fresa de lujo.

15 Considere el intervalo $[x_1, x_2]$ y la función lineal $f(x) = ax+b$, $a \neq 0$, Demuestre que $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) = \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

$a > 0$.

Resolución

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + b$$
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{b}{2} + \frac{b}{2}$$
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{ax_1}{2} + \frac{b}{2} + \frac{ax_2}{2} + \frac{b}{2}$$
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{(ax_1+b)+(ax_2+b)}{2}$$
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad \blacksquare$$

Ejercicios Propuestos

1. Formule una función que relacione el área de un triángulo equilátero con la longitud s de uno de sus lados.

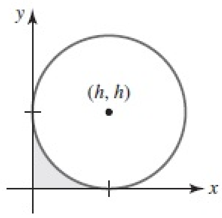
Resolución

2. Dado un alambre de longitud 200, se realiza un corte de longitud x desde uno de los extremos. A continuación, una porción del alambre se dobla en forma de cuadrado, mientras que la otra porción se dobla en forma de círculo. Se busca expresar la suma de las áreas resultantes como una función de x.

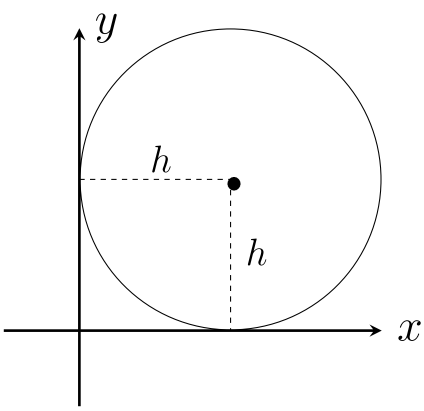
Resolución

Ejercicios Resueltos

1. En la figura, se muestra un círculo de radio h con centro en (h, h). Se desea expresar el área de la región sombreada A como una función de h.



Resolución



$$A_s = \text{Área del cuadrado - Área del sector circular}$$

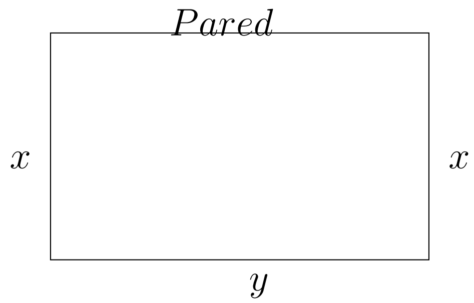
$$A_s = h^2 - \frac{\pi h^2}{4}$$

$$A_s = \frac{h^2}{4}(4 - \pi)$$

2. Una persona cuenta con 60 metros de alambre para cercar su jardín rectangular. Sin embargo, solo necesita cercar tres de

los lados, ya que el cuarto lado está delimitado por su casa. Se busca determinar el área máxima que puede cercar utilizando estos 60 metros de alambre.

Resolución



Área máxima: $A_{max} = xy$

Perímetro: $2x + y = 60$

Aplicando propiedad de Medias: $\overline{MA} \geqslant \overline{MG}$

$$\frac{2x+y}{2} \geqslant \sqrt{2xy}$$

$$\frac{60}{2} \geqslant \sqrt{2xy}$$

$$(30)^2 \geqslant \left(\sqrt{2xy}\right)^2$$

$$900 \geqslant 2xy$$

$$450 \geqslant xy$$

$$\therefore \quad A_{max} = xy = 450$$

3 La cantidad de calorías quemadas en una hora de ejercicio

en una máquina caminadora depende de la velocidad utilizada. Cuando una persona se ejercita a una velocidad de 2,5 km/h, quema 210 calorías, mientras que a una velocidad de 6 km/h, quema 370 calorías. Se desea determinar una función lineal $C(V)$ que se ajuste a estos datos, donde C representa las calorías quemadas en una hora y V es la velocidad de la caminadora.

Resolución

$V_1 = 2,5 \qquad C_1 = 210 ....(1)$

$V_2 = 6 \qquad C_2 = 370 ....(2)$

Función lineal a reemplazar: $C(V) = aV + b$

$$\begin{cases} 210 = a(2,5) + b \\ 370 = a(6) + b \end{cases} \Longrightarrow 160 = (3,5)a \Longrightarrow \begin{cases} a = 45,7 \\ b = 95,8 \end{cases}$$

$$\therefore \quad C(V) = 45,7V + 95,8$$

4 Se tiene el objetivo de construir un tanque horizontal de acero para almacenar gas propano, el cual tendrá la forma de un cilindro circular recto de longitud $3m$ con una semiesfera en cada extremo. Sin embargo, el radio r aún no ha sido determinado. Se busca expresar el volumen V del tanque como una función de r.

Resolución

El cálculo del volumen de la parte cilíndrica del tanque se puede realizar multiplicando la altura de $3m$ por el área de la base del cilindro, la cual es igual a πr^2.

$$volumen\ \ del\ \ cilindro = 3\pi r^2$$

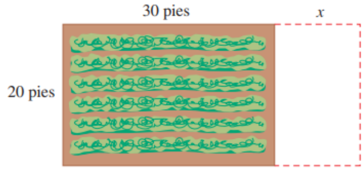
Los dos extremos semiesféricos del tanque juntos forman una esfera de radio r. Al aplicar la fórmula del volumen de una esfera, obtenemos el resultado correspondiente.

$$volumen\ \ de\ los\ dos\ extremos = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Por lo tanto, el volumen V del tanque es:

$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 + 3\pi r^2\ V = \dfrac{4}{3}\pi r^2(4r+9)$

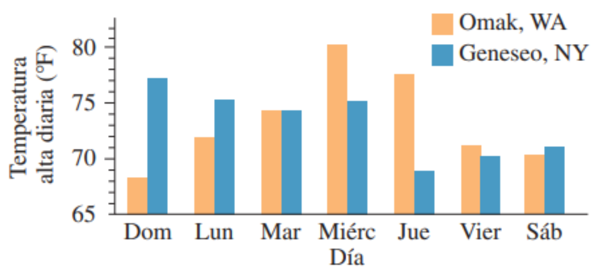
5 **[ÁREA DE UN JARDIN]** La propiedad distributiva de los números reales nos dice que la nueva área del jardín de legumbres, expresada como $A = 20(30+x)$, también se puede escribir como $A = 600 + 20x$.



Resolución

Aplicando la propiedad **distributiva** de números reales a $A = 20(30 + x)$ se tiene $A = 600 + 20x$

6 **[VARIACIÓN DE TEMPERATURA]** En la gráfica de barras se muestran las altas temperaturas diarias de Omak, Washington, y Geneseo, Nueva York, durante una semana específica en junio. Utilizando T_0 para representar la temperatura en Omak y T_G para representar la temperatura en Geneseo, se calcula la diferencia $T_0 - T_G$ y el valor absoluto $\mid T_0 - T_G \mid$ para cada día mostrado. ¿Cuál de estos dos valores proporciona más información?



Resolución

$DIAS$	$T_0 - T_G$	$\mid T_0 - T_G \mid$
$Lunes$	$72 - 75 = -3F^0$	$\mid 72 - 75 \mid= 3F^0$
$Martes$	$74 - 74 = 0F^0$	$\mid 74 - 74 \mid= 0F^0$
$Miercoles$	$81 - 75 = 6F^0$	$\mid 81 - 75 \mid= 6F^0$
$Jueves$	$78 - 69 = 9F^0$	$\mid 78 - 69 \mid= 9F^0$
$Vernes$	$71 - 70 = 1F^0$	$\mid 71 - 70 \mid= 1F^0$
$Sabado$	$70 - 71 = -1F^0$	$\mid 71 - 70 \mid= 1F^0$
$Domingo$	$68 - 77 = -9F^0$	$\mid 71 - 70 \mid= 9F^0$

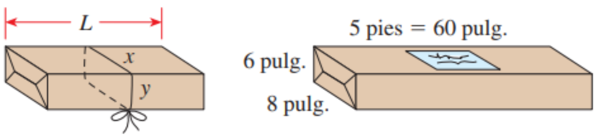
El valor de $T_0 - T_G$ proporciona información más detallada, ya que nos permite analizar tanto la diferencia de temperatura entre los días de la semana en las dos ciudades como también nos indica si la temperatura de una ciudad estuvo por encima o por debajo de la otra. Por ejemplo, considerando el día lunes, podemos observar que la temperatura en Omak, Washington, fue $3F$ más baja que en Geneseo, Nueva York. Por otro lado, el valor absoluto $\mid T_0 - T_G \mid$ solo nos da la diferencia de temperatura sin considerar la dirección (mayor o menor).

