

Resolución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales Usando Fortran y Octave

Métodos y Aplicaciones

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES USANDO FORTRAN Y OCTAVE MÉTODOS Y APLICACIONES

COLECCIÓN RESULTADO DE INVESTIGACIÓN

Primera Edición 2025 Vol. 1

Editorial EIDEC

Sello Editorial EIDEC (978-958-53018)

NIT 900583173-1

Autores

Eder Escobar Gómez

Mayckol Jiménez Huayama

Javier Bernardo Rodríguez Cruz

Nilthon Arce Fernández

Iván Danelgi Iman Agurto

Walter Richard Paiva Ayala

Flabio Alfonso Gutiérrez Segura

Edwar Glorimer Lujan Segura

Rolando Elías Ipanaque Silva

ISBN: 978-628-96622-8-3

Formato: Digital PDF (Portable Document Format)

DOI: <https://doi.org/10.34893/m4488-0562-3096-v>

Publicación: Colombia

Fecha Publicación: 14/03/2025

Coordinación Editorial

Escuela Internacional de Negocios y Desarrollo Empresarial de Colombia – EIDEC

Centro de Investigación Científica, Empresarial y Tecnológica de Colombia – CEINCET

Red de Investigación en Educación, Empresa y Sociedad – REDIEES

Revisión y pares evaluadores

Centro de Investigación Científica, Empresarial y Tecnológica de Colombia – CEINCET

Red de Investigación en Educación, Empresa y Sociedad – REDIEES

Coordinadores editoriales

Paula Alejandra Noguera

Editorial EIDEC

Dr. Cesar Augusto Silva Giraldo

Centro de Investigación Científica, Empresarial y Tecnológica de Colombia – CEINCET – Colombia.

Dr. David Andrés Suarez Suarez

Red de Investigación en Educación, Empresa y Sociedad – REDIEES – Colombia.

El libro **RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES USANDO FORTRAN Y OCTAVE**, está publicado bajo la licencia de Creative Commons Atribución-NoComercial 4.0 Internacional (CC BY-NC 4.0) Internacional (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.es>). Esta licencia permite copiar, adaptar, redistribuir y reproducir el material en cualquier medio o formato, con fines no comerciales, dando crédito al autor y fuente original, proporcionando un enlace de la licencia de Creative Commons e indicando si se han realizado cambios.
Licencia: CC BY-NC 4.0.

NOTA EDITORIAL: Las opiniones y los contenidos publicados en el **RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES USANDO FORTRAN Y OCTAVE** son de responsabilidad exclusiva de los autores; así mismo, éstos se responsabilizarán de obtener el permiso correspondiente para incluir material publicado por parte de la **Editorial EIDEC**.



DEDICATORIA

*Dedicado a todos los que al igual que nosotros los autores,
contemplaron cada línea de este libro
y reafirmaron que nadie tiene la verdad absoluta en **tiempos de cambio** ...*

Prólogo

El presente texto está dirigido a los estudiantes de Matemáticas de los últimos semestres de pregrado y estudiantes de postgrado en ciencias con mención en Matemática, Matemática aplicada o Ingeniería matemática inclinados al estudio de los métodos numéricos para EDPs. La obra trata de dar los alcances iniciales para la comprensión y dominio total del Método de Diferencias Finitas. Desde la discretización del problema, la aplicación del método, el respectivo análisis de consistencia, convergencia - estabilidad y la implementación computacional. Discriminando diferentes tipos de Métodos de Diferencias Finitas y presentando diversos ejemplos de aplicación. Los tópicos se presentan en forma clara y concisa pensando en ofrecer un material con el cual nos hubiera gustado contar al inicio de nuestros estudios de postgrado.

- En el **capítulo I**, una visión histórica y evolución sobre el estudio de la variable meteorológica como la temperatura, proponiendo un esquema de diferencias finitas denominado forward upstream para el estudio de sus términos advectivos, los cuales son una parte fundamental de cualquier modelo de dinámica de fluidos [8].
- En el **capítulo II** se presentan las definiciones básicas, la discretización de la ecuación y la representación de la transformada discreta de Fourier en los tres casos: Unidimensional- bidimensional- tridimensional, con lo cual se realiza el análisis de Von Neumann para la estabilidad de algunos tipos de esquemas en diferencias finitas ([11], [20],[15]).
- En el **capítulo III** se presenta el esquema Upwind, desarrollándose la discretización del método y el análisis completo de la consistencia, convergencia y estabilidad ([12],[11]).
- En el **capítulo IV** se desarrollan las representaciones del esquema de Upwind y se analiza la ecuación de Transporte ([12],[3],[18]).

- En el **capítulo V** hacemos un estudio del esquema forward upstream en 3D, considerando un problema tridimensional el cual es una abstracción matemática de la física de la conducción del calor, para dar solución a este problema usamos las diferencias finitas para discretizar el dominio, la variable y la ecuación; finalmente hacemos un análisis numérico, iniciando el estudio con la consistencia, convergencia y estabilidad.
- En el **capítulo VI** se presentan 4 casos de aplicación del método de diferencias finitas y para la última aplicación se hace una comparación del esquema de diferencia central.
- En el **capítulo VII** se toma como modelo de un problema no lineal a la ecuación de Burgers y se aplica la discretización Upwind de cuatro puntos [7].
- Finalmente, en el **capítulo VII** se presentan los códigos de todos los problemas trabajados en el texto, los cuales se implementaron en Octave y Fortran 90. ([7],[12],[11]).

AGRADECIMIENTO

Expresamos nuestro infinito agradecimiento a Dios, y a dos grandes Matemáticos que nos brindaron sus sabios consejos y orientación como son el Dr. Obidio Rubio Mercedes, docente principal de la Universidad Nacional de Trujillo y el Dr. Luis Jhony Caucha Morales docente principal de la Universidad Nacional de Tumbes, los cuales fueron de gran ayuda para culminar el presente texto. ¡GRACIAS!

Los autores

Índice general

I. Introducción	1
II. Método de diferencias finitas	3
2.1. Solución del problema discreto	3
2.1.1. Discretización del dominio	3
2.1.2. Discretización de la variable	4
2.1.3. Discretización de la ecuación por Diferencias Finitas	5
2.2. Definiciones básicas	8
2.3. Representaciones de la transformada discreta de Fourier	9
2.3.1. Caso unidimensional	9
2.3.2. Caso bidimensional	10
2.3.3. Caso tridimensional	10
2.3.4. Discretización de la ecuación de transporte	11
2.4. Esquema Forward Upstream	13
2.4.1. Condición necesaria y suficiente de estabilidad	19
2.4.2. Condición suficiente de estabilidad	19
2.5. Análisis de Von Neumann	21
2.6. Análisis de Von Neumann sobre $\xi \in [0, 2\pi)$	23
2.6.1. Operadores discretos de Diferencias Finitas	23
2.7. Ejemplos de esquemas mas comunes	27
III. Esquema Upwind: Consistencia, convergencia y estabilidad	31
3.1. Discretización de la Ecuación Diferencial	31
3.2. Consistencia	33
3.3. Estabilidad	34
3.4. Convergencia	37
IV. Representaciones del esquema Upwind	39
4.1. Ecuación de convección unidimensional	39
4.2. Amplitud, dispersión y error de face computacional	42
4.3. Ecuación de transporte unidimensional	50

4.3.1.	Análisis numérico para la ecuación de transporte . . .	52
4.3.2.	Esquemas para la ecuación de transporte.....	53
V.	Esquema Forward Upstream en 3D	57
5.1.	Formulación del problema.....	57
5.2.	Solución del problema discreto	58
5.2.1.	Discretización del dominio.....	58
5.2.2.	Discretización de la variable.....	58
5.2.3.	Discretización de la ecuación por diferencias finitas .	60
5.2.4.	Discretizada del problema de valor inicial y de contorno	63
5.3.	Análisis numérico del esquema Forward Upstream.....	66
5.3.1.	Consistencia.....	66
5.3.2.	Estabilidad.....	67
5.3.3.	Convergencia.....	77
VI.	Aplicaciones	79
6.1.	Aplicación 1	79
6.2.	Aplicación 2	82
6.3.	Aplicación 3	84
6.4.	Aplicación 4.....	86
VII.	Problemas no lineales: Ecuación de Burgers	89
7.1.	Ecuación de Burgers.....	89
7.2.	Discretización Upwind de cuatro puntos.....	92
7.3.	Esquemas para la ecuación de transporte no lineal.....	95
VIII.	Apéndice	101
8.1.	Código del método de Upwind.....	101
8.2.	Código del método de Lax Friedrichs.....	102
8.3.	Código del método de Lax Wendroff	103
8.4.	Código del método de Leap-Frog	104
8.5.	Código de la ecuación de Advección.....	106
8.5.1.	Código de Gráfica de la aplicación uno en Octave	110
8.6.	Código de ecuación de transporte lineal	111
8.6.1.	Código de Gráfica en Octave	120
8.7.	Código de la ecuación de transporte no Lineal	120
8.7.1.	Código de Gráfica en Octave	128

Índice de figuras

2.1. Nudo interior rojo $(x_i, t_j) = (ih_x, jk) \equiv (ih_x, nh_t)$ del dominio espacial.....	4
2.2. Molécula de estudio de esquemas explícitos	17
2.3. Molécula de estudio de esquemas implícitos.....	17
2.4. Cambios de temperatura del esquema de Lax-Wendroff usado en la ecuación de transporte lineal, ver capítulo aplicaciones (aplicación 2).....	18
2.5. Cambios de temperatura del esquema FTCS usado en la ecuación de transporte lineal, ver capítulo aplicaciones (aplicación 2).....	18
2.6. Círculo unitario de radio ζ y centro $1-\zeta$ en el plano complejo que representa estabilidad del método.....	25
2.7. Círculo unitario de radio ζ y centro $1+\zeta$ en el plano complejo que representa estabilidad del método.....	26
2.8. Círculo unitario de radio ζ y centro $1-\zeta$ en el plano complejo que representa inestabilidad del método.....	26
2.9. Comportamiento del esquema upwind en el tiempo $t = 0$, $t = 17$ y $t = 25$	27
2.10. Comportamiento del esquema Lax-Friedrichs en el tiempo $t = 0$, $t = 17$ y $t = 25$	28
2.11. Factor de amplificación usando el esquema Lax-Friedrichs, para $a > 0$	28
2.12. Comportamiento del esquema Lax-Wendroff en el tiempo $t = 0$, $t = 17$ y $t = 25$	29
2.13. Factor de amplificación usando el esquema Lax-Wendroff, para $a > 0$	29
2.14. Comportamiento del esquema Leap-Frog en el tiempo $t = 0$, $t = 17$ y $t = 25$	30
2.15. Factor de amplificación usando el esquema Leap-Frog, para $a > 0$	30

4.1. Temperatura obtenida por la aproximación computacional de la ecuación de advección $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -u_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ usando el esquema forward upstream (4.4) sujeto a la condición inicial (4.2) y la condición de frontera (4.3) cuando γ es idénticamente igual a γ_{exacto}	46
4.2. Temperatura obtenida por la aproximación computacional de la ecuación de advección $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -u_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ usando el esquema forward upstream (4.4) sujeto a la condición inicial (4.2) y la condición de frontera (4.3) para (a) $\lambda = 0,4$ y (b) $\lambda = 0,8$. . .	48
4.3. Temperatura obtenida por la aproximación computacional de la ecuación de advección $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -u_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ usando el esquema forward upstream (4.4) sujeto a la condición inicial (4.2) y la condición de frontera (4.3) con una longitud de onda $80h_x$. . .	50
5.1. Nodo interior $\xi_{i,j,k}$ del dominio espacial.	59
5.2. Intervalo $I_C = [\beta_1, \beta_2]$, que contiene β_C con $ \rho(\beta_c) > 1 + Ck$ para algún valor de $h\xi = \beta_c \in I_C$	74
6.1. Cambios de temperatura por el esquema forward upstream.	81
6.2. Cambios de temperatura incorporando la condición de frontera $\phi(0, 0) = \phi(1, 0) = 50$	81
6.3. Cambios de temperatura para $h_t = 0,05$	84
6.4. La temperatura (a),(b),(c) estable y (d) inestable.	87
6.5. Temperatura estable en tiempo $t_{20} = 1$	88
7.1. Gráfica de la ecuación de Burgers en diferentes tiempos para una viscosidad $\nu = 1/10$	91
7.2. Gráfica de la ecuación de Burgers en diferentes tiempos para una viscosidad $\nu = 1/40$	92
7.3. Gráfica de la ecuación de Burgers en diferentes tiempos para una viscosidad $\nu = 1/300$	92

Índice de cuadros

4.1.	Precisión del esquema forward upstream para $h_t = 0,2$	42
4.2.	Precisión del esquema forward upstream para $h_t = 0,1$	42
4.3.	Valor de la amplitud γ^1 y error de fase $\frac{\zeta \phi}{u_1}$ por pasos de tiempo como una función de longitud de onda para la aproximación computacional de la ecuación de advección $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -u_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ usando el esquema forward upstream.....	47
4.4.	Precisión del esquema forward upstream para $h_t = 0,2$ y $\alpha = 1 \times 10^{-4}$	52
4.5.	Precisión del esquema forward upstream para $h_t = 0,2$ y $\alpha = 1 \times 10^{-6}$	52
4.6.	Precisión del esquema forward upstream para $h_t = 0,1$ y $\alpha = 1 \times 10^{-6}$	52
6.1.	Cambios de temperatura con $\phi(0, t) = \phi(1, t) = 100$	80
6.2.	Cambios de temperatura incorporando $\phi(0, 0) = \phi(1, 0) = 50$	82
6.3.	Cambio de temperatura en un tiempo máximo de 3000 segundos.....	82
6.4.	Cambios de temperatura.	83
6.5.	Cambios de temperatura.	83
6.6.	Temperatura en un tiempo máximo de 1 segundo	83
6.7.	Cambios de temperatura.	85

Capítulo I

Introducción

Fue Wilhelm Bjerknæs (1904) el primero en señalar que el estado futuro de la atmósfera, puede obtenerse por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales apropiado que describe el estado observado de los fenómenos atmosféricos ([14] y [16]). Por tal motivo, estudiaremos cautelosamente el término advectivo por ser éste fundamental, y de la variedad de los esquemas de diferencias finitas que discretizan dicho término, usaremos esquemas comunmente utilizados como el upwind (o, forward upstream) en el cual es caracterizado por los esquemas "forward time forward space" denotado por (FTFS) y "forward time backward space" denotado por (FTBS) ([13], [15], [22], [18]), Euler progresivo (FTCS, forward time central space), Euler retrasado (BTCS, backward time central space), Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff, Leap-Frog, Du Fort-Frankel, Crank-Nicolson, Crank-Nicolson generalizado (con operador masa, elemento finito, diferencia finita, upwind cuatro puntos) y upwind cuatro puntos ([7], [17], [19], [1], [21], [5]).

Existen criterios de Courant - Friedrichs - Lewy y Von Neumann [3], asociados a los diferentes procesos físicos, que se estudiarán y aplicarán en el estudio del término de advección y difusión como consistencia, convergencia y estabilidad que determinan el orden de convergencia de las soluciones aproximadas a las exactas y establecen las condiciones necesarias y suficientes del modelo; pues se puede observar en las ecuaciones que gobiernan el movimiento de los fenómenos atmosféricos aparecen términos advectivos de la forma $u \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ los cuales son una parte fundamental de cualquier modelo de dinámica de fluidos [8], cuyo modelo más simple es la ecuación de convección unidimensional $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -u \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$.

Actualmente la aproximación de la ecuación de convección ha sido estudiada

por Roger A. Pielke, con un alto grado de versatilidad [18]. Debemos resaltar que las aproximaciones de las derivadas en la ecuación diferencial por diferencias finitas resultan cuando se usa la formulación serie de Taylor, llamado también método de discretización por diferencias finitas y consiste en la aproximación de las derivadas las cuales representan tasas de cambio; una derivada contiene información acerca de la variación local de una función.

Por tanto, una aproximación en diferencia a una derivada, debería atender a estos significados acoplando la información en los puntos vecinos de una malla, este acoplamiento se puede realizar con la serie de Taylor truncada de la función en una vecindad del punto, éste es uno de los métodos a utilizar para obtener las ecuaciones de discretización de la ecuación diferencial parcial de transporte de energía tridimensional; la principal propiedad de la ecuación discretizada resultante, es que la solución obtenida satisface a la ecuación, independientemente del tamaño de la malla definida [15].

Cuando se implementan esquemas de advección, frecuentemente se desean las siguientes propiedades [por ejemplo, Rood, 1987; Lauritzen, 2011]: (1) conservación de masa, (2) monotónica, definida positiva y no oscilatoria, (3) difusión numérica baja, (4) local, (5) precisa, (6) estable (7) eficiente desde un punto de vista computacional, (8) eficiencia computacional multitrizador (reutilización de cálculos repetidos), (9) retiene correlaciones no lineales trazadoras y (10) conservación de masas de múltiples componentes.

Sin embargo, la mayoría de los esquemas de advección no son capaces de realizar simultáneamente todas las propiedades enumeradas anteriormente [8].

Por tales razones es común preguntarse si los esquemas antes mencionados generan soluciones suficientemente buenas, en el sentido que tales soluciones aproximen a la solución exacta de alguna ecuación diferencial lineal o no lineal.

Con la finalidad de cumplir con este propósito se enunciará diferentes ejemplos incluido su implementación en código fortran 90 y para las gráficas se usará software Octave, cuya versatilidad son contrastadas con artículos de la literatura.

Capítulo II

Método de diferencias finitas

En esta sección presentaremos conceptos y definiciones básicas para analizar esquemas de diferencias finitas, en particular el esquema Forward Upstream (Upwind) y el esquema de Leap-Frog por ser esquemas usados en sistemas de ecuaciones diferenciales parciales más complejos que modelan actualmente la atmósfera a nivel de mesoescala [18]; el análisis de estos esquemas permitirá ver sus principales bondades como consistencia, convergencia, estabilidad, amplitud, dispersión y error de fase computacional con respecto a otros esquemas como el de Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff, FTFS (forward time forward space) y FTBS (forward time backward space), además presentamos la implementación en código Octave y fortran 90, el cual permite facilidad con respecto a las comparaciones numéricas entre los esquemas.

2.1. Solución del problema discreto

La discretización del problema de valor inicial y de contorno (PVIC) usando el esquema de diferencias finitas, se realiza en tres etapas, primero discretizamos el dominio, en segundo lugar la variable, y finalmente construimos un esquema de diferencias para la aproximación numérica de la ecuación diferencial.

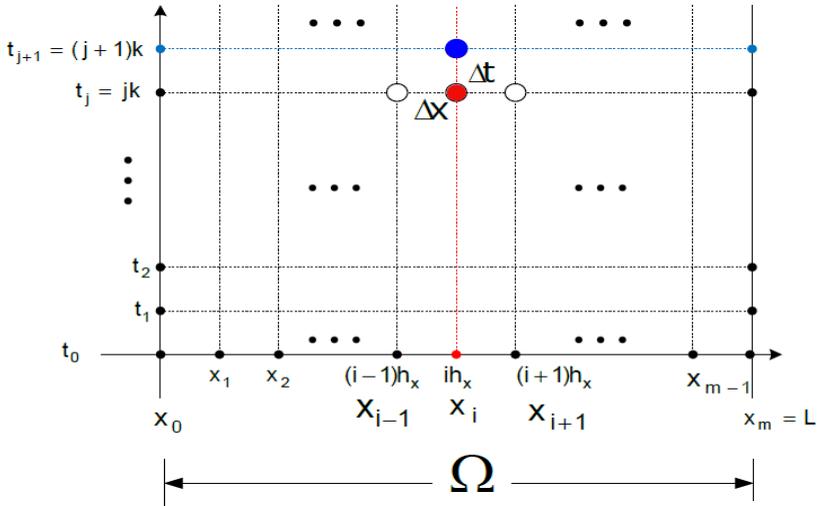
2.1.1. Discretización del dominio

Tomamos el dominio $\Omega := [0, L]$, este dominio es dividido en un número finito de subdominios rectangulares de longitud h_x , donde $h_x > 0$, es un número positivo. De igual manera elegimos un número positivo $0 < h_t \in \mathbb{R}^+$ que servirá para subdividir el eje $t > 0$, denominado eje temporal. Los subdominios rectangulares no necesariamente son homogéneos y en el extremo

de cada rectángulo se define de un modo como sigue

Definición 2.1.1.1 Sea h_x, h_t números positivos, una *mall*a es un conjunto de puntos de la forma $(x_i, t_n) = (ih_x, nh_t)$, llamados también *nod*os donde i, n son números enteros no negativos con $n > 0$.

Buscamos la solución aproximada en el nodo $(x_i, nh_t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$ correspondiente a un nodo en la malla del dominio espacial discreto, cuyos nodos interiores en un tiempo n están representados en la Figura 2.1.



2.1.2. Discretización de la variable

La variable o incógnita del problema ϑ , se discretiza usando la malla definida en 5.2.1.1, donde a cada nodo (ih_x, nh_t) se le asigna un valor $\vartheta(ih_x, nh_t)$ que se denota por

$$\vartheta_i^n = \vartheta(ih_x, nh_t). \quad (2.1)$$

Definición 2.1.2.1 Una función discreta ϕ es una función definida sobre una malla tal que cada punto (x_i, t_n) le asignamos un valor real denotado por ϕ_i^n .

Cualquier función continua ϕ sobre $\Omega \times \mathbb{R}^+$ puede ser discretizada sobre la malla definida en 5.2.1.1, definiendo $\phi^n = \phi(x_i, t_n)$, en particular la solución para un problema de valor inicial y de contorno (PVIC) ϑ dada en (5.1), es discretizado por $\vartheta^n = \vartheta(x_i, t_n)$.

Como no conocemos la solución ϑ del problema entonces aproximamos esta solución discreta ϑ^n por una función discreta que la denotamos por ϕ_i^n tal que $\vartheta_i^n \approx \phi_i^n$ en cada nodo de la malla.

Así $\{\phi_i^n\}$ y $\{\phi_i^{n+1}\}$ denota la función discreta en el nivel n y $n + 1$ respectivamente, donde:

$$\phi_i^n \approx \vartheta(x_i, nh_t) \text{ y } \phi_i^{n+1} \approx \vartheta(x_i, nh_t + h_t). \quad (2.2)$$

Además, la condición inicial discretizada es

$$\phi_i^0 = f_0(ih_x) \text{ con } i \in \mathbb{Z}^+,$$

y las condiciones de frontera discretizadas sobre los puntos de la malla dada en la definición 5.2.1.1 que están en la frontera del dominio con $\in \mathbb{Z}^+$, y se escriben como

$$\phi_0^n = f_1(0, nh_t), \quad \phi_i^n = f_2(ih_x, nh_t). \quad (2.3)$$

2.1.3. Discretización de la ecuación por Diferencias Finitas

Sea la serie de Taylor para el punto $(x_i, nh_t + h_t)$ alrededor del punto (x_i, nh_t) es

$$\theta(x_i, nh_t + h_t) = \theta(x_i, nh_t) + \frac{\partial \theta(x_i, nh_t)}{\partial t} h_t + \frac{\partial^2 \theta(x_i, nh_t)}{\partial t^2} \frac{h_t^2}{2!} + \dots, \quad (2.4)$$

expresamos (5.4) de la siguiente forma

$$\theta(x_i, nh_t + h_t) = \theta(x_i, nh_t) + \frac{\partial \theta(x_i, nh_t)}{\partial t} h_t + o(h_t^2), \quad (2.5)$$

donde $o(h_t^2)$ denota el término que contiene la segunda derivada y las potencias mayores de h_t .

De expresión (5.5) se puede obtener la primera derivada de θ en el punto (x_i, nh_t) por

$$\frac{\partial \theta(x_i, nh_t)}{\partial t} = \frac{\theta(x_i, nh_t + h_t) - \theta(x_i, nh_t)}{h_t} - o(h_t), \quad (2.6)$$

si truncamos la ecuación (5.6) eliminando el término $o(h_t)$ se tiene la aproximación por diferencias finitas de la primera derivada en el punto (x_i, nh_t) ,

llamada **diferencia progresiva en el tiempo** la cual tiene un error de truncamiento $o(h_t)$, esto es

$$\frac{\partial \vartheta(x_i, nh_t)}{\partial t} \approx \frac{\vartheta(x_i, nh_t + h_t) - \vartheta(x_i, nh_t)}{h_t}, \quad (2.7)$$

usando la notación (5.1) y la notación $\vartheta^n = \vartheta(x_i, nh_t)$ la aproximación (5.7) se expresa como:

$$\frac{\partial \vartheta(x_i, nh_t)}{\partial t} \approx \frac{\vartheta_i^{n+1} - \vartheta_i^n}{h_t}. \quad (2.8)$$

Usando las aproximaciones (5.2) tenemos que la aproximación (5.8) se puede escribir como

$$\frac{\partial \vartheta(x_i, nh_t)}{\partial t} \approx \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{h_t}, \quad (2.9)$$

de igual manera usando la serie de Taylor con las variables espaciales obtenemos:

$$\begin{aligned} \vartheta(x_i \pm h_x, t_n) &= \vartheta(x_i, t_n) \pm \frac{1}{1!} h_x \vartheta_x(x_i, t_n) \\ &+ \frac{1}{2!} h_x^2 \vartheta_{xx}(x_i, t_n) \pm \frac{1}{3!} h_x^3 \vartheta_{xxx}(x_i, t_n) + \dots, \end{aligned} \quad (2.10)$$

de (5.10) se puede obtener la primera derivada de ϑ en el punto (x_i, t_n) por

$$\frac{\partial \vartheta(x_i, t_n)}{\partial x} = \pm \left(\frac{\vartheta(x_i \pm h_x, t_n) - \vartheta(x_i, t_n)}{h_x} - o(h_x) \right), \quad (2.11)$$

si truncamos la ecuación (5.11) se tiene dos tipos de aproximaciones por diferencias finitas de la primera derivada en el punto (x_i, t_n) .

La primera

$$\frac{\partial \vartheta(x_i, t_n)}{\partial x} \approx \frac{\vartheta(x_i + h_x, t_n) - \vartheta(x_i, t_n)}{h_x}, \quad (2.12)$$

llamada **diferencia progresiva en la dirección x** con un error de truncamiento $o(h_x)$, y la segunda

$$\frac{\partial \vartheta(x_i, t_n)}{\partial x} \approx \frac{\vartheta(x_i, t_n) - \vartheta(x_i - h_x, t_n)}{h_x}, \quad (2.13)$$

llamada **diferencia regresiva en la dirección x** con un error de truncamiento $o(h_x)$.

En términos de la variable discreta tenemos las siguientes aproximaciones de las derivadas

$$\frac{\partial \vartheta(x_i, t_n)}{\partial x} \approx \frac{\phi_n - \phi_{i-1}}{h_x}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \vartheta(x_i, t_n)}{\partial x} \approx \frac{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n}{h_x}. \quad (2.15)$$

Así mismo trabajando la serie de Taylor dada en (5.10) tenemos

$$\theta(x_i + h_x, t_n) = \theta(x_i, t_n) + \frac{1}{1!} h_x \theta_x(x_i, t_n) + \frac{1}{2!} h_x^2 \theta_{xx}(x_i, t_n) + o(h_x^3), \quad (2.16)$$

$$\theta(x_i - h_x, t_n) = \theta(x_i, t_n) - \frac{1}{1!} h_x \theta_x(x_i, t_n) + \frac{1}{2!} h_x^2 \theta_{xx}(x_i, t_n) + o(h_x^3), \quad (2.17)$$

sumando las expresiones (5.16) y (5.17), obtenemos

$$\theta(x_i + h_x, t_n) + \theta(x_i - h_x, t_n) = 2\theta(x_i, t_n) + h_x^2 \theta_{xx}(x_i, t_n) + o(h_x^3) \quad (2.18)$$

de (5.18) obtenemos

$$\theta_{xx}(x_i, t_n) = \frac{\theta(x_i + h_x, t_n) - 2\theta(x_i, t_n) + \theta(x_i - h_x, t_n)}{h_x^2} - o(h_x^2) \quad (2.19)$$

si truncamos (5.19) se tiene la aproximación por diferencias finitas de la segunda derivada en el punto (ξ_i, nh_t) , llamada **diferencia central segunda en la dirección x** la cual tiene un error de truncamiento $o(h^2)$, esto es

$$\vartheta_{xx}(x_i, t_n) \approx \frac{\vartheta(x_i + h_x, t_n) - 2\vartheta(x_i, t_n) + \vartheta(x_i - h_x, t_n)}{h_x^2}. \quad (2.20)$$

Usando las aproximaciones (5.2) tenemos que a partir de (5.20) aproximamos la segunda derivada por

$$\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}\right)_{i,n} \approx \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{h_x^2}, \quad (2.21)$$

Los cálculos matemáticos en las direcciones y, z son similares a los usados para la obtención de la aproximación (5.21).