7 **[ENVIO DE UN PAQUETE POR CORREO]** La oficina de correos tiene una restricción en cuanto a los paquetes que acepta, la cual establece que la suma de la longitud más la circunferencia del paquete no debe ser mayor a 108 pulgadas.

Por lo tanto, para el paquete mostrado en la figura, debemos asegurarnos de que se cumpla la siguiente condición: $L+2(x+y) \leqslant 108$.

a) ¿La oficina de correos aceptara un paquete de 6 pulgadas de ancho, 8 pulgadas de profundidad y 5 pies de largo? ¿Y un paquete que mida 2 pies por 2 pies por 4 pies?

b) ¿Cuál es la máxima longitud aceptable para un paquete que tiene una base cuadrada que mide 9 pulgadas por 9 pulgadas?



Resolución

a) • $x = 8pulg$

$y = 6pulg$

$L = 60pulg.$

$L + 2(x + y) \leqslant 108$

$60 + 2(8 + 6) \leqslant 108$

$60 + 28 \leqslant 108$

$88 \leqslant 108$

$\therefore$Si aceptará la oficina de correos.

• Primero convertimos de pies a pulgadas

$x = 2\ pies \left(\dfrac{12\ pulg}{1\ pies}\right) = 24\ pulg$

$y = 2\ pies \left(\dfrac{12\ pulg}{1\ pies}\right) =$

$24\ pulg$

$L = 4\ pies\left(\frac{12\ pulg}{1\ pies}\right) =$

$48\ pulg$

$L + 2(x + y) \leqslant 108$

$48 + 2(24 + 24) \leqslant 108$

$48 + 96 \leqslant 108$

$144 \leqslant 108$ es absurdo

$\therefore$no aceptará la oficina de correos.

b) $x = 9pulg$

$y = 9pulg$

$L =?pulg.$

$L + 2(9 + 9) \leqslant 108$

$L + 36 \leqslant 108$

$L \leqslant 108 - 36$

$L \leqslant 72$

La longitud máxima aceptada para un paquete de base cuadrada que mide 9×9 es de 72 *pulgadas*.

8 **[DISTANCIA A LA ESTRELLA MÁS CERCANA]** Próxima Centauri, la estrella más cercana a nuestro sistema solar, se encuentra a una distancia de 4.3 años luz. Dado que un año luz equivale aproximadamente a 5,900,000,000,000 millas, utilizaremos esta información para expresar la distancia en millas.

Resolución

Datos:

$d = 4{,}3$ años luz

1 año luz = $5{,}9 \times 10^{11}$

de acuerdo al ejercicio nos pide expresar en millas:

$$4{,}3\left(\frac{5{,}9 \times 10^{11}}{1}\right) = 4{,}3\times5{,}4\times10^{11}\, millas = 2{,}5\times10^{12}\, millas$$

$\therefore$ Respuesta:$2{,}5 \times 10^{12}$ millas.

9 [**VELOCIDAD DE LA LUZ**] La velocidad de la luz es de aproximadamente $186,000$ millas/segundo. Utilizando la información de que el diámetro de un electrón es de alrededor de 0,0000000000004 centímetros, podemos calcular cuánto tiempo tarda un rayo de luz del Sol en llegar a la Tierra.

Resolución

datos:

velocidad de la luz: $c = 186000\ mill/s$

distancia de la tierra al sol: $d = 93 \times 10^6\ mill$

tiempo: $t =?$

entonces

$d = vt$

$93 \times 10^6 = 8600 \times t$

$\therefore 500seg = t$

10 [**VOLUMEN DE LOS OCÉANOS**] La profundidad promedio de los océanos es de $3{,}7 \times 10^3\ m$ y el área de los océanos

es de $3{,}6 \times 10^{14}$ m^2. Para determinar el volumen total del océano en litros, utilizamos la conversión de que un metro cúbico contiene 1000 litros.

Resolución

Datos:

profundidad: $h = 3{,}7 \times 10^3$

Área: $A = 3{,}6 \times 10^{14}$

Volúmen: v=??

entonces:

$V = A \times h$

$V = 3{,}6 \times 10^{14} \times 3{,}7 \times 10^3$

Por lo tanto

$V = 1{,}3 \times 10^8$ m^3

11 **[DEUDA NACIONAL]** En julio de 2010, la población de Estados Unidos era de $3{,}070 \times 10^8$ personas y la deuda nacional

ascendía a $1{,}320 \times 10^{13}$ dólares. Se desea determinar la parte de la deuda que corresponde a cada persona.

Resolución

Datos:

población: $p = 3{,}070 \times 10^{8}$

Deuda nacional $= 1320 \times 10^{13}$

parte que adeuda cada persona: X=???

entonces por regla de tres simple:

$3{,}070 \times 10^{8}$ personas ....$1{,}320 \times 10^{13}$

1 persona..............X

resulta:

$$X = \frac{1{,}320 \times 10^{13}}{3{,}070 \times 10^{8}}$$

$\therefore X = 4{,}3 \times 10^{4}$

12 [**NÚMERO DE MOLÉCULAS**] Una sala sellada en un hospital tiene dimensiones de 5 m de ancho, 10 m de largo y 3 m de alto, y está llena de oxígeno puro. Considerando que un metro cúbico contiene 1000 litros y que 22,4 litros de cualquier gas contienen $6{,}02 \times 10^{23}$ moléculas (número de Avogadro), se desea determinar la cantidad de moléculas de oxígeno presentes en la sala.

Resolución

$V = A \times h$

$V = l \times a \times h$

$V = 10m \times 5m \times 3m = 150m^3$

convirtiendo de m^3 a L(litros): $150m^3 \times 1000L/(1\ m^3) = 15 \times 10^4 L$

Resolviendo por regla de tres simple:

$6{,}02 \times 10^{23}$............,$22{,}4L$

x............,$15 \times 10^4 L$

Por lo tanto:

$(6{,}02 \times 10^{23} \times 15 \times 10^4)/(22{,}4) = 4{,}03125 \times 10^{27}$

el número de moléculas de oxígeno que hay en la sala es

$\therefore\ x = 4{,}03 \times 10^{27}$

13 [**ÁREA DE UNA ESFERA**] El área superficial S de un objeto es una función de su radio r y se puede calcular mediante la fórmula $S(r) = 4\pi r^2$.

a) Encuentre $S(2)$ y $S(3)$.

b) ¿Qué representa sus respuestas en la parte (a)?

Resolución

a).

$S(2) = 4\pi \times (2)^2 = 16\pi$

$S(3) = 4\pi \times (3)^2 = 36\pi$

b).

$S(2)$ representa el área de la superficie de una esfera de radio $r = 2$. Mientras $S(3)$ representa el área de la superficie de una esfera de radio $r = 3$

14 [**LEY DE TORRICELLI**]. Un tanque contiene 50 galones de agua, que se descarga por una fuga en el fondo, haciendo que el tanque se vacíe en 20 minutos. El tanque se descarga con más rapidez cuando está casi lleno porque es mayor la presión sobre la fuga. La Ley de Torricelli da el volumen de agua restante en el tanque después de t minutos como

$$V(t) = 50\left(1 - \frac{t}{20}\right)^2 \quad , \quad 0 \leqslant t \leqslant 20$$

a) Encuentre $V(0)$ y $V(20)$.

b) ¿Qué representan sus respuestas a la parte (a)?

c) Haga una tabla de valores de $V(t)$ para $t = 0,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20$.

Resolución

a).

- Para $v(0)$ $\Rightarrow$ $v(0) = 50\left(1 - \dfrac{0}{20}\right)^2 = 50$
- Para $v(20)$ $\Rightarrow$ $v(20) = 50\left(1 - \dfrac{20}{20}\right)^2 = 0$

b).

Representa el volumen de agua restante en el tanque después de $t = 0$ min

Representa el volumen de agua restante en el tanque después de $t = 20$ min.

c).