2.2. Definiciones básicas

Definición 2.2.0.1 Sea $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}; (\phi(n))_{n \in \mathbb{Z}} / \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\phi_n|^2 < \infty\}$

y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno definido para $\phi, \varphi \in \ell^2$;

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \ell^2 \times \ell^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(\phi, \varphi) \mapsto \langle \phi, \varphi \rangle = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi_i \overline{\varphi_i}$$

y sea $\|\cdot\|$ una norma inducida por el producto interno con $0 < h \in \mathbb{R}$, y está definida por:

$$\|\cdot\| : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi \mapsto \|\phi\|_{\ell^2} = \langle \phi, \phi \rangle^{1/2} = h \sum_{i \in \mathbb{Z}} |\phi_i|^2^{1/2}$$

Definición 2.2.0.2 Sea el espacio $V = L^2[-T, T]$ de periodo $T > 0$ donde

$$V := \{\phi : [-T, T] \rightarrow \mathbb{C}, \text{ Lebesgue medible}; \int_{-T}^T |\phi(\xi)|^2 d\xi < \infty\},$$

con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(\phi, \varphi) \mapsto \langle \phi, \varphi \rangle = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \phi(\xi) \overline{\varphi(\xi)} d\xi,$$

definido para $\phi, \varphi \in L^2$ y sea $\|\cdot\|$ una norma inducida por el producto interno definido por:

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi \mapsto \|\phi\|_{L^2} = \langle \phi, \phi \rangle^{1/2} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |\phi(\xi)|^2 d\xi^{1/2}$$

Definición 2.2.0.3 Sea $\phi(\xi, n)$ una función discreta definida en \mathbb{Z} , entonces su transformada de Fourier discreta de $\phi(\xi, n)$ con $n \in \mathbb{Z}^+$, es denotado como $\hat{\phi}(\xi, n)$ y definido por:

$$\hat{\phi}(\xi, n) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^N} e^{-imh\xi} \phi_m^n h^N,$$

donde N es la dimensión y $0 < h \in \mathbb{R}$ es la distancia espacial; $h\mathbb{Z}^N = \{hm : m \in \mathbb{Z}^N\}$ con $mh \cdot \xi$ un producto interno definido para $\xi \in [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^N$, y la fórmula de inversión es

$$\phi_m^n = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^N} e^{imh \cdot \xi} \hat{\phi}(\xi, n) d\xi.$$

De la definición 2.2.0.1 y 2.2.0.2 podemos contrastar que existe una correspondencia biunívoca entre el espacio discreto $\ell^2(\mathbb{Z})$ y el espacio $L^2[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$

el cual para $\xi \in [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$ garantiza que

$$\|\phi_i^n\|_{\ell^2}^2 = h \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\phi_m^n|^2 = \int_{[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]} |\hat{\phi}^n(\xi)|^2 d\xi = \|\phi\|_{L^2}^2, \quad (2.22)$$

la relación (5.38) es denominada relación de Parserval's ([21], [3] y [2]).

2.3. Representaciones de la transformada discreta de Fourier

2.3.1. Caso unidimensional

De la definición 5.3.2.2, y la notación (5.2) denotando $h_1 = h_x$, $h_e\mathbb{Z} = \{\frac{h_e m}{h_e} : m \in \mathbb{Z}\}$; tenemos que $mh_e \cdot \xi$ es el producto definido para $\xi \in [-\frac{\pi}{h_e}, \frac{\pi}{h_e}]$ con $\ell = 1$. Siendo $\phi = \{\phi_i^n\}$ la función discreta, se define la

transformada discreta de Fourier $\phi(\xi, n)$ y se escribe de la forma

$$\hat{\phi}(\xi, n) = \frac{h_1}{(2\pi)^{1/2}} \sum_i \phi_i^n e^{-i h_1 \xi}, \quad (2.23)$$

donde $\hat{\nu} \in \mathbb{C}; i \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{Z}^+$.

Denotando $\beta_1 = h_1 \xi$, la transformada discreta de Fourier dada en (5.39) se puede escribir como

$$\phi(\beta_1, n) = \frac{h_1}{(2\pi)^{1/2}} \sum_i \phi_i^n e^{-i \beta_1}, \quad (2.24)$$

donde $\hat{\nu} \in \mathbb{C}; i \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{Z}^+$.

Aplicando transformada discreta de Fourier de la forma (5.40) en (5.28) obtenemos

$$\widehat{S_{\beta_1} \phi}(\beta_1, n) = e^{\pm i \beta_1} \hat{\phi}(\beta_1, n), \quad (2.25)$$

donde $\beta_\ell = h_\ell \xi$ para $\ell = 1$ así de la ecuación (5.40) y (5.41) podemos definir

$$\hat{S}_{e^\pm} := e^{\pm \hat{\gamma} \theta_\ell} \text{ para } \ell = 1. \quad (2.26)$$

2.3.2. Caso bidimensional

De la definición 5.3.2.2, y la notación (5.2) denotando $h_1 = h_x, h_2 = h_y, h_\ell \mathbb{Z}^N = \{h_\ell m : m \in \mathbb{Z}^N\}$; tenemos que $m h_\ell \cdot \xi$ es el producto interno definido para $\xi \in [\frac{-\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^N$ con $\ell = 1, 2$. Siendo $\phi = \{\phi_{i,j}^n\}$ la función discreta, se define la transformada discreta de Fourier $\hat{\phi}(\xi, n)$ y se escribe de la forma

$$\hat{\phi}(\xi, n) = \frac{h_1 h_2}{2\pi} \sum_{i,j} \phi_{i,j}^n e^{-i h_1 \xi_1} e^{-i h_2 \xi_2}, \quad (2.27)$$

donde $\hat{\gamma} \in \mathbb{C}; i, j \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$.

Denotando $\beta_1 = h_1 \xi_1, \beta_2 = h_2 \xi_2$, la transformada discreta de Fourier dada en (5.39) se puede escribir como

$$\hat{\phi}(\beta, \beta, n) = \frac{h_1 h_2}{2\pi} \sum_{i,j,k} \phi_{i,j,k}^n e^{-i \beta_1} e^{-i \beta_2}, \quad (2.28)$$

donde $\hat{\gamma} \in \mathbb{C}; i, j \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$.

Aplicando transformada discreta de Fourier de la forma (5.40) en (5.28) obtenemos

$$\widehat{S_{e^\pm} \phi}(\beta_1, \beta_2, n) = e^{\pm \hat{\gamma} \theta_\ell} \hat{\phi}(\beta_1, \beta_2, n), \quad (2.29)$$

donde $\beta_\ell = h_\ell \xi$ para $\ell = 1, 2$ así de la ecuación (5.40) y (5.41) podemos definir

$$\hat{S}_{e^\pm} := e^{\pm \hat{\gamma} \theta_\ell} \text{ para } \ell = 1, 2. \quad (2.30)$$

2.3.3. Caso tridimensional

De la definición 5.3.2.2, y la notación (5.2) denotando $h_1 = h_x, h_2 = h_y, h_3 = h_z, h_\ell \mathbb{Z}^N = \{h_\ell m : m \in \mathbb{Z}^N\}$; tenemos que $m h_\ell \cdot \xi$ es el producto interno definido para $\xi \in [\frac{-\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^N$ con $\ell = 1, 2, 3$. Siendo $\phi = \{\phi_{i,j,k}^n\}$ la función discreta, se define la transformada discreta de Fourier $\hat{\phi}(\xi, n)$ y se escribe de la forma

$$\hat{\phi}(\xi, n) = \frac{h_1 h_2 h_3}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{i,j,k} \phi_{i,j,k}^n e^{-i h_1 \xi_1} e^{-i h_2 \xi_2} e^{-i h_3 \xi_3}, \quad (2.31)$$

donde $\hat{l} \in \mathbb{C}; i, j, k \in \mathbb{Z}^+ n \in \mathbb{Z}^+$.

Denotando $\theta_1 = h_1 \xi_1, \theta_2 = h_2 \xi_2, \theta_3 = h_3 \xi_3$ la transformada discreta de Fourier dada en (5.39) se puede escribir como

$$\hat{\phi}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, n) = \frac{h_1 h_2 h_3}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{i,j,k} \phi_{i,j,k}^n e^{-i i \theta_1} e^{-i j \theta_2} e^{-i k \theta_3}, \quad (2.32)$$

donde $\hat{l} \in \mathbb{C}; i, j, k \in \mathbb{Z}^+ n \in \mathbb{Z}^+$.

Aplicando transformada discreta de Fourier de la forma (5.40) en (5.28) obtenemos

$$\widehat{S_{\ell \pm} \phi}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, n) = e^{\pm i \theta_\ell} \hat{\phi}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, n), \quad (2.33)$$

donde $\theta_\ell = h_\ell \xi$ para $\ell = 1, 2, 3$ así de la ecuación (5.40) y (5.41) podemos definir

$$\tilde{S}_{\ell \pm} := e^{\pm i \theta_\ell} \text{ para } \ell = 1, 2, 3. \quad (2.34)$$

El modelo que describe el transporte de energía atmosférica tridimensional es el siguiente

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \underline{\underline{V}} \cdot \nabla \vartheta + \alpha \Delta \vartheta, \quad (2.35)$$

donde $\vartheta = \vartheta(x, y, z, t)$ es la variable temperatura, $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$ el campo de velocidad y α_i con $i = \overline{1, 3}$ representa los coeficientes de difusión térmica, el cual por simplicidad en este trabajo se considera constante [18].

El dominio para el estudio es una caja rectangular $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, L_3]$ y tiempo $t > 0$; cuya condición inicial conocida es $\vartheta(x, y, z, 0) = f_0$, y de frontera $\vartheta(\xi, t)|_{\partial\Omega} = G$ para $\xi \in \Omega$ y $t > 0$. Las condiciones en la frontera $\partial\Omega$ son del tipo Dirichlet, en cada cara del dominio, la temperatura G asume valores denotados por f_i con $i = \overline{1, 6}$

2.3.4. Discretización de la ecuación de transporte

Aproximando los términos de advección y difusión de la ecuación (2.35) mediante la serie de Taylor truncada después del primer y segundo término, se tiene una diferencia finita que aproxima la primera y segunda derivada en

el punto $(i, j, k) \in Z^+$, de la forma

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i,j,k} &\approx \frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i-1,j,k}}{2h_x}; \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{i,j,k} \approx \frac{\phi_{i+1,j,k} - 2\phi_{i,j,k} + \phi_{i-1,j,k}}{h_x^2}, \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{i,j,k} &\approx \frac{\phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j-1,k}}{2h_y}; \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)_{i,j,k} \approx \frac{\phi_{i,j+1,k} - 2\phi_{i,j,k} + \phi_{i,j-1,k}}{h_y^2}, \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{i,j,k} &\approx \frac{\phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k-1}}{2h_z}; \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right)_{i,j,k} \approx \frac{\phi_{i,j,k+1} - 2\phi_{i,j,k} + \phi_{i,j,k-1}}{h_z^2}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

La ecuación discretizada, usando los esquemas de diferencia central dadas en (5.21) para $v_i > 0$, $i = 1, 3$ es

$$\begin{aligned} \frac{\phi_{i,j,k}^{t+1} - \phi_{i,j,k}^t}{h_t} &= -v_1 \frac{\phi_{i+1,j,k}^t - \phi_{i-1,j,k}^t}{2h_x} - v_2 \frac{\phi_{i,j-1,k}^t - \phi_{i,j+1,k}^t}{2h_y} \\ &\quad - v_3 \frac{\phi_{i,j,k+1}^t - \phi_{i,j,k-1}^t}{2h_z} + \alpha^1 \frac{\phi_{i+1,j,k}^t - 2\phi_{i,j,k}^t + \phi_{i-1,j,k}^t}{(h_x)^2} \\ + \alpha_2 \frac{\phi_{i,j+1,k}^t - 2\phi_{i,j,k}^t + \phi_{i,j-1,k}^t}{(h_y)^2} &+ \alpha_3 \frac{\phi_{i,j,k+1}^t - 2\phi_{i,j,k}^t + \phi_{i,j,k-1}^t}{(h_z)^2}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Para simplificar la expresión, definamos los operadores discretos

$S_{\ell \pm}$ para $\ell = 1, 2, 3$ como operadores de desplazamiento hacia adelante y hacia atrás en la dirección de $\ell = 1$ para x , $\ell = 2$ para y , y $\ell = 3$ para z ; por ejemplo en la dirección x tenemos el operado S_{1+} hacia adelante y S_{1-} hacia atrás, aplicado a la función discreta $\phi_{i,j,k}^t$ obtenemos: $S_{1+}\phi_{i,j,k}^t := \phi_{i+1,j,k}^t$ tal que $S_{1\pm}\phi = \{\phi_{i\pm 1,j,k}^t\}$.

Sea el operador diferenciable y continuo P , el esquema de diferencias finitas central (2.37) se puede escribir como un operador discreto

$$P_{x,y,z,t} \phi_{i,j,k}^t = 0 \quad (2.38)$$

Aplicando transformada discreta de Fourier de la forma (5.40) en (5.21) obtenemos

$$\widehat{S_{\ell \pm} \phi}(\beta_1, \beta_2, \beta_3, n) = e^{\pm i \beta_\ell} \widehat{\phi}(\beta_1, \beta_2, \beta_3, n), \quad (2.39)$$

donde $\beta_\ell = h\ell\xi$ para $\ell = 1, 2, 3$ así de la ecuación (5.40) y (5.41) podemos definir

$$\widehat{S_{\ell \pm}} := e^{\pm i \beta_\ell} \text{ para } \ell = 1, 2, 3. \quad (2.40)$$

La ecuación (2.37) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \phi_{i,j,k}^{t+1} = & \phi_{i,j,k}^t - \frac{h_t v_1}{2h_x} (\phi_{i+1,j,k}^t - \phi_{i-1,j,k}^t) - \frac{h_t v_2}{2h_y} (\phi_{i,j+1,k}^t - \phi_{i,j-1,k}^t) - \\ & \frac{h_t v_3}{2h_z} (\phi_{i,j,k+1}^t - \phi_{i,j,k-1}^t) + \frac{h_t \alpha_1}{(h_x)^2} (\phi_{i+1,j,k}^t - 2\phi_{i,j,k}^t + \phi_{i-1,j,k}^t) + \\ & \frac{h_t \alpha_2}{(h_y)^2} (\phi_{i,j+1,k}^t - 2\phi_{i,j,k}^t + \phi_{i,j-1,k}^t) + \frac{h_t \alpha_3}{(h_z)^2} (\phi_{i,j,k+1}^t - 2\phi_{i,j,k}^t + \phi_{i,j,k-1}^t) \end{aligned} \quad (2.41)$$

2.4. Esquema Forward Upstream

El transporte de las propiedades de una masa de aire producido por el campo de velocidades de la atmósfera esta representada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{si } x \in \mathbb{R}, t > 0, c = \text{constante} \quad (2.42)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{si } x \in \mathbb{R}$$

denominada ecuación lineal de advección donde u describe la advección y c es una constante de velocidad en la dirección del eje x . la solución general a (2.42) siendo f una función arbitraria es:

$$u(x, t) = g(x - ct), x \in \mathbb{R}, t > 0$$

observamos que la solución general a la Ecuación de advección satisface una condición inicial además ésta se propaga a lo largo de la característica.