$TIEMPO\ \ (t)$	$VELOCIDAD\ \ (v)$
0	50
5	28.125
10	12.5
15	3.125
20	0

15 **¿A qué distancia puede usted ver?** Debido a la curvatura de la Tierra, la distancia máxima D que se puede ver desde la cubierta de observación de un edificio de altura h se

calcula utilizando la fórmula

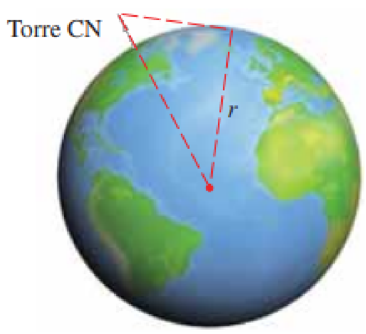
$$D = \sqrt{2rh + h^2}$$

donde $r = 3960$ millas es el radio de la Tierra, y tanto D como h se miden en millas. Se desea determinar a qué distancia se puede ver desde la cubierta de observación de la Torre CN de Toronto, que se encuentra a una altura de 1135 pies sobre el suelo.

a) Encuentre $D(0{,}1)$ y $D(0{,}2)$.

b) ¿A qué distancia puede usted ver desde la cubierta de observación de la Torre CN de Toronto, a 1135 pies del suelo?

c) Los aviones comerciales vuelan a una altitud de unas 7 millas. ¿A qué distancia puede ver el piloto?



Resolución

a).

- $D(0{,}1) = \sqrt{2(3960)(0{,}1) + (0{,}1)^2} = 28{,}14$ millas

- $D(0{,}2) = \sqrt{2(3960)(0{,}2) + (0{,}2)^2} = 39{,}8$ millas

b).

$h = 1135$ pies

$h = 1135\ pies.\ \dfrac{1\ milla}{5280\ pies}$

$h = 0{,}215$ millas

$D(0{,}215) = \sqrt{2(3960)(0{,}215) + (0{,}215)^2} = 41{,}26$ millas

c).

$D(7) = \sqrt{2(3960)(7) + (7)^2} = 235{,}56$ millas

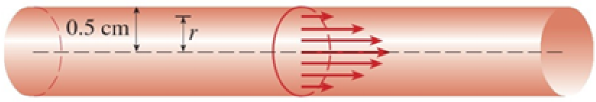
16 [**CIRCULACIÓN SANGUÍNEA**] Cuando la sangre circula por una vena o una arteria, su velocidad v alcanza su máximo en el eje central y disminuye a medida que aumenta la distancia r desde dicho eje (como se muestra en la figura). La fórmula que describe la relación entre v y r se conoce como la ley de flujo laminar. Para una arteria con un radio de 0,5 cm, la función que relaciona v (en cm/s) con r (en cm) se expresa de la siguiente manera:

$$v(r) = 18{,}500\left(0{,}25 - r^2\right) \quad , \quad 0 \leqslant r \leqslant 0{,}5$$

a) Encuentre $v(0,1)$ y $v(0,4)$.

b) ¿Qué le dicen sus respuestas a la parte (a) acerca de la circulación sanguínea en esta arteria?

c) Haga una tabla de valores de $v(r) = 0,\ 0{,}1,\ 0{,}2,\ 0{,}3,\ 0{,}4,\ 0{,}5.$



Resolución

a).

- $v(0{,}1) = 18{,}500\left(0{,}25 - (0{,}1)^2\right) = 4440\ cm/s$

- $v(0{,}4) = 18{,}500\left(0{,}25 - (0{,}4)^2\right) = 1665\ cm/s$

b).

- Significa que la sangre se mueve a través de una vena o arteria de radio $0,1$ cm a una velocidad de 4440 cm/s.

- Significa que la sangre se mueve a través de una vena o arteria de radio 0,4 cm a una velocidad de 1665 cm/s

c).

$RADIO \quad (r\ cm)$	$VELOCIDAD \quad (v\ cm/s)$
0	4625
0.1	4440
0.2	3885
0.3	2960
0.4	1665
0.5	0

17 **[TAMAÑO DE LA PUPILA]** Cuando se incrementa la brillantez x de una fuente de luz, el ojo reacciona reduciendo el radio R de la pupila. La relación entre R y x se describe mediante la función:

$$R(x) = \sqrt{\frac{13 + 7x^{0,4}}{1 + 4x^{0,4}}}$$

En esta función, el valor de R se mide en milímetros y x se mide en unidades de brillantez adecuadas.

a) Encuentre $R(1)$, $R(10)$ y $R(100)$.

b) Haga una tabla de valores de $R(x)$.

Resolución

a).

- $R(1) = \sqrt{\dfrac{13 + 7(1)^{0,4}}{1 + 4(1)^{0,4}}} = \sqrt{\dfrac{20}{5}} = 2$
- $R(10) = \sqrt{\dfrac{13 + 7(10)^{0,4}}{1 + 4(10)^{0,4}}} = \sqrt{\dfrac{30}{11}} = 1{,}66$
- $R(100) = \sqrt{\dfrac{13 + 7(100)^{0,4}}{1 + 4(100)^{0,4}}} = \sqrt{\dfrac{57}{26}} = 1{,}48$

b).

x	$R(x)$
1	2
10	1.66
100	1.48

18 **[RELATIVIDAD]** Según la Teoría de la Relatividad, la longitud L de un cuerpo es una función de su velocidad v con respecto a un observador. Para un cuerpo cuya longitud en

reposo es 10 m, la función está dada por

$$L(v) = 10\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

donde c es la velocidad de la luz $(300,000 \text{ km/s})$.

a) Encuentre $L(0{,}5c)$, $L(0{,}75c)$ y $L(0{,}9c)$.

b) ¿Cómo cambia la longitud de un cuerpo cuando aumenta su velocidad?

Resolución

a).

- $L(0{,}5c) = 10\sqrt{1 - \frac{(0{,}5c)^2}{c^2}} = 10\sqrt{1 - (0{,}5)^2} = 8{,}66\ m$
- $L(0{,}75c) = 10\sqrt{1 - \frac{(0{,}75c)^2}{c^2}} = 10\sqrt{1 - (0{,}75)^2} = 6{,}61\ m$
- $L(0{,}9c) = 10\sqrt{1 - \frac{(0{,}9c)^2}{c^2}} = 10\sqrt{1 - (0{,}9)^2} = 4{,}36\ m$

b).

La longitud de un objeto disminuye a medida que se aumenta su velocidad.

19 **[IMPUESTO SOBRE LA RENTA]** En un determinado país, el impuesto sobre la renta T se calcula en función del ingreso x utilizando la siguiente función:

$$T(x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leqslant x \leqslant 10000 \\ 0{,}08 & si \quad 10000 < x \leqslant 20000 \\ 1600 + 0{,}15x & si \quad 20000 < x \end{cases}$$

a) Encuentre $T(5000)$, $T(12000)$ y $T(25000)$.

b) ¿Cuál es el significado de sus respuestas en la pregunta (a)?

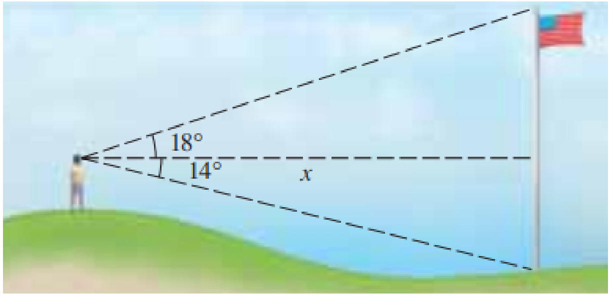
Resolución

a)
- $T(5000) = 0$
- $T(12000) = 0{,}08(12000) = 960$
- $T(25000) = 1600 + 0{,}15(25000) = 5350$

b) La respuesta en la parte (a) indica que existe una relación directa entre el ingreso y el impuesto de renta, donde a medida que el ingreso aumenta, también lo hace el impuesto, y viceversa.

20 **[DETERMINACIÓN DE UNA DISTANCIA]** Una mujer se encuentra parada en una colina y desde allí observa una astabandera cuya altura se conoce que es de 60 pies. El ángulo de depresión a la parte inferior del poste es de 14^0, mientras que el ángulo de elevación hacia la parte superior del poste es de 18^0. Se busca determinar la distancia, representada

como x, entre la mujer y el poste.



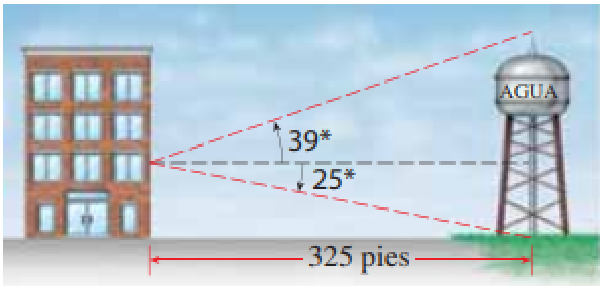
Resolución

De la figura se tiene:

$$\begin{aligned} x\tan(18^0) + x\tan(14^0) &= 60 \\ x\left(\tan(18^0) + \tan(14^0)\right) &= 60 \\ x &= \frac{60}{\tan(18^0) + \tan(14^0)} \\ x &= 104{,}5 \end{aligned}$$

Rta: La distancia de la mujer al poste es de 105 pies.

21 [**ALTURA DE UNA TORRE**] Existe una torre de agua ubicada a una distancia de 325 pies de un edificio (ver figura). Desde una ventana del edificio, un observador nota que el ángulo de elevación hacia la parte superior de la torre es de 39^0, mientras que el ángulo de depresión de la parte inferior de la torre es de 25^0. Se busca determinar la altura de la torre y la altura de la ventana.



Resolución

De la figura se tiene:

$$H_{altura} = 325\tan(25^0) + 325\tan(39^0)$$

$$H_{altura} = 325\left(\tan(25^0) + \tan(39^0)\right)$$

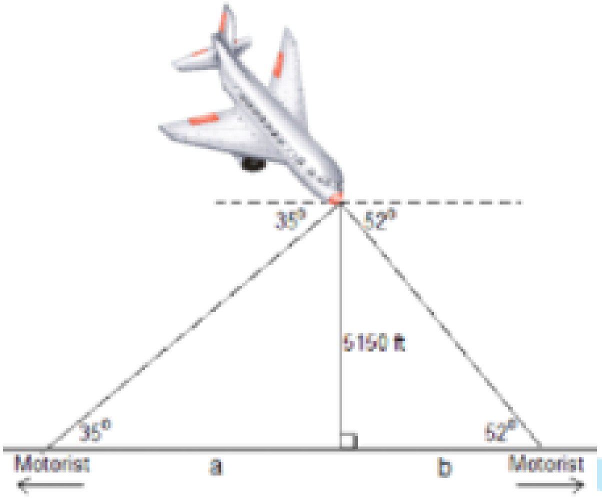
$$H_{altura} = 151{,}55 + 263{,}18$$

$$\therefore\ H_{altura} = 414{,}73 \text{ pies}$$

22 **[DETERMINAR UNA DISTANCIA]** Un avión se encuentra volando a una altitud de 5150 pies, directamente sobre una carretera recta. Dos automovilistas se desplazan en sus autos por la carretera, ubicados en lados opuestos del avión. El ángulo de depresión desde la posición del avión hacia uno de los automóviles es de 35^0, mientras que hacia el otro automóvil es de 52^0. Se busca determinar la distancia entre los dos automóviles.

Resolución

- $\tan(35^0) = \dfrac{5150}{a} \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{5150}{\tan(35^0)} = 4024$



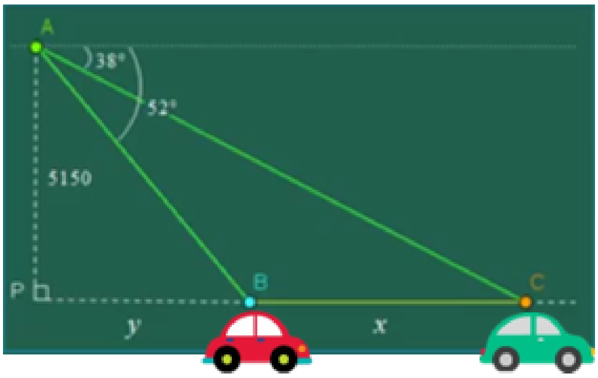
- $\tan(52^0) = \dfrac{5150}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \dfrac{5150}{\tan(52^0)} = 7355$

$$\begin{aligned} d_{Total} &= a + b \\ d_{Total} &= 4024 + 7355 \\ d_{Total} &= 11379 \end{aligned}$$

Rta: La distancia a la que están entre sí los dos autos es de 11379 pies

23 [**DETERMINAR UNA DISTANCIA**] Un avión se encuentra volando a una altitud de 5150 pies. Los dos automóviles se encuentran en un lado del avión y se observa que el ángulo de depresión desde la posición del avión hacia uno de los automóviles es de 38^0, mientras que hacia el otro automóvil es de 52^0. Se desea determinar la distancia entre los dos automóviles.

Resolución



- $\tan(52^0) = \dfrac{5150}{y} \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{5150}{\tan(52^0)} = 6591{,}69$
- $\tan(38^0) = \dfrac{5150}{y+x}$

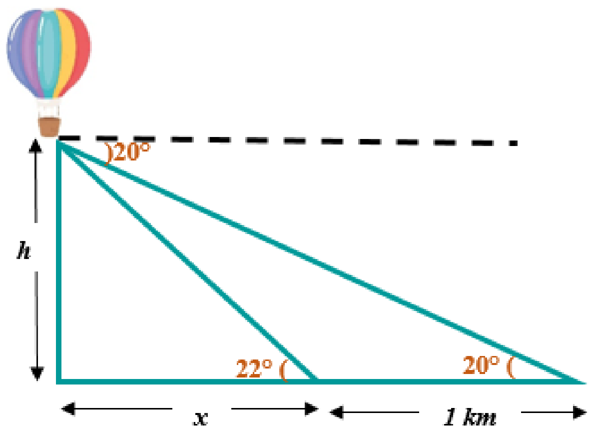
$$\begin{aligned} \tan(38^0)\,(y+x) &= 5150 \\ y+x &= \frac{5150}{\tan(38^0)} \\ x &= \frac{5150}{\tan(38^0)} - y \\ x &= \frac{5150}{\tan(38^0)} - 6591{,}69 \\ x &= 2575 \end{aligned}$$

Rta: La distancia la que están entre sí los dos autos es de 2575 pies.

24 **[ALTURA DE UN GLOBO]** Un globo de aire caliente se encuentra flotando sobre una carretera recta. Para calcular la altura a la que se encuentran los tripulantes del globo, ellos miden simultáneamente el ángulo de depresión hacia dos

señalamientos consecutivos de kilómetros ubicados en la misma dirección del globo. Los ángulos de depresión medidos son de 20^0 y 22^0. Se busca determinar la altura a la que se encuentra el globo.

Resolución



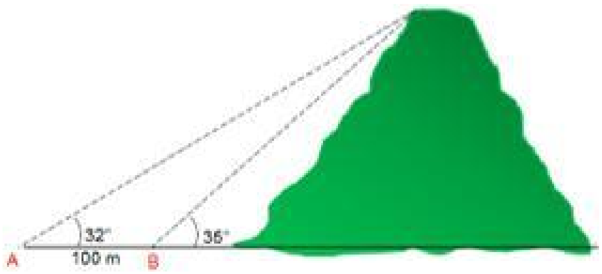
- $\tan(22^0) = \dfrac{h}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{h}{\tan(22^0)} = h\cot(22^0)$
- $\tan(20^0) = \dfrac{h}{1+x}$

$$\begin{aligned}
\tan(20^0)(1+x) &= h\\
\tan(20^0)\left(1+h\cot(22^0)\right) &= h\\
\tan(20^0) + h\tan(20^0)\cot(22^0) &= h\\
\tan(20^0) &= h - h\tan(20^0)\cot(22^0)\\
\tan(20^0) &= h\left(1-\tan(20^0)\cot(22^0)\right)\\
\frac{\tan(20^0)}{1-\tan(20^0)\cot(22^0)} &= h\\
3{,}7 &= h
\end{aligned}$$

Rta: La altura a la que está el globo es de 3,7 km.

25 **[ALTURA DE UNA MONTAÑA]** Con el fin de estimar la altura de una montaña sobre una meseta, se realiza la medición del ángulo de elevación hacia la cima de la montaña, el cual resulta ser de 32^0. Luego, se realiza una segunda medición a una distancia de 1000 metros más cerca de la montaña a lo largo de la meseta, y se obtiene un ángulo de elevación de 35^0. Se busca estimar la altura de la montaña.

Resolución



- $\tan(35^0) = \dfrac{h}{x} \Rightarrow \; x = \dfrac{h}{\tan(35^0)} = h\cot(35^0)$

- $\tan(32^0) = \dfrac{h}{1000+x}$

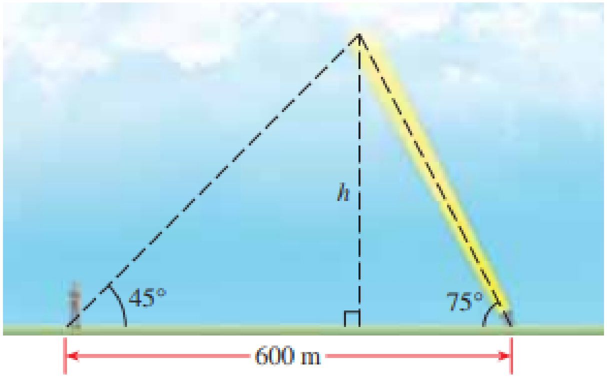
$$\begin{aligned}
\tan(32^0)\,(1000+x) &= h\\
\tan(32^0)\left(1000+h\cot(35^0)\right) &= h\\
1000\tan(32^0)+h\tan(32^0)\cot(35^0) &= h\\
1000\tan(32^0) &= h-h\tan(32^0)\cot(35^0)\\
1000\tan(32^0) &= h\left(1-\tan(32^0)\cot(35^0)\right)\\
\frac{1000\tan(32^0)}{1-\tan(32^0)\cot(35^0)} &= h\\
5807{,}2 &= h
\end{aligned}$$

Rta: La altura de la montaña es de 5807 pies.