Ahora construiremos un esquema para determinar una aproximación al problema (2.42) por método de las diferencias usando la fórmula de Taylor truncada. La ecuación lineal de advección discretizada por el esquema **FTFS**, es:

$$\begin{aligned} \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k} - c \left[\frac{U_j - U_j}{h} \right] &= 0; i \in \mathbb{Z}; j \in \mathbb{Z}^+ \\ U_i^0 &= f(ih); i \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

La velocidad con que se propaga la condición inicial depende de la constante c , veamos:

1. Para $c > 0$ se obtiene la ecuación lineal de advección discretizada por el esquema **FTFS**, haciendo $\zeta_1 = c \frac{k}{h}$ y $c > 0, \zeta_1 \equiv \zeta > 0$ se tiene:

$$U_i^{j+1} - U_i^j - \zeta (U_{i+1}^j - U_i^j) = 0; i \in \mathbb{Z}; j \in \mathbb{Z}^+$$

$$U_i^{j+1} = (1 - \zeta)U_i^j + \zeta U_{i+1}^j \quad (2.43)$$

2. Para $c < 0$ se obtiene la ecuación lineal de advección discretizada por el esquema **FTFS**, haciendo $\zeta_2 = c \frac{k}{h}$ y $c < 0$, $\zeta_2 \equiv \zeta < 0$ se tiene:

$$U_i^{j+1} - U_i^j - c \frac{k}{h} (U_{i+1}^j - U_i^j) = 0; i \in \mathbb{Z}; j \in \mathbb{Z}^+$$

$$U_i^{j+1} = (1 + \zeta)U_i^j - \zeta U_{i+1}^j \quad (2.44)$$

3. Para $c > 0$ se obtiene la ecuación lineal de advección discretizada por el esquema **FTBS**, haciendo $\zeta_3 = c \frac{k}{h}$ y $c > 0$, $\zeta_3 \equiv \zeta > 0$ se tiene:

$$U_i^{j+1} - U_i^j - \zeta (U_{i-1}^j - U_i^j) = 0; i \in \mathbb{Z}; j \in \mathbb{Z}^+$$

$$U_i^{j+1} = (1 - \zeta)U_i^j + \zeta U_{i-1}^j \quad (2.45)$$

4. Para $c < 0$ se obtiene la ecuación lineal de advección discretizada por el esquema **FTBS**, haciendo $\zeta_4 = c \frac{k}{h}$ y $c < 0$, $\zeta_4 \equiv \zeta < 0$ se tiene:

$$U_i^{j+1} - U_i^j - \zeta (U_{i-1}^j - U_i^j) = 0; i \in \mathbb{Z}; j \in \mathbb{Z}^+$$

$$U_i^{j+1} = (1 + \zeta)U_i^j - \zeta U_{i-1}^j \quad (2.46)$$

Por lo tanto de las ecuaciones (2.43), (2.44), (2.45) y (2.46) el esquema de diferencias finitas que discretiza la ecuación de convección unidimensional (2.42) es :

$$\frac{\phi_i^{\tau+1} - \phi_i^\tau}{\Delta t} = \begin{cases} -u_t \frac{\phi_{i+1}^\tau - \phi_i^\tau}{\Delta x} & \text{si } u_i \leq 0 \\ -u^\tau \frac{\phi_i^\tau - \phi_{i-1}^\tau}{\Delta x} & \text{si } u_i > 0 \end{cases} \quad (2.47)$$

y se conoce como el esquema **Forward Upstream**(Upwind) para el caso no lineal, ver ([18],[9]).

Entre los esquemas más comunes para discretizar la ecuación (2.42), tenemos el de Lax-Friedrichs

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \frac{1}{2}(\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n)}{h_t} + a \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} = 0, \quad (2.48)$$

Leap-Frog,

$$\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_t} + a \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} = 0. \quad (2.49)$$

Lax-Wendroff,

$$\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{h_t} + a \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} = h_t a^2 \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{2h_x^2}, \quad (2.50)$$

si derivamos la ecuación de convección (2.42) con respecto al tiempo, obtenemos $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ y al reemplazarlo en una representación de segundo orden para el término $\frac{\partial u}{\partial t}$, usando la expansión de una serie de Taylor, se escribe como

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{h_t} - 0,5h_t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \equiv \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{h_t} - 0,5h_t c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.51)$$

introduciendo el resultado (2.51), la ecuación de convección (2.42) se escribir como

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \approx \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{h_t} - 0,5h_t c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.52)$$

finalmente, introduciendo la expresión de diferencia finita centrada para el término $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ obtenemos el esquema de Lax-Wendroff dado en la ecuación (2.50); el cual se puede escribir para efectos de algoritmo como

$$\phi_i^n = (0,5c + 0,5c^2)\phi_{i-1}^{n-1} + (1 - c^2)\phi_i^n + (-0,5c + 0,5c^2)\phi_{i+1}^{n-1} \quad (2.53)$$

Presentamos algunos esquemas numéricos que se usan para resolver ecuaciones diferenciales de tipo parabólico, como es la ecuación del calor continua.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ si } 0 < x < L, t > 0, \alpha = \text{constante}$$

$$u(x, 0) = f(x) \text{ si } 0 < x < L \quad (2.54)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \text{ si } t > 0.$$

Euler progresivo (FTCS, forward time central space), con $\alpha^2 \mu = \lambda$, $\mu = h_t h_x^{-2}$

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{h_t} = \alpha^2 \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{h_x^2}, \quad (2.55)$$

Euler retrasado (BTCS, backward time central space),

$$\frac{\phi_i^n - \phi_i^{n-1}}{h_t} = \alpha^2 \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{h_x^2}, \quad (2.56)$$

FTCS en el punto (x_i, t_n) , utilizando el punto $(x_i, t_{n+1/2})$,

$$\frac{\phi_i^{n+1/2} - \phi_i^{n-1}}{\frac{h_t}{2}} = \alpha^2 \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{h_x^2}, \quad (2.57)$$

BTCS en el punto (x_i, t_n) , utilizando el punto $(x_i, t_{n+1/2})$,

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^{n+1/2}}{\frac{h_t}{2}} = \alpha^2 \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}}{h_x^2}, \quad (2.58)$$

Crank-Nicolson, esquema que se obtiene promediando los esquemas Euler retrasado (BTCS) y Euler progresivo (FTCS), y es de la forma:

$$\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{h_t} = \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{h_x^2}, \quad (2.59)$$

Du Fort-Frankel,

$$\frac{\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_{i-1}^{n-1}}{2h_t} = \alpha^2 \frac{\phi_{i+1}^n - (\phi_i^{n+1} + \phi_i^{n-1}) + \phi_{i-1}^n}{h_x^2}, \quad (2.60)$$

estas representaciones pueden escribirse convenientemente en forma explícita e implícita, de modo que podemos afirmar que:

Los **esquemas explícitos**, son un medio para calcular los valores en cada nodo (x_i, t_n) de la malla 5.2.1.1 para un tiempo posterior; en el nodo temporal (x_i, t_{n+1}) , basándose en los valores presentes del nodo temporal (x_i, t_n) y sus nodos espaciales vecinos (x_{i-1}, t_n) , (x_i, t_n) y (x_{i+1}, t_n) ver Figura 2.2. Entre estos esquemas tenemos el esquema progresivo en el tiempo y centrado en el espacio ver 2.57, el esquema Du Fort -Frankel ver 2.60 y el esquema Leap -Frog ver 2.49.

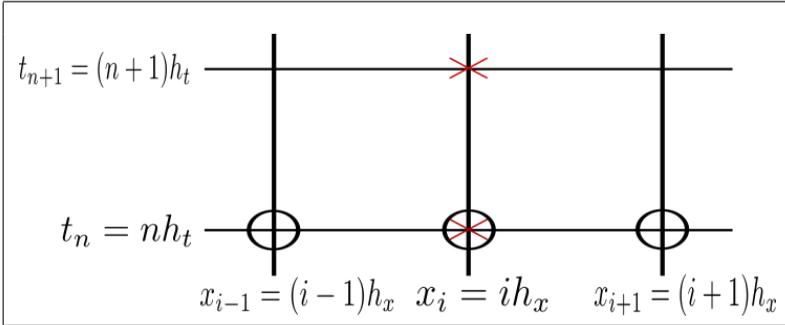


Figura 2.2: Molécula de estudio de esquemas explícitos

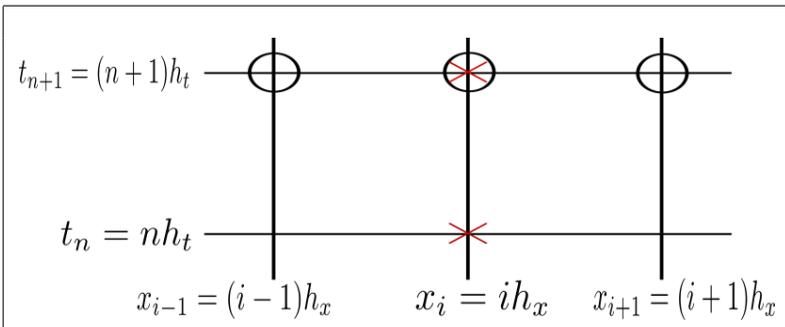


Figura 2.3: Molécula de estudio de esquemas implícitos

Los **esquemas implícitos**, son un medio para calcular los valores en cada nodo (x_i, t_n) de la malla 5.2.1.1 para un tiempo posterior; en el nodo temporal (x_{i+1}, t_{n+1}) , basándose en los valores presentes del nodo temporal (x_i, t_n) y sus nodos espaciales (x_{i-1}, t_{n+1}) , (x_i, t_{n+1}) y (x_{i+1}, t_{n+1}) ver Figura 2.3. Entre estos esquemas tenemos el esquema de Euler retrasado ver 2.56, el esquema de Crank - Nicolson ver 2.59

La ecuación del calor para el caso discreto, considerando el esquema 2.5, obtenemos

$$\begin{cases} \phi_i^{j+1} = (1 - 2\lambda)\phi_i^j + \lambda(\phi_{i+1}^j + \phi_{i-1}^j) & \forall i = \overline{1, m-1}; j = \overline{1, n} \\ \phi_i^0 = f(x_i) & \forall i = \overline{0, m} \\ \phi_i^j = \phi_{\overline{m}}^j = 0 & \forall j = \overline{0, n} \end{cases} \quad (2.61)$$

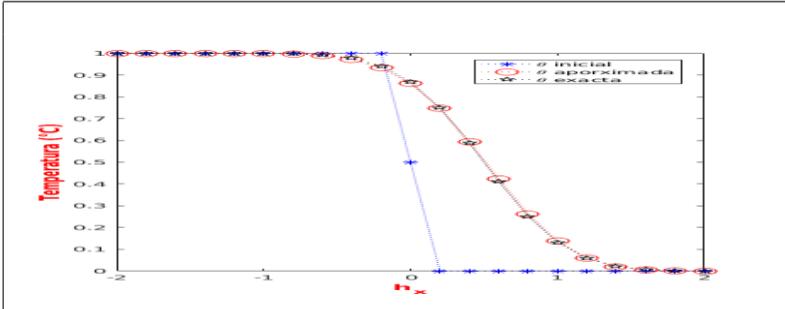


Figura 2.4: Cambios de temperatura del esquema de Lax-Wendroff usado en la ecuación de transporte lineal, ver capítulo aplicaciones (aplicación 2).

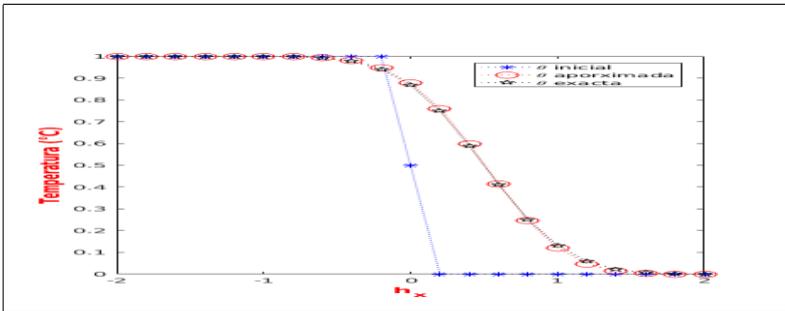


Figura 2.5: Cambios de temperatura del esquema FTCS usado en la ecuación de transporte lineal, ver capítulo aplicaciones (aplicación 2).

Ejemplo de solución explícita para la ecuación de conducción de calor unidimensional

Problema 2.4.1 Con el método explícito podemos calcular la distribución de temperatura en una barra larga y delgada que tiene una longitud de 10 cm y los siguientes valores: $\alpha^* = 0,49 \text{ cal}/(\text{s} \cdot \text{cm} \cdot ^\circ \text{C})$, $h_x = 2 \text{ cm}$ y $h_t = 0,1 \text{ s}$. En $t = 0$, la temperatura de la barra es cero, y las condiciones de frontera se fijan para todos los tiempos en $T(0) = 100^\circ \text{C}$ y $T(10) = 50^\circ \text{C}$. Considere que la barra es de aluminio con $C = 0,2174 \text{ cal}/(\text{g} \cdot ^\circ \text{C})$ y $\rho = 2,7 \text{ g}/\text{cm}^3$. Por lo tanto, $\alpha = 0,49/(2,7 \times 0,2174) = 0,835 \text{ cm}^2/\text{s}$ y $\lambda = 0,835(0,1)/(2)^2 = 0,020875$; para la solución de este problema ver [5].

2.4.1. Condición necesaria y suficiente de estabilidad

Definición 2.4.1.1 Un problema de valor inicial (PVI) se dice que es bien puesto en una norma $\|\cdot\|$ si y solamente si existe solución, es única y depende continuamente de los datos iniciales, es decir existe una constante C y β tal que:

$$\|u(x, t)\| \leq C e^{\beta t} \|u_0(x)\|$$

Definición 2.4.1.2 Un esquema de diferencias finitas $P_{h,k}\phi^n = 0$ es estable si y solamente si existen constantes K y β y alguna norma $\|\cdot\|$ tal que:

$$\|\phi^n\| \leq K e^{\beta t} \|\phi^0\|, \quad t = nk$$

con K, β independientes de h, k en forma práctica podemos expresarlo como:

$$h \sum_{-\infty}^{\infty} |\phi_j^n|^2 \leq K e^{\beta t} h \sum_{-\infty}^{\infty} |\phi_j^0|^2$$

donde h es un factor de escala asociado generalmente al tamaño de la malla $h = \max\{x_{n+1} - x_n\}$

2.4.2. Condición suficiente de estabilidad

Probaremos una condición suficiente de estabilidad, para los esquemas de paso hacia adelante en tiempo y paso hacia adelante en espacio (FTFS).