26 **[ALTURA DE UNA CAPA DE NUBES]** Con el propósito de medir la altura de la capa de nubes en un aeropuerto, un trabajador enciende un reflector y lo dirige hacia arriba formando un ángulo de 75^0 con respecto a la horizontal. Un observador situado a una distancia de 600 metros realiza la medición del ángulo de elevación del reflector y observa que es de 45^0. Se desea encontrar la altura h de la capa de nubes.

Resolución

De la figura se tiene:



$$h\cot(45^0) + h\cot(75^0) = 600$$

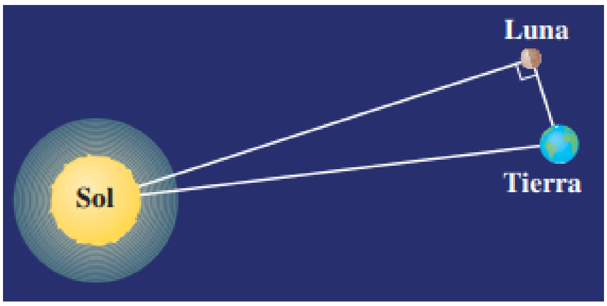
$$h\left(\cot(45^0) + \cot(75^0)\right) = 600$$

$$h = \frac{600}{\cot(45^0) + \cot(75^0)}$$

$$h = 473{,}18$$

$$\therefore \; h \approx 473 \;\; \text{m}$$

27 **[DISTANCIA AL SOL]** Cuando la Luna se encuentra en su fase de cuarto creciente, la Tierra, la Luna y el Sol forman un ángulo de 90 (ver figura). En ese momento, se mide el ángulo formado por el Sol, la Tierra y la Luna, y se obtiene un valor de 89,85. Si la distancia entre la Tierra y la Luna es de 240,000 millas, se desea estimar la distancia entre la Tierra y el Sol.



Resolución

Por razones trigonométricas:

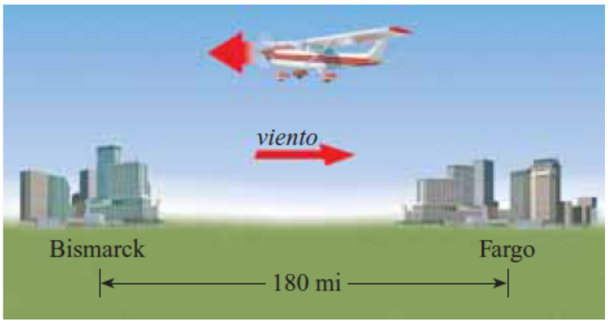
$$cos(89{,}85) = \frac{240000}{x}$$

$$x = \frac{240000}{0{,}00261799088}$$

$$x = 91673351{,}94$$

$\therefore \;\; x \approx 91{,}7$ millones de millas

28 **[VELOCIDAD DE UN AVION]** Un hombre realiza un vuelo en un pequeño avión desde Fargo hasta Bismarck, Dakota del Norte, cubriendo una distancia de 180 millas. Debido a que realiza el vuelo en contra del viento, el viaje le lleva 2 horas. En el viaje de regreso, el viento sigue soplando a la misma velocidad, lo que permite que el viaje se realice en solo 1 hora y 12 minutos. Se busca determinar la velocidad del piloto en condiciones de calma, es decir, sin viento, y la velocidad a la que sopla el viento.



Resolución

x: velocidad del avión (piloto)

y: velocidad del viento

d=v·t $\rightarrow$ v=$\dfrac{d}{t}$

1 hora · 12 min = $\dfrac{h}{60min} = 1,2hrs$

- velocidad con viento en calma = d/t

V$_{encalma} = \dfrac{180}{1{,}2} = 150$

V$_{encontra} = \dfrac{180}{2} = 90$

x-y=90

x+y=150

2x=240

x=120

x-y=90

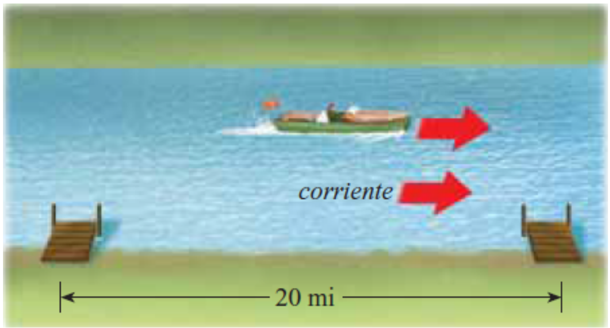
120-y=90

y=30

Rpta: la velocidad del piloto con el viento en calma es 120mi/h y la velocidad del viento es 30mi/h

29 **[VELOCIDAD DE UN BOTE]** Un bote se desplaza aguas abajo en un río entre dos puntos, distantes 20 millas, en un tiempo de una hora. Por otro lado, el viaje de regreso, en contra de la corriente, tarda 2 horas y media. Se busca de-

terminar la velocidad del bote y la velocidad de la corriente del río.



Resolución

DATOS:

- d = 20 millas
- y = velocidad de la corriente
- x = velocidad del bote

d = v·t

$$v = \frac{20}{2{,}5} = 8$$

$$v = \frac{20}{1} = 20$$

x+y=20	x+y=20
x-y=8	14+y=20
2x=28	y=6
x=14	

Rpta: la velocidad del bote es de 14 mi/h y de la corriente es de 6mi/h

30 **[NUTRICION]** Una investigadora lleva a cabo un experimento para probar una hipótesis relacionada con los nutrientes **niacina** y **retinol**. Para ello, alimenta a un grupo de ratas de laboratorio con una dieta diaria compuesta exactamente por 32 unidades de **niacina** y 22 unidades de **retinol**. Utiliza dos tipos de alimentos comerciales en forma de pastillas. El alimento A contiene 0.12 unidades de **niacina** y 100 unidades de **retinol** por gramo, mientras que el alimento B contiene 0.20 unidades de **niacina** y 50 unidades de **retinol** por gramo. Se desea determinar la cantidad de gramos de cada alimento que la investigadora proporciona diariamente al grupo de ratas.

Resolución

- x: cantidad de alimento A
- y. cntidad de alimento B

$1\cdot 0.12x + 0.20y = 32$

$2\cdot 100x + 50y = 22000$

$0.12x = 32 \cdot 0.20y$

$$x = \frac{800}{3} - \frac{5y}{3}$$

$$100\left(\frac{800}{3} - \frac{5y}{3}\right) + 50y = 22000$$

$$\frac{80000}{3} - \frac{500y}{3} + 50y = 22000$$

$$\frac{-350y}{3} = \frac{-14000}{3}$$

$y = 40g$

$$x = \frac{800}{3} - 5 \cdot \frac{40}{3}$$

$x = 200g$

Rpta: Ella le da 40g del alimento B y 200g del alimento A.

31 **[MEZCLAS DE CAFE]** Un cliente en una cafetería adquiere una mezcla de dos variedades de café: Kenia, que tiene un costo de s/. 3.50 por kg, y Sri Lanka, que tiene un costo de s/. 5.60 por kg. El cliente compra tres libras de la mezcla en total, lo cual le cuesta s/. 11.55. Se desea determinar la cantidad de kg de cada variedad de café que fueron utilizadas en la mezcla.

Resolución

x = kg de café Kenia

y = kg de café lanka

-(3.50)x + y = 3

3.50x + 5.60y = 11.55

-3.50x - 3.50y = -10.50

3.50x + 5.60y = 11.55

2.10y = 1,05

y = 0,5

x + y = 3 → x + 0,5 = 3 → x = 2,5

Rpta: en la mezcla entro 2,5 kg de café kenia y 0,5 kg de café lanka

32 **[PROBLEMA DE MEZCLAS]** Un químico posee dos grandes contenedores de solución de ácido sulfúrico, los cuales tienen diferentes concentraciones de ácido en cada uno. Al mezclar 300 ml de la primera solución con 600 ml de la segunda solución, obtiene una mezcla que tiene una concentración ácida del 15 %. Por otro lado, al mezclar 100 ml de la primera solución con 500 ml de la segunda solución, obtiene una mezcla con una concentración ácida del 12.5 %. Se desea determinar las concentraciones de ácido sulfúrico en los contenedores originales.

Resolución

•x = la concentración de la primera mezcla

•y = la concentración de la segunda mezcla

300x + 600y = 0,15(900)

-3 (100x + 500y = 0,125 ·600)

300x + 600y = 13

-300x - 1500y = -225

-900y = -90 → y = $\dfrac{-90}{-400}$ → y= 0,10

100x + 500y = 75

100x + 500 (0,10) = 75

100x = 75 - 50

100x = 25

x = 0,25

Rpta: el primer contenido tiene una mezcla de ácido sulfúrico a una concentración del 25 %. El segundo contenido tiene una concentración del 10 %

33 **[PROBLEMA DE MEZCLAS]** Una bióloga dispone de dos soluciones de salmuera, una con una concentración de sal del 5 % y otra con una concentración de sal del 20 %. Se busca determinar la cantidad de mililitros de cada solución que debe mezclar para obtener 1 litro de una solución que contenga un 15 % de sal.

Resolución

- x = cantidad de sal en la primera
- y = cantidad de sal en la segunda

-0,20 (x + y = 1000)

0,05x + 0,20y = 140

-0,20x - 0,20y = -200

0,05x + 0,20y = 140

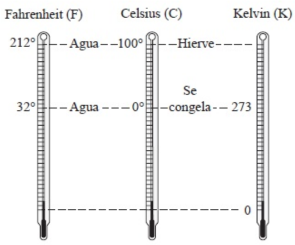
-0,15x = -60

$$x = \frac{-60}{-0,15}$$
$$x = 400$$

Rpta: la bióloga tendrá 400 mL en la primera salmuera al 5 % de sal y 600 mL en la segunda salmuera al 20 % de sal.

Modelado con Funciones

1. **Temperaturas relacionadas** La relación funcional entre grados Celsius T^oC y grados Fahrenheit T^oF es lineal. Exprese T^oF como una función de T^oC si $(0^oC, 32^oF)$ y $(60^oC, 140^oF)$ están en la gráfica de T^oF. Muestre que 100^oC es equivalente al punto de ebullición Fahrenheit 212^oF. Vea la figura.



Resolución

2. **Temperaturas relacionadas** La relación funcional entre grados Celsius T^oC y unidades kelvin T^oK es lineal. Exprese T^oK como una función de T^oC dado que $(0^oC, 273^oK)$ y $(27^oC, 300^oK)$ están en la gráfica de T^oK. Exprese el punto de ebullición 100^oC en unidades kelvin. El cero absoluto se define como 0^oK. ¿A qué es igual esto en grados Celsius? Exprese T^oK como una función lineal de T^oF. ¿A qué es igual 0^oK en grados Fahrenheit? Vea la figura del ejercicio anterior.

Resolución

3 **Interés simple** En interés simple la cantidad A devengada con el paso del tiempo es la función lineal $A = P + Prt$, donde P es el capital, t se mide en años y r es la tasa de interés anual (expresada como un decimal). Calcule A al cabo de 20 años si el capital es $P = 1000$ y la tasa de interés anual es 3,4 %. ¿En qué instante se cumple que $A = 2200$?

Resolución

4 **Depreciación lineal** La depreciación de línea recta, o depreciación lineal, consta de un artículo que pierde toda su utilidad inicial de A dólares a lo largo de un periodo de n años por una cantidad $\dfrac{A}{n}$ anual. Si un artículo que cuesta \$ 20 000 cuando está nuevo se deprecia linealmente a lo largo de 25 años, determine la función lineal que proporciona el valor V después de x años, donde $0 \leqslant x \leqslant 25$. ¿Cuál es el valor del artículo al cabo de 10 años?

Resolución

5 Una pelota se lanza hacia

arriba desde el nivel del piso con una velocidad inicial de 96 pies/s. La altura que alcanza la pelota con respecto al suelo está dada por la función cuadrática $S(t) = -16t^2 + 96t$. ¿En qué instante la pelota está en el suelo? Grafique S sobre el intervalo de tiempo para el cual $S(t) \geqslant 0$.

Resolución

6 En el problema 5, ¿en qué instante la pelota está a 80 pies por arriba del piso? ¿Cuán alto asciende la pelota?.

Resolución

7 ¿Cómo encontraría una ecuación de la recta que es perpendicular a la bisectriz del segmento de la recta que pasa por $\left(\frac{1}{2}, 10\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$?

Resolución

8 Usando sólo los conceptos presentados en esta sección, ¿cómo demostraría o refutaría que el triángulo con vértices $(2, 3)$, $(-1, -3)$ y $(4, 2)$ es rectángulo?

Resolución

Resolución

9 Temperatura Fahrenheit Suponga que:

$$T(t) = 50 + 10\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}(t-8), \quad 0 \leqslant t \leqslant 24$$

es un modelo matemático de la temperatura Fahrenheit a las t horas después de medianoche durante un cierto día de la semana.

a) ¿Cuál es la temperatura a las 8 a.m.?

b) ¿A qué hora(s) se cumple $T(t) = 60$?

c) Encuentre las temperaturas máxima y mínima, así como las horas a que ocurren.

10 Aceleración debida a la gravedad Debido al movimiento de rotación de la Tierra, la forma de ésta no es esférica, sino que se elonga en el ecuador y se achata en los polos. Como resultado, la aceleración debida a la gravedad no es la constante 980 cm/s^2, sino que varía con la latitud θ. Estudios satelitales han sugerido que la aceleración debida a la gravedad g es aproximada por el modelo matemático

$$g = 978{,}0309 + 5{,}18552\,\text{sen}^2\theta - 0{,}005$$

Encuentre g

a) En el ecuador ($\theta = 0^o$)

b) En el polo norte y

c) A 45^o latitud norte

Resolución

11 **Lanzamiento de bala** El alcance de una bala soltada desde una altura h por arriba del nivel del piso con una velocidad inicial v_0 a un ángulo ϕ con respecto a la horizontal puede aproximarse por el modelo matemático:

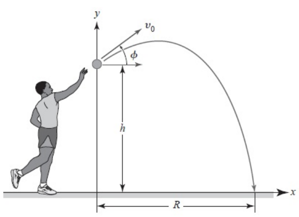
$$R = \frac{v_0 \cos\phi}{g}\left[v_0 \operatorname{sen}\phi + \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2\phi + 2g\right.$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Vea la figura.

a) Si $v_0 = 13{,}7$ m/s, $\phi = 40^o$ y $g = 9{,}8\ m/s^2$, compare los alcances que se obtienen para las alturas $h = 2{,}0$ m y $h = 2{,}4$ m.

b) Explique por qué un incremento en h produce un incremento en el alcance R si los otros parámetros se mantienen fijos.

c) ¿Qué implica lo anterior respecto a la ventaja que la altura otorga a un lanzador de bala?



Resolución

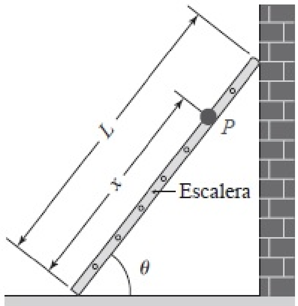
12 Considere una escalera de longitud L apoyada en un muro con una carga en el punto P como se muestra en la figura. El ángulo β? al que la escalera está al borde de deslizarse, está definido por:

$$\frac{x}{L} = \frac{c}{1 + c^2(c + \tan\beta)}$$

donde c es el coeficiente de fricción entre la escalera y el piso.

a) Encuentre β cuando $C = 1$ y la carga está en la parte superior de la escalera.

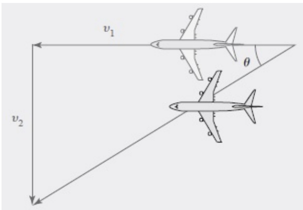
b) Encuentre β cuando $c = 0{,}5$ y la carga está a $\frac{3}{4}$ de la longitud de la escalera empezando desde el piso.



Resolución

13 Un avión se desplaza hacia el oeste a velocidad constante v_1 cuando sopla viento desde el norte a velocidad constante v_2. El rumbo del avión al sur del oeste está dado por: $\theta = tan^{-1}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$. Vea la figura. Encuentre el rumbo de un

avión que se desplaza hacia el oeste a 300 km/h si sopla viento desde el norte a 60 km/h.