Haciendo $\zeta = c \frac{k}{h}$ y $c < 0$ se tiene:

$$U_i^{j+1} - U_i^j + \zeta(U_{i+1}^j - U_i^j) = 0; \quad i \in \mathbb{Z}; \quad j \in \mathbb{Z}_+$$

$$U_i^{j+1} = (1 + \zeta)U_i^j - \zeta U_{i+1}^j$$

El esquema general se debe escribir en la forma siguiente: $U_i^{j+1} = \alpha U_i^j - \beta U_{i+1}^j$ mostraremos que el esquema es estable si $|\alpha| + |\beta| \leq 1$, sabiendo que $2xy \leq x^2 + y^2$ se tiene:

$$\begin{aligned}
U_i^{j+1} &= \alpha U_i^j - \beta U_{i+1}^j \\
|U_i^{j+1}| &= |\alpha U_i^j - \beta U_{i+1}^j| \\
|U_i^{j+1}| &\leq |\alpha U_i^j| + |\beta U_{i+1}^j| \\
|U_i^{j+1}|^2 &\leq |\alpha U_i^j| + |\beta U_{i+1}^j| \quad ^2 \\
\sum_{i=-\infty}^{\infty} |U_i^{j+1}|^2 &\leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\alpha U_i^j| + |\beta U_{i+1}^j| \quad ^2 \\
\sum_{i=-\infty}^{\infty} |U_i^{j+1}|^2 &\leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\alpha|^2 |U_i^j|^2 + 2|\alpha||\beta| |U_i^j| |U_{i+1}^j| + |\beta|^2 |U_{i+1}^j|^2 \\
\sum_{i=-\infty}^{\infty} |U_{i+1}^j|^2 &\leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\alpha|^2 |U_i^j|^2 + 2|\alpha||\beta| |U_i^j|^2 + |\beta|^2 |U_i^j|^2 \\
\sum_{i=-\infty}^{\infty} |U_i^{j+1}|^2 &\leq |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} |U_i^j|^2
\end{aligned}$$

Haciendo $j + 1 = n$, cuando $j = 0$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |U_i^n|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^{2n} \sum_{i=-\infty}^{\infty} |U_i^0|^2$$

El esquema es estable si $|\alpha| + |\beta| \leq 1$.

En particular para el esquema **FTFS** $U_i^{j+1} = (1 + \zeta)U_i^j - \zeta U_{i+1}^j$ se tiene:

$$|1 + \zeta| + |\zeta| \leq 1$$

lo cual significa que cada sumando $\zeta \leq 0$ y $\zeta > -1 \iff -1 \leq \zeta \leq 0$.

Sea el número $\lambda = \frac{k}{h}$; $\zeta = c\lambda$ llamado número de **Courant** e indica que el esquema es estable si:

$$\frac{-1}{c} \leq \frac{k}{h} \leq 0$$

la cual genera una dependencia entre k y h_x a fin de mantener estabilidad.

Para el esquema **FTBS**

$$\phi_i^{n+1} = (1 - \zeta)\phi_i^n + \zeta\phi_{i-1}^n \tag{2.62}$$

y haciendo $|1 - \zeta| + |\zeta| \leq 1$, lo cual significa que cada sumando $\zeta \geq 0$ y $\zeta \leq 1$ si y solo si $0 \leq \zeta \leq 1$ haciendo $C_\lambda = \zeta$ llamado número de Courant podemos establecer : $C_\lambda = c\lambda = c - \frac{k}{h}$ el número de **Courant** indica que el esquema (2.62) es estable si :

$c > 0$ con $0 \leq C_\lambda \leq 1$, es decir $0 \leq c\lambda \leq 1$, obtenemos $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{c}$

El cual genera una dependencia entre k y h_x a fin de mantener estabilidad. Ahora que se ha reducido el espacio de búsqueda para el cual las soluciones son estables. ¿Que tanto podemos expandirnos?.

2.5. Análisis de Von Neumann

Con el uso del análisis de Fourier se puede dar condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de esquemas de diferencias finitas, esto es lo que se llama **análisis de Von Neumann**. [3] Usando la fórmula de inversión y la transformada discreta de Fourier dada en (2.23) y (2.24) del caso unidimensional, podemos escribir

$$\phi_i^n = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi}{h_x} e^{i h_x \xi} \hat{\phi}(\xi, n) d\xi, \quad (2.63)$$

tal que $\hat{\phi}(\xi, n) = \frac{h_x}{(2\pi)^{1/2}} \sum_i \phi_i^n e^{-i h_x \xi}$,

$$\phi_i^{n+1} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi}{h_x} e^{i h_x \xi} \hat{\phi}(\xi, n+1) d\xi, \quad (2.64)$$

tal que $\hat{\phi}(\xi, n+1) = \frac{h_x}{(2\pi)^{1/2}} \sum_i \phi_i^{n+1} e^{-i h_x \xi}$,

$$\phi_{i-1}^n = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\frac{\pi}{h_x}}^{\frac{\pi}{h_x}} e^{i(i-1)h_x \cdot \xi} \hat{\phi}(\xi, n) d\xi, \quad (2.65)$$

tal que $\hat{\phi}(\xi, n) = \frac{h_1}{(2\pi)^{1/2}} \sum_i \phi_{i-1}^n e^{-i(i-1)\theta_1}$,

Sumando y reemplazando las fórmulas (2.63), (2.64) y (2.65) en la ecuación discreta (2.62) obtenemos

$$I_f = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\frac{\pi}{h_x}}^{\frac{\pi}{h_x}} e^{i i h_x \cdot \xi} \hat{\phi}(\xi, n+1) d\xi$$

$$I_f = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\frac{\pi}{h_x}}^{\frac{\pi}{h_x}} e^{i i h_x \cdot \xi} [(1 - \zeta) + \zeta e^{-i h_x \cdot \xi}] \hat{\phi}(\xi, n) d\xi$$

$$\hat{\phi}(\xi, n+1) = [(1 - \zeta) + \zeta e^{-i h_x \cdot \xi}] \hat{\phi}(\xi, n), \quad (2.66)$$

donde $\rho(h_x \xi) = \hat{Q}(e^{-i h_x \cdot \xi})$ es un polinomio de la forma

$$\begin{aligned} \rho(h_x \xi) &= (1 - \zeta) + \zeta e^{-i h_x \cdot \xi} \\ \rho(\theta_1) &= 1 - \zeta + \zeta S_{1-} \\ \rho(\theta_1) &= 1 - \zeta + \zeta e^{-i \theta_1} \\ \rho(\theta_1) &= 1 - \zeta + \zeta [\cos(\theta_1) - i \sin(\theta_1)] \\ |\rho(\theta_1)|^2 &= [1 - (1 - \cos(\theta_1))\zeta]^2 + [\zeta \sin(\theta_1)]^2 \\ |\rho(\theta_1)|^2 &= 1 + 4\zeta(1 - \zeta) \sin^2 \frac{\theta_1}{2}, \end{aligned} \quad (2.67)$$

denominado Factor de Amplificación.

2.6. Análisis de Von Neumann sobre $\xi \in [0, 2\pi)$

También podemos definir la transformada discreta de Fourier de u , siendo $u = \{u_i\}$, sobre un dominio $0 \leq \xi < 2\pi$ [20], donde

$$\hat{u}(\xi) = \sum_i u_i e^{i i \xi}; \hat{u}_i \in \mathbb{C}, i \in \langle -\infty; +\infty \rangle. \quad (2.68)$$

Definamos $S_+ u := u_{i+1}$, entonces aplicando la Transformada discreta de Fourier se tiene:

$$\begin{aligned} (\widehat{S_+ u})(\xi) &= \sum u_{i+1} e^{i i \xi} \\ &= \sum u_i e^{i(i-1)\xi} \\ &= \sum u_i e^{i i \xi} e^{-i \xi} \\ &= e^{-i \xi} \sum u_i e^{i i \xi} \\ (\widehat{S_+ u})(\xi) &= e^{-i \xi} \hat{u}(\xi) \end{aligned}$$

- Donde $e^{-i \xi}$ es designado por el símbolo S_+ es decir $S_+ := e^{-i \xi}$
- Análogamente definamos $S_- u := u_{i-1}$, entonces aplicando la Transformada discreta de Fourier se tiene:

$$\begin{aligned} (\widehat{S_- u})(\xi) &= \sum u_{i-1} e^{i i \xi} = \sum u_i e^{i(i+1)\xi} = e^{i \xi} \sum u_i e^{i i \xi} \\ (\widehat{S_- u})(\xi) &= e^{i \xi} \hat{u}(\xi) \end{aligned}$$

de donde $e^{i \xi}$ es designado por el símbolo S_- es decir $S_- := e^{i \xi}$

- Además podemos establecer :

$$S_+ S_- = S_- S_+ = I$$

2.6.1. Operadores discretos de Diferencias Finitas

Usando la notación de la función discreta dada en la ecuación (5.2)

1. Operador de desplazamiento derecha: $S_+ \phi_i^j = \phi_{i+1}^j$; $S_+ \phi = \{\phi_{i+1}^j\}$
2. Operador de diferencia hacia adelante:

$$D_+ \phi_i^j = \frac{\phi_{i+1}^j - \phi_i^j}{h} = \frac{S_+ \phi_i^j - \phi_i^j}{h} = \frac{(S_+ - I) \phi_i^j}{h}$$

3. Operador de diferencia hacia atras:

$$D-\phi_i^j = \frac{\phi_i^j - \phi_{i-1}^j}{h} = \frac{\phi_i^j - S-\phi_i^j}{h} = \frac{(I - S-)\phi_i^j}{h}$$

4. Operador de desplazamiento izquierda: $S-\phi^j = \phi_{i-1}^j$; $S-\phi = \{\phi_{i-1}^j\}$

5. Operador discreto progresivo en el tiempo: $\phi^{j+1} = \vartheta(x_i, t_j + k)$

6. Operador discreto regresivo en el espacio: $\phi_{i-1}^j = \vartheta(x_i - h, t_j)$

7. Operador discreto progresivo en el espacio: $\phi_{i+1}^j = \vartheta(x_i + h, t_j)$

Del esquema (2.5) utilizando el operador de desplazamiento regresivo en el espacio tenemos:

$$\phi_i^{j+1} = (1 - \zeta)\phi_i^j + \zeta\phi_{i-1}^j$$

$$\phi_i^{j+1} = (1 - \zeta)\phi_i^j + \zeta S-\phi_i^j \equiv \phi_i^j - kD-\phi_i^j$$

$$\phi_i^{j+1} = (1 - \zeta + \zeta S-)\phi_i^j$$

$$\phi_i^{j+1} = Q(S-)\phi_i^j$$

Aplicamos transformada de Fourier , el cual describe el comportamiento espectral de la señal: $\hat{\phi}^{j+1} = \rho(\xi)\hat{\phi}^j$, sabemos que

$$Q(S-) = 1 - \zeta + \zeta S-$$

$$Q(e^{\hat{\zeta}}) = 1 - \zeta + \zeta e^{\hat{\zeta}}$$

$$\rho(\xi) = 1 - \zeta + \zeta e^{\hat{\zeta}}$$

$$|\rho(\xi)|^2 = [1 - (1 - \cos\xi)\zeta]^2 + [\zeta \sin\xi]^2$$

$$|\rho(\xi)|^2 = 1 + 4\zeta(1 - \zeta)\sin^2 \frac{\xi}{2}$$

donde $|\rho(\xi)|^2 = 1 + 4\zeta(1 - \zeta)\sin^2 \frac{\xi}{2}$ es llamado factor de amplificación.

Geoméricamente este resultado significa que si el método de las diferencias finitas es estable, entonces se satisface la condición de Von Neuman y $|\rho(\xi)| \leq 1$.

En este caso este método es estable para $c > 0$ y $0 < \zeta = c \frac{k}{h} \leq 1$.

Considerando el simbolo $\rho(\xi)$ una función compleja escrita como

$$\rho(\xi) = 1 - \zeta + \zeta e^{\hat{\zeta}}$$

el cual representa un círculo unitario de radio ζ y centro $1 - \zeta$ en el plano complejo descrito en la figura (2.6):

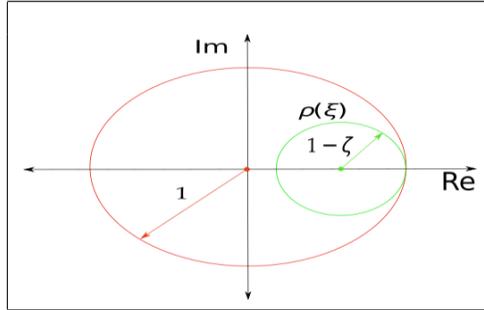


Figura 2.6: Círculo unitario de radio ζ y centro $1 - \zeta$ en el plano complejo que representa estabilidad del método.

Análogamente tenemos como factor de amplificación utilizando el operador de desplazamiento regresivo en el espacio tenemos:

$$\begin{aligned} \phi_i^{j+1} &= (1 + \zeta)\phi_i^j - \zeta\phi_{i-1}^j \\ \phi_i^{j+1} &= (1 + \zeta)\phi_i^j - \zeta S_- \phi_i^j \equiv \phi_i^j + kD_- \phi_i^j \\ \phi_i^{j+1} &= (1 + \zeta - \zeta S_-)\phi_i^j \\ \phi_i^{j+1} &= Q(S_-)\phi_i^j, \end{aligned}$$

Aplicamos transformada de Fourier, el cual describe el comportamiento espectral de la señal: $\hat{\phi}_i^{j+1} = \rho(\xi)\hat{\phi}_i^j$, sabemos que

$$\begin{aligned} Q(S_-) &= 1 + \zeta - \zeta S_- \\ Q(e^{i\xi}) &= 1 + \zeta - \zeta e^{i\xi} \\ |\rho(\xi)|^2 &= [1 + (1 - \cos\xi)\zeta]^2 + [-i\zeta \sin\xi]^2 \\ |\rho(\xi)|^2 &= 1 + 4\zeta(1 + \zeta)\sin^2 \frac{\xi}{2} \end{aligned}$$

donde $|\rho(\xi)|^2 = 1 + 4\zeta(1 + \zeta)\sin^2 \frac{\xi}{2}$ es llamado factor de amplificación. Geométricamente este resultado significa que si el método de las diferencias finitas es estable, entonces se satisface la condición de Von Neuman y $|\rho(\xi)| \leq 1$.

En este caso este método es estable si $c < 0$ esto implica que $\zeta = \frac{k}{h} < 0$.

Considerando el símbolo $\rho(\xi)$ una función compleja escrita como

$$\rho(\xi) = 1 + \zeta - \zeta e^{\hat{\imath}\xi}$$

el cual representa un círculo unitario de radio ζ y centro $1 + \zeta$ en el plano complejo descrito en la Figura (2.7):

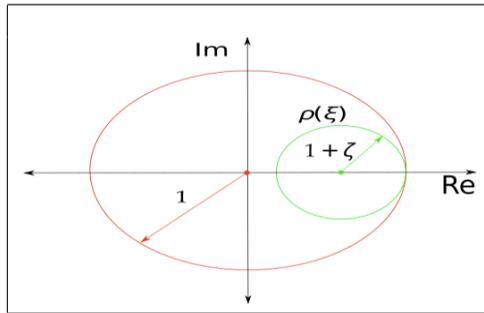


Figura 2.7: Círculo unitario de radio ζ y centro $1 + \zeta$ en el plano complejo que representa estabilidad del método.

Por lo tanto este método será condicionalmente inestable para $c > 0$ donde

$$\rho(\xi) = 1 + \zeta - \zeta e^{\hat{\imath}\xi}$$

el cual representa un círculo unitario de radio ζ y centro $1 + \zeta$ en el plano complejo descrito en la figura (2.8):

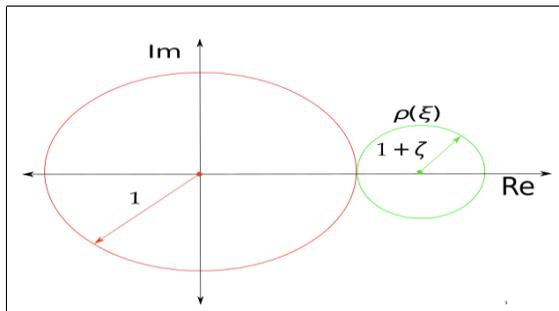


Figura 2.8: Círculo unitario de radio ζ y centro $1 + \zeta$ en el plano complejo que representa inestabilidad del método.

2.7. Ejemplos de esquemas más comunes

Consideremos la ecuación de advección unidimensional, con condición inicial campana doble de Gauss

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{si } x \in \mathbb{R}, t > 0, a = \text{constante} \quad (2.69)$$

$$u(x, 0) = e^{-20(x-2)^2} + e^{-(x-5)^2} \quad \text{si } 0 \leq x \leq 25$$

En el problema (2.69) usaremos el esquema Upwind para $a > 0$, es decir $a = 1$ y $h_x = 0,05$ con un número de Courant $a \frac{h_t}{h_x} = 0,8$ lo que implica que $h_t = 0,04$ analizaremos el instante $t_{340} = 17$ donde $n = 340$ y $t_{500} = 25$ donde $n = 500$ obtenidos de $h_x = \frac{25-0}{n}$, para su interpretación visual ver Figura 2.9 y Figura 2.9, además pueden ejecutar su código en Octave, ver 8.1.

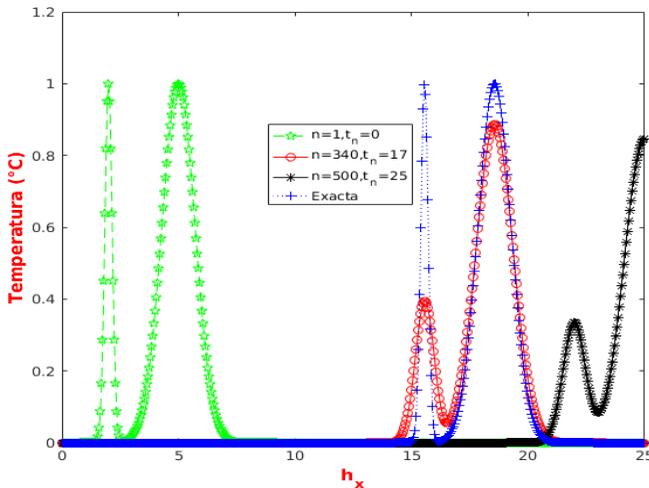


Figura 2.9: Comportamiento del esquema upwind en el tiempo $t = 0$, $t = 17$ y $t = 25$.

Ahora usaremos el esquema de Lax-Friedrichs en el problema (2.69), para su interpretación visual ver Figura 2.10 y Figura 2.11, además pueden ejecutar su código en Octave, ver 8.2.

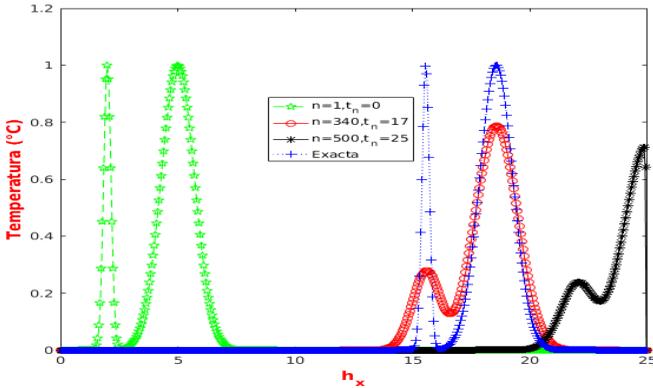


Figura 2.10: Comportamiento del esquema Lax-Friedrichs en el tiempo $t = 0$, $t = 17$ y $t = 25$.

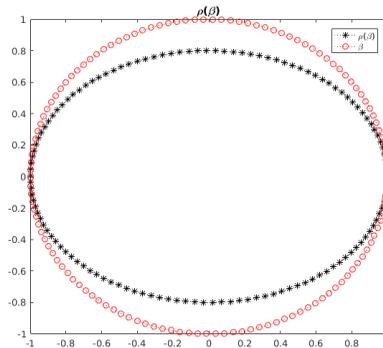


Figura 2.11: Factor de amplificación usando el esquema Lax-Friedrichs, para $a > 0$.

Ahora usaremos el esquema de Lax-Wendroff en el problema (2.69), para su interpretación visual ver Figura 2.12 y Fífura 2.13, además pueden ejecutar su código en Octave, ver 8.3.

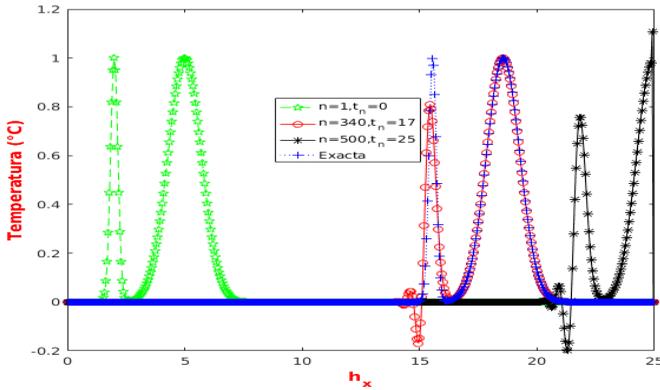


Figura 2.12: Comportamiento del esquema Lax-Wendroff en el tiempo $t = 0$, $t = 17$ y $t = 25$.

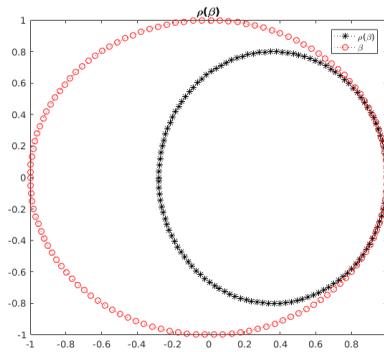


Figura 2.13: Factor de amplificación usando el esquema Lax-Wendroff, para $a > 0$.

Ahora usaremos el esquema de Leap-Frog en el problema (2.69), para su interpretación visual ver Figura 2.14 y Fifura 2.15, además pueden ejecutar su código en Octave, ver 8.4.

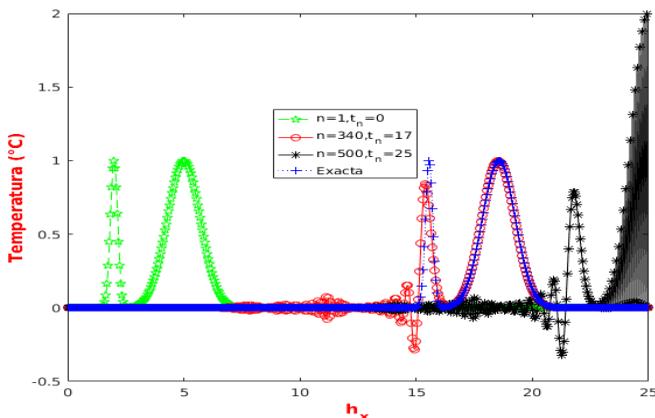


Figura 2.14: Comportamiento del esquema Leap-Frog en el tiempo $t = 0$, $t = 17$ y $t = 25$.

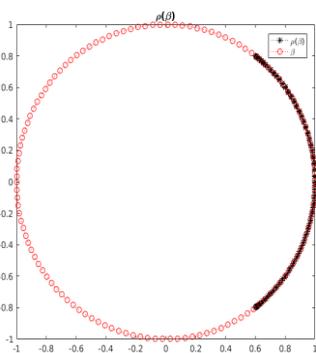


Figura 2.15: Factor de amplificación usando el esquema Leap-Frog, para $a > 0$.

Capítulo III

Esquema Upwind: Consistencia, convergencia y estabilidad

3.1. Discretización de la Ecuación Diferencial

Ahora encontramos la ecuación discretizada del problema (2.42) usando el esquema Upwind.

Caso1: Para $u_1 \leq 0$ es

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{h_t} = -u_1 \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{h_x}. \quad (3.1)$$

Caso2: Para $u_1 > 0$ el esquema Upwind es:

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{h_t} = -u_1 \frac{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n}{h_x}. \quad (3.2)$$

Note, que los términos advectivos en la dirección del eje x son regresivos cuando los coeficientes de velocidad son definidos positivos, es decir $u_1 > 0$; y los términos advectivos en la dirección del eje x son progresivos cuando los coeficientes de velocidad son negativos, es decir $u_1 \leq 0$ de allí el nombre **Upwind** ya que la derivada espacial se evalúa contra el viento desde el punto de la malla definida en 5.2.1.1.

Estas características hace que el esquema Upwind tenga "sentido físico" y así sea mas atractivo en las aplicaciones [22].

El esquema Upwind se ha utilizado ampliamente en los modelos numéricos de mesoescala en los primeros niveles de tiempo del desarrollo del modelo numérico. Debido a su ventaja en los niveles de tiempo iniciales, ahorra

una cantidad significativa de memoria de la computadora en las simulaciones ver el capítulo cuatro.

Sin embargo, sus características de amortiguación computacional y la falta de conservación de la fase adecuada han generado serias críticas, estos aspectos del esquema Upwind para el caso unidimensional fueron tratados ha detalle en el capítulo cuatro. Se cree que esta técnica es aceptable si la advección y la propagación de ondas no son dominantes en las relaciones de conservación para un fenómeno particular de mesoescala [18].

Sin embargo, puede ser posible mejorar la precisión computacional, y para tal efecto en esta investigación se ha trabajado la parte convectiva del problema (2.42) usando el esquema Upwind econtrando las siguientes equivalencias (en la dirección del eje x)

Caso1: Para $u_1 \leq 0$, se tiene

$$\begin{aligned} u_1 \left(\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{h_x} \right) &= u_1 \left(\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} + \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} + \frac{\phi_{i-1}^n - \phi_i^n}{h_x} \right) \\ &= u_1 \left(\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} \right) + u_1 \frac{h_x}{2} \frac{(\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n)}{h_x^2}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

Caso2: Para $u_1 > 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} u_1 \left(\frac{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n}{h_x} \right) &= u_1 \left(\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} + \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} + \frac{\phi_i^n - \phi_{i+1}^n}{h_x} \right) \\ &= u_1 \left(\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} \right) - u_1 \frac{h_x}{2} \frac{(\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n)}{h_x^2}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde se puede ver que aparece una diferencia central de primer orden y una diferencia central de segundo orden llamado difusión numérica. En la dirección del eje y, z los cálculos matemáticos son similares ha los usados en para obtención de las ecuaciones (5.24) y (5.25).

Las razones por la que se ha decidido trabajar la parte convectiva del problema (PVIC) con las expresiones (5.24) y (5.25) en lugar de las presentadas en (5.22), (5.23), es porque haciendo un análisis numérico exhaustivo ver el capítulo cuatro, estas expresiones (5.24) y (5.25) para el caso unidimensional generan una mayor precisión por efectos del error de redondeo a partir de ocho decimales.

Así la ecuación discretizada del problema (2.42) usando el esquema Upwind (arreglado), con su modificación se presenta:

Caso1: Para $u_1 \leq 0$ es

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{h_t} = -u_1 \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} - \left(\frac{u_1 h_x}{2} + \left(\frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{h_x^2} \right) \right), \quad (3.5)$$

Caso2: Para $u_1 > 0$ el esquema Upwind es

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{h_t} = -u_1 \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} + \left(\frac{u_1 h_x}{2} \right) \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{h_x^2}. \quad (3.6)$$

observe, que la discretización del problema (2.42) escrito en la forma (5.26) y (5.27) tienen un error local de truncamiento de $o(h_x) + o(h_t)$.

De las aproximaciones (5.2) definimos los siguientes operadores discretos:

$$S_{1\pm}\phi_i^n := \phi_{i\pm 1}^n \text{ tal que } S_{1\pm}\phi = \{\phi_{i\pm 1}^n\}, \quad (3.7)$$

podemos caracterizar a S_{1+} , S_{1-} como los operadores de desplazamiento hacia adelante y hacia atrás respectivamente, en dirección del eje x .

Sea el operador diferenciable y continuo P , el esquema de diferencias finitas Upwind (5.23) se puede escribir como un operador discreto

$$P_{h_x, h_t} \phi_i^n = 0. \quad (3.8)$$

Ahora se realizara un análisis del esquema de diferencia central y comensuramos por la consistencia, estabilidad y convergencia para finalizar.

3.2. Consistencia

Definición 3.2.0.1 $P_{h_x, h_t} \phi_i^n$ es consistente con $P\vartheta$ hasta un tiempo $n > 0$ en ℓ^2 -norma, si $\|P_{h_x, h_t} \phi_i^n\|_{\ell^2} = \|\kappa\tau(h_x, h_t)\|_{\ell^2}$; y $\tau(h_x, h_t) \rightarrow 0$ cuando $\kappa \rightarrow 0$.

Donde $\tau(h_x, h_t)$ es el error de truncamiento local en el tiempo $n\kappa$.

Probaremos la consistencia [3] de la ecuación discretizada (5.23), para tales efectos denotemos los operadores diferenciales continuos A y P como:

$A = \frac{\partial}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial x}$ aplicando estos operadores a una función suave $\vartheta(\xi, t)$ para $\xi \in \mathbb{R}$ se tiene $A\vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$, así la ecuación (2.42) se escribe como

$$P\vartheta - A\vartheta = 0. \quad (3.9)$$

Luego con la fórmula de Taylor progresivo en el tiempo obtenemos:

$$\begin{aligned} \vartheta(\xi, t_n + h_t) &= \vartheta(\xi, t_n) + \frac{1}{1!} h_t \vartheta_t(\xi, t_n) + \\ &\frac{1}{2!} h_t^2 \vartheta_{tt}(\xi, t_n) + \frac{1}{3!} h_t^3 \vartheta_{ttt}(\xi, t_n) + \dots, \end{aligned} \quad (3.10)$$

y reemplazando la notación (5.1) en la expansión de Taylor (5.31) obtenemos

$$\vartheta_i^{n+1} = \vartheta_i^n + \vartheta_t h_t + O(h_t^2). \quad (3.11)$$

Usando fórmula de Taylor con las variables espaciales obtenemos:

$$\begin{aligned} \vartheta(x_i \pm h_x, t_n) &= \vartheta(\xi_i, t_n) \pm \frac{1}{1!} h_x \vartheta_x(\xi_i, t_n) \\ &+ \frac{1}{2!} h_x^2 \vartheta_{xx}(\xi_i, t_n) \pm \frac{1}{3!} h_x^3 \vartheta_{xxx}(\xi_i, t_n) + \dots, \end{aligned} \quad (3.12)$$

y reemplazando la notación reducida $\vartheta_{i \pm 1}^n = \vartheta(x_i \pm h_x, t_n)$ en la expansión de Taylor (5.33) obtenemos

$$\vartheta_{i \pm 1}^n = \vartheta_i^n \pm \vartheta_x h_x + O(h_x^2). \quad (3.13)$$

Trabajando y reemplazando la aproximación (5.32) y (5.34) en la ecuación (5.23) obtenemos que el operador discreto (5.29) se puede escribir como

$$\begin{aligned} P_{h_x h_t} \phi_i^n &= \vartheta_t + u_1 \vartheta_x + o(h_x) + o(h_t) \\ P_{h_x h_t} \phi_i^n &= A \vartheta + o(h_x) + o(h_t), \end{aligned} \quad (3.14)$$

de la ecuación (5.30) y la ecuación (5.36) obtenemos

$$P\vartheta - P_{h_x h_t} \phi_i^n = o(h_x) + o(h_t). \quad (3.15)$$

Así el esquema (5.23) es consistente con (5.30) pues de (5.37) podemos apreciar que el error local de truncamiento que es el lado derecho tiende a cero cuando $h_x, h_t \rightarrow 0$ tienden a cero es decir:

$$P\vartheta - P_{h_x h_t} \phi_i^n \rightarrow 0.$$

Por lo tanto hemos contrastado la definición 5.3.1.1.