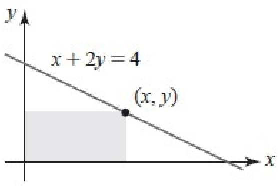


Resolución

14 Sean m y n enteros positivos. La suma de dos números no negativos es S. Exprese el producto de la m-ésima potencia de uno y la n-ésima potencia del otro como una función de uno de los números.

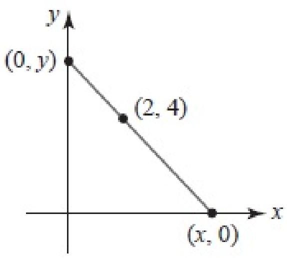
Resolución

15 Exprese el área del rectángulo sombreado en la **figura** como una función de x.



Resolución

16 Exprese la longitud del segmento de recta que contiene al punto $(2, 4)$ mostrado en la **figura** como una función de x.



Resolución

17 Exprese como una función de x la distancia de un punto (x, y) sobre la gráfica de $x + y = 1$ al punto $(2, 3)$.

Resolución

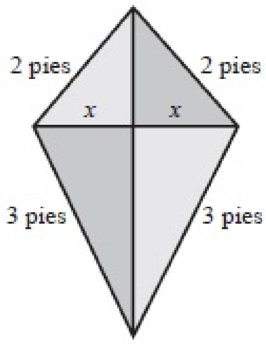
18 Exprese como una función de x la distancia de un punto (x, y) sobre la gráfica de $y = 4 - x^2$ al punto $(0, 1)$.

Resolución

19 Un ranchero desea cercar un corral rectangular cuya área es de 1000 $pies^2$ usando dos tipos de valla distintos. A lo largo de dos lados paralelos, la valla cuesta \$ 4 por pie. Para los otros dos lados paralelos, la valla cuesta \$ 1.60 por pie. Exprese el costo total para cercar el corral como una función de la longitud de uno de los lados con valla que cuesta \$ 4 por pie.

Resolución

20 El marco de un cometa consta de seis partes de plástico ligero. El marco externo del cometa consta de cuatro partes cortadas de antemano; dos partes de longitud 2 pies y dos partes de longitud 3 pies. Exprese el área del cometa como una función de x, donde $2x$ es la longitud de la barra transversal horizontal mostrada en la **figura**.

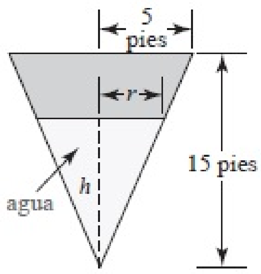


Resolución

21 Una empresa desea construir una caja rectangular abierta con un volumen de 450 $pulg^3$, de modo que la longitud de su base sea tres veces su ancho. Exprese el área superficial de la caja como una función de su ancho.

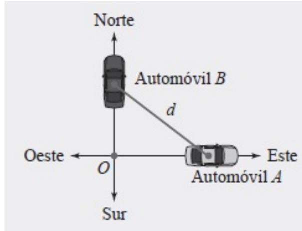
Resolución

22 Un tanque cónico, con el vértice hacia abajo, tiene un radio de 5 pies y una altura de 15 pies. Vea la **figura**. Hacia el tanque se bombea agua. Exprese el volumen del agua como una función de su profundidad. [*Sugerencia*: El volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$]



Resolución

23 El automóvil A pasa por el punto O en dirección al este a velocidad constante de 40 mi/h; el automóvil B pasa por el mismo punto 1 hora después en dirección al norte a velocidad constante de 60 mi/h. Exprese la distancia entre los automóviles como una función del tiempo t, donde t se mide empezando cuando el automóvil B pasa por el punto O. Vea la **figura**.



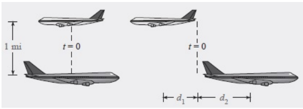
Resolución

24 En el instante $t = 0$ (medido en horas), dos aviones con una separación vertical de 1 min pasan uno encima del otro, volando en direcciones opuestas. Vea la **figura**. Los aviones vuelan horizontalmente a velocidades de 500 min/h y 550 min/h.

a) Exprese la distancia horizontal entre los aviones como una función de t. [*Sugerencia* : Distancia

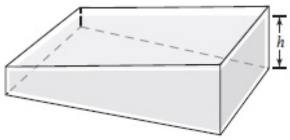
= velocidad × tiempo.]

b) Exprese la distancia diagonal entre los aviones como una función de t.



Resolución

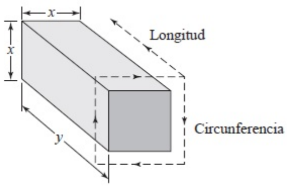
25 La piscina que se muestra en la **figura** mide 3 pies de profundidad en la parte poco profunda, 8 pies en la profunda, 40 pies de largo, 30 pies de ancho y el fondo es un plano inclinado. Hacia la piscina se bombea agua. Exprese el volumen del agua en la piscina como una función de la altura h del agua por arriba del extremo profundo. [*Sugerencia*: El volumen es una función definida por partes con dominio definido por $0 \leqslant h \leqslant 8$.]



Resolución

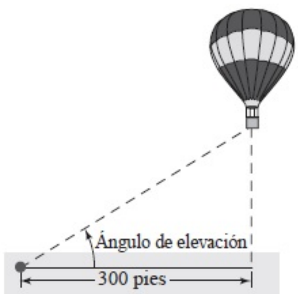
26 Las regulaciones del Servicio Postal de Estados Unidos de América para el envío de paquetes postales estipulan que la longitud más la circunferencia (el perímetro de un extremo) de un paquete no debe exceder 108 pulg. Exprese el volumen del paquete como una función del

ancho x mostrado en la **figura**.



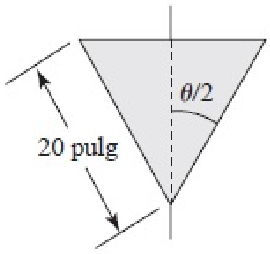
Resolución

27 Exprese la altura del globo mostrado en la **figura** como una función de su ángulo de elevación.



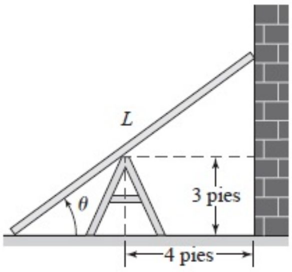
Resolución

28 A una gran plancha metálica de 40 pulg de ancho se da forma de V al doblarla por la mitad a lo largo de su longitud. Exprese el área de la sección transversal triangular del canal como una función del ángulo θ en el vértice de la V. Vea la **figura**.



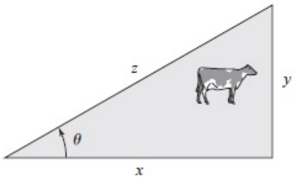
Resolución

29 Como se muestra en la **figura**, un tablón está apoyado en un caballeta, de modo que un extremo está apoyado en el suelo y el otro contra una construcción. Exprese la longitud L del tablón como una función del ángulo θ indicado. [*Sugerencia*: Use dos triángulos rectángulos.]

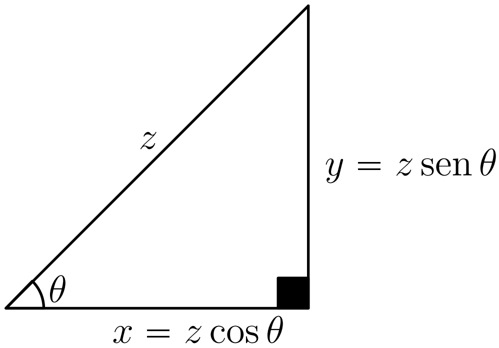


Resolución

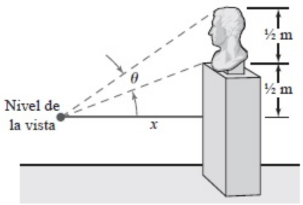
30 Un ranchero desea cercar un terreno de pasto en forma de triángulo rectángulo usando 2 000 pies de valla a la mano. Vea la **figura**. Exprese el área de ese terreno como una función del ángulo θ. [*Sugerencia*: Use los símbolos en la figura para formar $\cot\theta$ y $\csc\theta$.]



Resolución

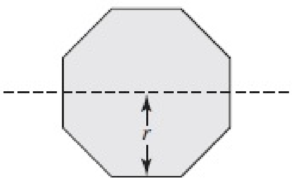


31 Una estatua se coloca en un pedestal como se muestra en la **figura**. Exprese el ángulo de visión θ como una función de la distancia x desde el pedestal.