3.3. Estabilidad

Para garantizar la estabilidad del esquema Upwind expresado de la forma (5.46), deben satisfacer el criterio **Von Neumann** el cual sera abordado con detalle

Definición 3.3.0.1 *El esquema de diferencias finitas Upwind expresado como (5.46) es **estable** con respecto alguna norma $\| \cdot \|$ si y solo si existe solución, es única y depende continuamente de los datos iniciales, es decir existen*

constantes positivas h_{x_0} , h_{t_0} y constantes no negativas $C > 0$, $t > 0$, $\alpha > 0$ con $n \geq 0$ tal que

$$\|\phi_i^{n+1}\| \leq Ce^{\alpha t} \|\phi_i^0\|,$$

para $0 \leq t = (n+1)h_t$, $0 < h_x \leq h_{x_0}$ y $0 < h_t \leq h_{t_0}$.

Haciendo la siguiente notación

$$\lambda_1 = \frac{h_t u_1}{h_x}, \quad \alpha_x = 0,5u_1 h_x, \quad \mu_1 = 0,5\lambda_1. \quad (3.16)$$

donde λ_1 son denominados los números de Courant, la ecuación (5.23) para $u_1 > 0$ se puede escribir como:

$$\phi_i^{n+1} = (1 - 2\mu_1)\phi_i^n + \left(\frac{-\lambda_1}{2} + \mu_1\right)\phi_{i+1}^n + \left(\frac{\lambda_1}{2} + \mu_1\right)\phi_{i-1}^n. \quad (3.17)$$

De las notaciones (5.43), y los operadores discretos (5.28) el esquema Upwind expresado de la forma (5.44) se escribe como

$$\phi_{i,j,k}^{n+1} = (1 - 2\mu_1)\phi_i^n + \left(\frac{-\lambda_1}{2} + \mu_1\right)S_{1+}\phi_i^n + \left(\frac{\lambda_1}{2} + \mu_1\right)S_{1-}\phi_i^n. \quad (3.18)$$

Finalmente la ecuación (5.45) queda representada como

$$\phi_i^{n+1} = Q\phi_i^n, \quad (3.19)$$

donde $Q = Q(S_{1+}, S_{1-})$ es un polinomio de la forma:

$$Q = (1 - 2\mu_1) + \left(\frac{-\lambda_1}{2} + \mu_1\right)S_{1+} + \left(\frac{\lambda_1}{2} + \mu_1\right)S_{1-}. \quad (3.20)$$

Trabajando y reemplazando (5.42), (5.43) en el polinomio Q y usando la fórmula de inversión de Fourier, detallado en la definición (5.3.2.2) el esquema explícito (5.46) se escribe de la forma:

$$\hat{\phi}_i^{n+1} = \rho \hat{\phi}_i^n \text{ siendo } \hat{Q} = \rho(\beta_1, h_x, h_t) \quad (3.21)$$

donde $\rho(\beta_1, h_x, h_t) = \hat{Q}(e^{\pm i h_x \xi_1})$ se puede escribir como:

$$\rho = 1 - 4\mu_1 \text{sen}^2 \frac{\beta_1}{2} - \hat{\lambda}_1 \text{sen} \beta_1. \quad (3.22)$$

Haciendo procedimientos análogos y considerando

$$\alpha_x^* = -0,5u_1 h_x, \quad \mu_1^* = -0,5\lambda_1, \quad (3.23)$$

el esquema explícito (5.47) se escribe de la forma:

$$\rho = 1 - 4\mu_1^* \text{sen}^2 \frac{\beta_1}{2} - \hat{\lambda}_1 \text{sen} \beta_1. \quad (3.24)$$

La ecuación (5.49) y (5.51) se denominan **factor de amplificación** y mide la amplitud de las soluciones generadas por el esquema Upwind.

Criterio de Von Neumann

Con el uso del análisis de Fourier se puede dar condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de esquemas de diferencias finitas, esto es lo que se llama análisis de Von Neumann para tales efectos estableceremos el siguiente criterio y teorema respectivamente

Criterio 3.3.1 *El esquema Upwind expresado de la forma (5.46) satisface el criterio de estabilidad de Von Neumann [20], si existe una constante $C > 0$ independiente de $h_x, h_t, \theta_1, \kappa$ tal que*

$$|\rho(\theta_1, h_x, h_t)| \leq 1 + C\kappa. \quad (3.25)$$

Donde $\kappa > 0$ es el paso del tiempo y $\rho(\theta_1, h_x, h_t)$ denota el radio espectral del factor de amplificación (5.49) y (5.51).

Si $\rho(\theta_1, h_x, h_t)$ es independiente de h_x, h_t , la condición de estabilidad (5.51) puede ser remplazada con una condición de estabilidad restricta como

$$|\rho(\theta_1)| \leq 1. \quad (3.26)$$

Teorema 3.3.1 *El esquema de diferencias finitas Upwind representado en (5.46) es estable en la norma ℓ^2 si y solo si satisface el criterio (5.3.1) de Von Neumann.*

El teorema (5.3.1) muestra que para determinar la estabilidad esquema de diferencias finitas Upwind representado en (5.46), solamente necesitamos considerar el factor de amplificación $\rho(\theta_1, h_x, h_t)$.

Demostración

\Leftrightarrow Si el criterio (5.3.1) de **Von Neumann** es satisfecha, el esquema de diferencias finitas Upwind representado en (5.46) es estable en la norma ℓ^2 . Para mas detalles ver ([11],[15] y [3])

Conclusión 3.3.1 *El esquema Upwind representado en (5.46) es llamado estable si existe una constante $\kappa > 0, C > 0, T > 0$ y una norma ℓ^2 tal que*

$$\|\phi^n\|_{\ell^2} = \|Q^n \phi^0\|_{\ell^2} \leq e^{CT} \|\phi^0\|_{\ell^2},$$

donde $n\kappa \leq T$; κ y C independientes de h_1, h_t, θ_1 , con $n > 0$ siendo $\theta_1 = h_1\xi$ con $\xi \in [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$.

Note, que de acuerdo al criterio (5.3.1), si $\rho(\theta_1, h_x, h_t) = \rho(\theta_1)$ entonces la CVN se puede sustituir por $\rho(\theta_1) \leq 1$.

En efecto aplicando este resultado en (5.49) obtenemos

$$\left|1 - 4\mu_1 \sin^2 \frac{\theta_1}{2}\right| + |\lambda_1 \sin \theta_1| \leq 1, \quad (3.27)$$

y aplicando en (5.51) obtenemos

$$|1 - 4\mu_1^* \text{sen}^2 \frac{\theta_1}{2}| + |\lambda_1 \text{sen} \theta_1| \leq 1. \quad (3.28)$$

Observe, que mayorando la ecuación (5.67) y (5.68) considerando $h_x = h_t$ obtenemos que las condiciones de estabilidad son respectivamente [10]

$$|1 - 4(+0,5u_1)|_{\max} + |u_1|_{\max} \leq 1, \quad (3.29)$$

$$|1 - 4(-0,5u_1)|_{\max} + |u_1|_{\max} \leq 1. \quad (3.30)$$

3.4. Convergencia

Definición 3.4.0.1 *Un esquema de diferencia finita Upwind que aproxima una ecuación diferencial parcial como (2.42) es un esquema **convergente** en alguna norma $\|\cdot\|$ si las soluciones de la ecuación diferencial parcial $\vartheta(\xi, t)$, y las soluciones del esquema de diferencias finitas ϕ_i^n , tales que ϕ_i^0 , converge a $\vartheta_0(\xi)$ cuando ih_x, nh_t converge a x, t respectivamente, entonces ϕ_i^n converge a $\vartheta(\xi, t)$ cuando (ih_x, nh_t) converge a (x, t) cuando h_x, h_t convergen a 0; con $\xi \in \mathbf{R}$ y $t > 0$.*

Proposición 3.4.1 *Las soluciones del esquema de diferencias finitas Upwind (5.46) son convergentes en norma ℓ^2 , con las soluciones de la ecuación diferencial parcial (2.42), representadas por $\vartheta(\xi, t)$, para $\xi \in \mathbf{R}$ si $\|\vartheta(\xi, t) - \phi_i^n\|_{\ell^2} \rightarrow 0$ cuando $h_x, h_t \rightarrow 0$.*

Demostración

Note, que considerando $h_x = h_t = h$ el esquema Upwind (5.23) se escribe de la siguiente manera

$$\vartheta_i^{n+1} = Q \vartheta_i^n + 2o(h). \quad (3.31)$$

Sea $\vartheta(\xi, t)$ una solución de la ecuación (5.30), como el esquema Forward Upstream es **consistente** con orden de precisión (1, 1), del resultado (5.37), trabajando y considerando $h_x = h_t = h$ obtenemos

$$P \vartheta - P_{h, h} \phi_i^n = 2o(h), \quad (3.32)$$

es decir

$$\vartheta_i^n = Q \vartheta_i^{n-1} + 2o(h). \quad (3.33)$$

$$\text{Sea } \varphi_i^n = \vartheta_i^n - \phi_i^n \text{ el error en el } n\text{-ésimo paso,} \quad (3.34)$$

$$\text{tal que } \varphi_i^0 = m \hat{\Delta}_i \times |\vartheta_i^0 - \phi_i^0| = 0. \quad (3.35)$$

De la ecuación (5.71), la ecuación (5.72) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \varphi_i^n &= Q\varphi_i^{n-1} + 2\sigma(h) \\ &= Q^2\varphi_i^{n-2} + Q[2\sigma(h)] + 2\sigma(h) \end{aligned}$$

$$= Q^n\varphi_i^0 + \sum_{j=0}^{n-1} Q^j[2\sigma(h)],$$

usando la ecuación (5.73) obtenemos

$$\varphi_i^n = \sum_{j=0}^{n-1} Q^j[2\sigma(h)]$$

$$\|\varphi_i^n\|_{\ell^2} \leq \sum_{j=0}^{n-1} \|Q^j\|_{\ell^2} [2\sigma(h)], \quad (3.36)$$

y usando la conclusión 5.3.1 de **estabilidad** esta desigualdad se escribe como

$$\|\varphi_i^n\|_{\ell^2} \leq \sum_{j=0}^{n-1} e^{CT_j} [2\sigma(h)]. \quad (3.37)$$

Remplazando la ecuación (5.72) en la desigualdad (5.75) obtenemos

$$\|\vartheta_i^n - \phi_i^n\|_{\ell^2} \leq \sum_{j=0}^{n-1} e^{CT_j} [2\sigma(h)], \quad (3.38)$$

cuando $T_j \sim t_j = jh$ obtenemos

$$\|\vartheta_i^n - \phi_i^n\|_{\ell^2} = o(h) \quad (3.39)$$

del resultado de la ecuación (5.77) el esquema de las diferencias finitas Upwind es convergente de orden (1,1).

Podemos concluir que los criterios de consistencia, convergencia y estabilidad quedan rigurosamente establecidos.

Capítulo IV

Representaciones del esquema Upwind

4.1. Ecuación de convección unidimensional

Ahora examinaremos la ecuación de convección unidimensional ([7])

$$\vartheta_t + u\vartheta_x = 0, \quad (4.1)$$

con $x \in [0, 1]$ donde u es la velocidad y ϑ es una función escalar que representa la temperatura, sujeto a la condición inicial

$$\vartheta(x, 0) = \begin{cases} \sin(10\pi x) & \text{si } 0 \leq x \leq 0,1, \\ 0 & \text{si } 0,1 < x \leq 1, \end{cases} \quad (4.2)$$

y condición de frontera $\vartheta(0, t) = \vartheta(1, t) = 0$ para $t > 0$ con solución exacta

$$\vartheta(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq ut, \\ \sin(10\pi(x - ut)) & \text{si } ut < x \leq ut + 0,1, \\ 0 & \text{si } ut + 0,1 < x \leq 1. \end{cases} \quad (4.3)$$

Como está escrito, la ecuación (2.47) no está en una forma lineal, ya que el lado derecho implica productos de variables dependientes. Por lo tanto, el procedimiento consiste en reemplazar la velocidad de advección u_j^t por un valor constante u_1 , de modo que la aproximación de diferencia finita se

convierte en

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \simeq \begin{cases} \frac{\phi_{i+1}^{\tau+1} - \phi_i^{\tau}}{\Delta t} = \begin{cases} -u_1 \frac{\phi_{i+1}^{\tau} - \phi_i^{\tau}}{\Delta x} & \text{si } u_1 \leq 0, \\ -u_1 \frac{\phi_i^{\tau} - \phi_{i-1}^{\tau}}{\Delta x} & \text{si } u_1 > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (4.4)$$

Las aproximaciones numéricas simples a la convección, por ejemplo, tales como las dadas por la ecuación (4.4) la cual es una representación unidimensional de la ecuación discretizada (5.22) y (5.23), se examinan por separado de los términos restantes. La suposición básica es que si la aproximación computacional a los subconjuntos lineales individuales presentes en la ecuación discretizada (5.22) y (5.23) es exacta, también serán representaciones exactas cuando se usan en el marco no lineal. Sin embargo, la precisión de las ecuaciones diferenciales lineales es una condición necesaria pero no suficiente para garantizar soluciones no lineales satisfactorias.