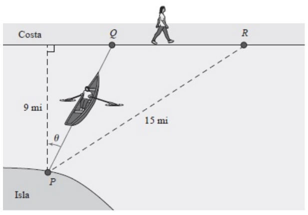
Resolución

32 En un texto de ingeniería, el área del octágono mostrado en la **figura** está dada por $A = 3{,}31r^2$. Demuestre que esta fórmula es en realidad una aproximación al área; es decir, encuentre el área exacta A del octágono como una función de r.



Resolución

33 Una mujer en una isla desea llegar a un punto R en una costa recta desde un punto P en la isla. El punto P está a 9 min de la costa y a 15 min del punto R. Vea la **figura**. Si la mujer rema en un bote a una velocidad de 3 min/h hacia un punto Q en tierra, y luego camina el resto del camino a una velocidad de 5 min/h, exprese el tiempo total necesario para que la mujer llegue al punto R como una función del ángulo θ indicado. [*Sugerencia*: Distancia = velocidad $\times$ tiempo.]

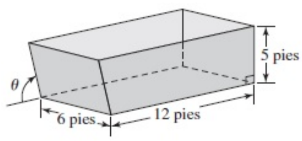


Resolución

34. Se piensa construir una caja cerrada en forma de cubo usando dos materiales distintos. El material para los lados cuesta 1 centavo por centímetro cuadrado y el material para las caras superior e inferior cuesta 2.5 centavos por centímetro cuadrado. Exprese el costo total C de construcción como una función de la longitud x de un lado.

Resolución

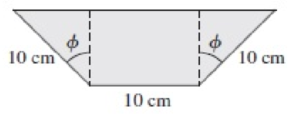
35. Exprese el volumen V de la caja que se muestra en la **figura** como una función del ángulo θ indicado.



Resolución

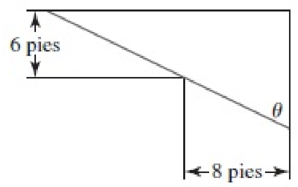
36. Se construirá un canalón con una lámina metálica de 30 cm de ancho al doblar los bordes de ancho 10 cm a lo largo de cada lado, de modo que los lados formen ángulos ϕ con la vertical. Vea la **figura** . Exprese el área de

la sección transversal del canalón como una función del ángulo ϕ.



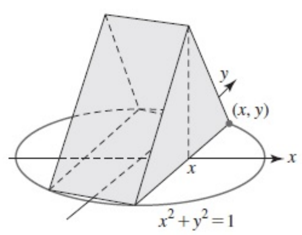
Resolución

37 Un tubo metálico se instalará horizontalmente alrededor de una esquina en forma de ángulo recto desde un vestíbulo de 8 pies de ancho hacia un vestíbulo de 6 pies de ancho. Vea la **figura**. Exprese la longitud L del tubo como una función del ángulo θ que se muestra en la figura.



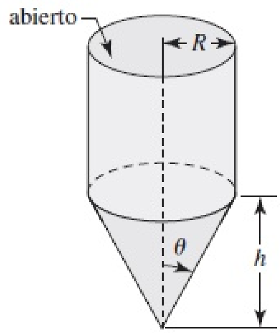
Resolución

38 En la **figura** se muestra un prisma cuyas caras paralelas son triángulos equiláteros. La base rectangular del prisma es perpendicular al eje x y está inscrita en el círculo $x^2 + y^2 = 1$ Exprese el volumen V del prisma como una función de x.



Resolución

39 El contenedor que se muestra en la **figura** consta de un cono invertido (abierto en su parte superior) sujeto a la parte inferior de un cilindro circular recto (abierto en sus partes superior e inferior) de radio fijo R. El volumen V del contenedor es fijo. Exprese el área superficial total S del contenedor como una función del ángulo θ indicado. [*Sugerencia*: El área superficial lateral de un cono está dada por $\pi R\sqrt{R^2+h^2}$]



Resolución

Capítulo 11

SISTEMA DE ECUACIONES

Se denomina sistema de ecuaciones a un conjunto de ellas que se verifican par un mismo valor de las incógnitas.

Sistemas Equivalentes: Dos o mas sistemas son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones

Solución de un Sistema: Es un conjunto de valores de las letras llamadas incógnitas, que al sustituir por estos valores en las ecuaciones, todas se transforman en identidades.

Método de eliminación y Resolución: Son muy variados entre los mas elementales se encuentran:

1. Sustitución

2. Igualación

3. Reducción

Se explican estos métodos con el siguiente sistema.

Ejercicios Propuestos

1. Resolver los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 26 \\ 3x - 4y = -7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 5x - 2y = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 5y = 5 \\ -4x - 10y = -7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 11x - 13y = -163 \\ -8x + 7y = 94 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 10x + 18y = -11 \\ 16x - 9y = -5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 5(x + 3y) - (7x + 8y) = -6 \\ 7x - 9y - 2(x - 18y) = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2(x + 5) = 4(y - 4x) \\ 10(y - x) = 11y - 12x \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x - 4y - 2(2x - 7) = 0 \\ 5(x - 1) - (2y - 1) = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 12(x + 2y) - 8(2x + y) = 2(5x - 6 \\ 20(x - 4y) = -10 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x(y - 2) - y(x - 3) = -14 \\ y(x - 6) - x(y + 9) = 54 \end{cases}$

k) $\begin{cases} \dfrac{6x + 9y - 4}{4x - 6y + 5} = \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{2x + 3y - 3}{3x + 2y - 4} = \dfrac{6}{11} \end{cases}$

l) $\begin{cases} \dfrac{3x + 2y}{x + y - 15} = -9 \\ \dfrac{4x}{3} - \dfrac{5(y - 1)}{8} = -1 \end{cases}$

m) $\begin{cases} \dfrac{2x + 5}{17} - (5 - y) = -60 \\ \dfrac{y + 62}{2} - (1 - x) = 40 \end{cases}$

n) $\begin{cases} \dfrac{3x + 4y}{x - 6y} = -\dfrac{30}{23} \\ \dfrac{9x - y}{3 + x - y} = -\dfrac{63}{37} \end{cases}$

ñ) $\begin{cases} x - \dfrac{4x+1}{9} = \dfrac{2y-5}{3} \\ \\ y - \dfrac{3y+2}{7} = \dfrac{x+18}{10} \end{cases}$

q) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = a \\ \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = b \end{cases}$

o) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} - \dfrac{7}{3y} = \dfrac{2}{3} \\ \\ \dfrac{1}{4x} + \dfrac{8}{y} = \dfrac{103}{84} \end{cases}$

r) $\begin{cases} \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = 2 \\ \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{3b}{y} = \dfrac{2-3a}{a} \end{cases}$

p) $\begin{cases} \dfrac{3}{10x} + \dfrac{1}{3y} = 1\dfrac{47}{60} \\ \\ \dfrac{6}{5x} + \dfrac{1}{4y} = 2\dfrac{4}{5} \end{cases}$

s) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{y} = \dfrac{m+n}{mn} \\ \\ \dfrac{m}{x} - \dfrac{n}{y} = 0 \end{cases}$

Bibliografía

[1] ARCE,ABEL ***Introducción al Análisis Matemático I***.

[2] BOSCH GIRAL, CARLOS. GUERRA TEJADA, MANUEL. ***Cálculo Diferencial e Integral***, 8ª reimpresión. Publicaciones Cultural, México, 1992.

[3] ESPINOZA RAMOS, EDUARDO. ***Análisis Matemático II*** , 1998. Segunda Edición. Editorial Servicios Gráficos JJ.

[4] ESPINOZA RAMOS, EDUARDO. ***Solucionario Deminovich II*** , 2004. Cuarta Edición. Editorial Servicios Gráficos JJ.

[5] FIGUEROA GARCIA, RICARDO ***Análisis Matemático II*** , 2011. Cuarta Edición. Ediciones R.F.G.

[6] LEITHOLD, LOUIS ***El cálculo***, 1998. Oxford University Press. Mexico.

[7] MITTAC MEZA, MAXIMO; TORO MOTA, LUIS ***Tópicos de Cálculo II*** , 2000. Editorial THALES.

[8] PITA RUIZ,CLAUDIO ***Análisis Matemático II***.

[9] PURCELL EDWIN J., VARBERG DALE. ***Cálculo Diferencial e Integral.*** Prentice Hall Hispanoamericana, México, 1993.

[10] VENERO B.,ARMANDO ***Análisis Matemático II***, 1999. Ediciones Gemar,Lima.

Eidec
EDITORIAL