Trabajando en la discretización de la parte convectiva de la ecuación (7.23) usando el esquema forward upstream para $u_1 \leq 0$ y $u_1 > 0$ se tiene respectivamente

$$\begin{aligned} \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_i^n}{h_x} &= \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} + \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2} + \frac{\phi_{i-1}^n - \phi_i^n}{h_x} \\ &= \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} + \frac{h_x (\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n)}{2h_x^2}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n}{h_x} &= \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} + \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2} + \frac{\phi_i^n - \phi_{i+1}^n}{h_x} \\ &= \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} - \frac{h_x (\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n)}{2h_x^2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Remplazando (4.5) y (4.6) en el esquema forward upstream (4.4) queda escrito de la forma

$$\frac{\phi_i^{t+1} - \phi_i^n}{h_t} = \begin{cases} -u_1 \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} - u_1 \frac{h_x (\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n)}{2h_x^2}, & \text{si } u_1 \leq 0 \\ -u_1 \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} + u_1 \frac{h_x (\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n)}{2h_x^2}, & \text{si } u_1 > 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Haciendo el análisis de estabilidad con el Criterio de Von Neumann para $\psi = h \xi$, $\xi \in [-\frac{\pi}{h_x}, \frac{\pi}{h_x}]$ y $\lambda = u \frac{h_t}{h_x}$ tenemos el factor de amplificación

$$\rho(\psi) = \begin{cases} 1 + 2\lambda \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right) - \lambda \sin(\psi) & \text{si } u_1 \leq 0, \\ 1 - 2\lambda \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right) - \lambda \sin(\psi) & \text{si } u_1 > 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Aplicando el criterio Von Neumann al esquema forward upstream (4.4),

para el caso $u \leq 0$ se tiene $|\rho(\psi)|^2 \leq 1$, teniendo en cuenta que $\lambda < 0$ para $u < 0$ entonces $|\rho(\psi)|^2 < 1$ y debe cumplir que $4\lambda(1 + \lambda)\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right) < 0$ mayorando obtenemos que $4\lambda(1 + \lambda) < 0$ como λ es negativo se tiene $\lambda > -1$, por lo tanto si $-1 < \lambda < 0$ hay estabilidad según Von Neumann.

Para el caso $u > 0$ se tiene $|\rho(\psi)|^2 \leq 1$, teniendo en cuenta que $\lambda > 0$ para $u > 0$ entonces $|\rho(\psi)|^2 < 1$ y debe cumplir que $4\lambda(1 - \lambda)\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right) > 0$ mayorando obtenemos que $4\lambda(1 - \lambda) > 0$ como λ es positivo se tiene $\lambda < 1$, por lo tanto si $0 < \lambda < 1$ hay estabilidad según Von Neumann.

Los cálculos numéricos del esquema forward upstream se ejecutan de las dos formas (2.47) y (4.7) para un número de pasos temporales de 40 denotado como m_t , es decir $m_t = 40$ el cual nos da un tiempo de ocho segundos; para $\lambda = 0,8$, $u_1 = 0,1$ y $h_x = \frac{1}{40}$ obtenemos $h_t = 0,2$ además siendo ℓ_2 -error denotado como $\|e\|_{\ell^2}$, tal que

$$\|e\|_{\ell^2} = \frac{\sum_{i,t=0}^{m_x, m_t} \phi(i, t) - \vartheta(i, t)}{m_x - 1}, \quad (4.9)$$

calculado en un tiempo máximo de 8 segundos, obtenemos los siguientes resultados:

En el Cuadro 4.1 los datos muestran que el esquema forward upstream (4.7) es más preciso que el esquema forward upstream (4.4) por efectos del error de redondeo ha partir de ocho decimales.

En el Cuadro 4.2 se muestra que, tanto el esquema forward upstream (4.4) y el esquema forward upstream (4.7) aumentan su precisión con respecto a la solución exacta ϑ cuando aumentamos el número de pasos temporales y espaciales es decir $m_t = 80$ y $m_x = 80$ respectivamente. Note que para $\lambda = 0,8$, $u = 0,1$ y $h_x = \frac{1}{80}$ obtenemos $h_t = 0,1$ sin embargo, observe que el esquema forward upstream (4.7) es más preciso por efectos del error de redondeo ha partir de ocho decimales, esto se puede notar cuando se calcula el ℓ_2 -error escrito como (6.9) en un tiempo máximo de 8 segundos.

m_x	x	ϕ	Exacta	Error	Forward Upstream	
			ϑ	$\ e\ _2$	ρ	
40	0.875	0.36097461	0.70710695	0.15570502	0.99606098	(4.4)
40	0.875	0.36097476	0.70710695	0.15570499	0.99606098	(4.7)

Cuadro 4.1: Precisión del esquema forward upstream para $h_t = 0,2$.

m_x	x	ϕ	Exacta	Error	Forward Upstream	
			ϑ	$\ e\ _2$	ρ	
80	0.875	0.49506584	0.70710695	0.12053534	0.999013901	(4.4)
80	0.875	0.49506584	0.70710695	0.12053532	0.999013901	(4.7)

Cuadro 4.2: Precisión del esquema forward upstream para $h_t = 0,1$.

4.2. Amplitud, dispersión y error de face computacional

Definición 4.2.0.1 Si $\vartheta(x, t)$ es una función continua, continua por partes, y absolutamente integrable, entonces la **Transformada de Fourier** de $\vartheta(x, t)$ con respecto a $x \in \mathbb{R}$ es denotada por $\hat{\vartheta}(k, t)$ y es definida por

$$F\{\vartheta(x, t)\} := \hat{\vartheta}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \vartheta(x, t) dx, \quad (4.10)$$

donde k es llamada la transformada de Fourier y e^{-ikx} es el núcleo de la transformada. Entonces, $\forall x \in \mathbb{R}$, la **Transformada Inversa de Fourier** de $\vartheta(k, t)$ esta definida por

$$F^{-1}\{\hat{\vartheta}(k, t)\} := \vartheta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{\vartheta}(k, t) dk. \quad (4.11)$$

Para introducir la idea de **dispersión**, consideremos la ecuación de advección (7.23) donde el coeficiente de velocidad u será un coeficiente de velocidad constante u_1 , es decir

$$\frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial t} = -u_1 \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial x}. \quad (4.12)$$

Entonces derivando la **Transformada Inversa de Fourier** con respecto a x dada en la definición (4.2.0.1)-(4.11), se puede escribir como

$$\frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} ik \hat{\vartheta}(k, t) dk = ik \vartheta(x, t). \quad (4.13)$$

Remplazando (4.13) en la ecuación (4.12) obtenemos

$$\frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial t} = -u_1 \hat{ik} \vartheta(x, t), \quad (4.14)$$

aplicando transformada de Fourier ha $\frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial t}$ y $\vartheta(x, t)$ la ecuación (4.14) se escribe como

$$\hat{\vartheta}_t(k, t) = -\hat{ik} \hat{\vartheta}(k, t),$$

esta es una ecuación diferencial ordinaria en t , ordenando e integrando ambos miembros se obtiene

$$\hat{\vartheta}(k, t) = B e^{-\hat{iu}_1 k t}, \quad (4.15)$$

sometiendo esta ecuación a una condición inicial, tenemos que $B = \hat{\vartheta}(k, 0) = \hat{\vartheta}_0(k)$. Por lo tanto $\vartheta(x, t)$ se puede escribir como

$$\vartheta(x, t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\hat{ik}x} e^{-\hat{iu}_1 k t} \hat{\vartheta}_0(k) dk, \quad (4.16)$$

de este resultado podemos concluir que

$$\hat{\vartheta}(k, t + \tau) = e^{-\hat{iu}_1 k \tau} \hat{\vartheta}(k, t). \quad (4.17)$$

Además la ecuación (4.16), se puede escribir en términos de número de onda k , y frecuencia angular ω como

$$\vartheta(x, t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\hat{i}(kx + \omega t)} \tilde{\vartheta}(k, \omega) dk d\omega, \quad (4.18)$$

por la linealidad de la ecuación de convección ([23] y [6],[18]), la representación (4.18) permite que $\vartheta(x, t)$ se escriba como

$$\vartheta(x, t) = \tilde{\vartheta}(k, \omega) e^{\hat{i}(kx + \omega t)}, \quad (4.19)$$

siendo $\tilde{\vartheta}$ la amplitud de onda, k número de onda y ω frecuencia de la onda.

Donde $\tilde{\vartheta}$, k , ω pueden ser complejos. Observe que la función $\vartheta(x, t)$ es representada en términos de número de onda k y frecuencia ω por $\tilde{\vartheta}(k, \omega)$ de manera exacta, si satisface $kx + \omega t = 0$. De esto podemos concluir que

$$\frac{\omega}{k} = -\frac{x}{t} = -u_1. \quad (4.20)$$

En un modelo numérico, las variables espaciales y temporales independientes se pueden escribir como

$$x = ih_x \text{ y } t = nh_t, \quad (4.21)$$

tal que la ecuación (4.19), se puede escribir como

$$\vartheta(x, t) = \vartheta(ih_x, nh_t) = \tilde{\vartheta}(k, \omega) e^{\hat{i}(kih_x + \omega nh_t)}, \quad (4.22)$$

entonces el esquema forward upstream (4.4) para $u_1 > 0$, **usando la representación (4.22) en términos de número de onda y frecuencia** produce el siguiente resultado

$$e^{\hat{i}\omega h_t} = 1 - \lambda + \lambda e^{-\hat{i}kh_x}$$

o, equivalentemente

$$e^{\hat{i}\omega h_t} = 1 - \lambda + \lambda(\cos kh_x - \hat{i}\sin kh_x). \quad (4.23)$$

Note que en la ecuación (7.23) en la representación de la diferencia, dada por la ecuación (4.4), el **amortiguamiento o amplificación** en el tiempo del resultado es posible debido a la aproximación imprecisa de las derivadas. Para evaluar este efecto, la frecuencia se descompone en partes reales e imaginarias, y se define por

$$\omega = \omega_r + \hat{i}\omega_i. \quad (4.24)$$

Observe que, usando la definición dada en (4.24), la ecuación (4.23), se escribe como

$$e^{\hat{i}(\omega_r + \hat{i}\omega_i)h_t} = 1 - \lambda + \lambda(\cos kh_x - \hat{i}\sin kh_x), \quad (4.25)$$

o equivalentemente

$$\gamma e^{\hat{i}\omega_r h_t} = 1 - \lambda + \lambda(\cos kh_x - \hat{i}\sin kh_x), \quad (4.26)$$

donde $\gamma = \mathbf{e}^{-\omega_i h_t}$ se denomina cambio de amplitud de la solución por paso de tiempo (γ^n es entonces el cambio de amplitud después de n pasos de tiempo).

Para resolver γ , $e^{\hat{i}\omega_r h_t}$ es expandido en términos de $\cos \omega_r h_t + \hat{i}\sin \omega_r h_t$.

Las partes real e imaginaria de la ecuación (4.26) deben ser iguales por separado tal que la ecuación (4.26) comparando componentes reales e imaginarios, se escriba como

$$\begin{aligned} \gamma \cos \omega_r h_t &= 1 - \lambda(1 - \cos kh_x), \\ \gamma \sin \omega_r h_t &= -\lambda \sin kh_x, \end{aligned} \quad (4.27)$$

después de expandir y reorganizar, sumando el cuadrado de ambos lados de estas dos expresiones, obtenemos

$$\gamma^2(\cos^2 \omega_r h_t + \sin^2 \omega_r h_t) = \gamma^2 = [1 - \lambda(1 - \cos kh_x)]^2 + \lambda^2 \sin^2 kh_x$$

o equivalentemente

$$\gamma = \pm \sqrt{1 + 2\lambda(\cos kh_x - 1)(1 - \lambda)}.$$

En contraste con el esquema progresivo en el tiempo, centrado en el espacio, la representación del esquema de diferencias finitas forward upstream es linealmente estable ($|\gamma| \leq 1$) siempre y cuando

$$-1 \leq 2\lambda(\cos kh_x - 1)(1 - \lambda) \leq 0.$$

Siendo $\cos kh_x \leq 1$, la cantidad dentro de los paréntesis de la izquierda es siempre menor o igual a 0, y la desigualdad se mantiene siempre que $\lambda \leq 1$.

Por lo tanto, requiere $h_t \leq \frac{h_x}{u_1}$ para que el esquema Forward en el tiempo y Upstream en el espacio sea estable. Esto se llama el criterio de estabilidad CFL (Courant-Friedrichs-Lewy). Las técnicas de aproximación numérica que deben satisfacer ciertos criterios para tener resultados linealmente estables se llaman *esquemas condicionalmente estables*.

Cuando $\lambda = 1$ o $k \sim 0$, $\gamma = 1$ las soluciones no se amplifican.

Otros valores de γ , mostrados en el Cuadro 4.3, como funciones de longitud de onda $L = ih_x$ y λ , el número de **Courant**, muestran que a excepción de las ondas más largas y $\lambda = 0$ o 1 , el esquema amortigua la solución con el mayor error; para $\lambda = 0,5$ las longitudes de onda de $2h_x$ son eliminadas por completo; un resultado que se puede ver más fácilmente es reescribiendo la forma lineal de la ecuación (4.4) como

$$\phi_i^{n+1} = (1 - \lambda)\phi_i^n + \lambda\phi_{i-1}^n \text{ para } u_1 > 0. \quad (4.28)$$

La velocidad de fase predicha en función del número de onda también puede obtenerse a partir de las ecuaciones (4.27) dividiendo los componentes imaginarios por los componentes reales, produciendo

$$\frac{\sin\omega_r h_t}{\cos\omega_r h_t} = \tan\omega_r h_t = \frac{-\lambda \sin kh_x}{1 + \lambda(\cos kh_x - 1)}, \quad (4.29)$$

o dado que la velocidad de fase ζ_ϕ es igual al negativo de la frecuencia dividida por el número de onda, es decir

$$\zeta_\phi = \frac{-1}{kh_t} \tan^{-1} \left[\frac{-\lambda \sin kh_x}{1 + \lambda(\cos kh_x - 1)} \right]. \quad (4.30)$$

Note, que de la solución de la ecuación diferencial $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -u_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$, se obtiene las siguientes relaciones

$$\frac{\omega}{k} = -\zeta_\phi = -u_1,$$

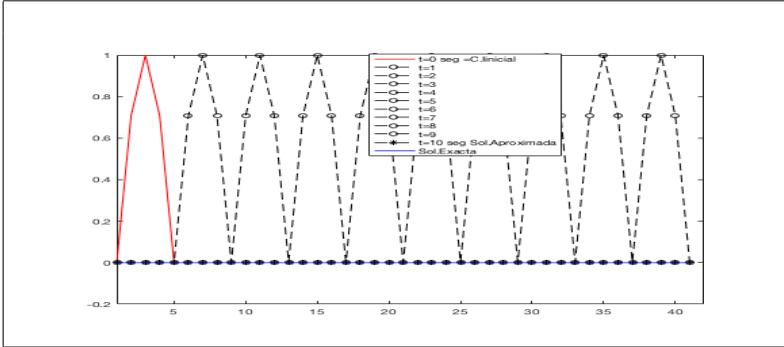


Figura 4.1: Temperatura obtenida por la aproximación computacional de la ecuación de advección $\frac{\partial \psi}{\partial t} = -u_1 \frac{\partial \psi}{\partial x}$ usando el esquema forward upstream (4.4) sujeto a la condición inicial (4.2) y la condición de frontera (4.3) cuando γ es idénticamente igual a γ_{exacto} .

la relación de la solución computacional a la solución exacta de las velocidades de fase es

$$\zeta \sim \phi = \frac{-1}{u_1} \tan^{-1} \left[\frac{-\lambda \operatorname{sink} h_x}{1 + \lambda (\operatorname{cos} h_x - 1)} \right]. \quad (4.31)$$

Esto indica que el esquema de diferencias finitas Forward en el tiempo y Upstream en el espacio es dispersivo ya que la velocidad de fase computacional es una función del número de onda. En otras palabras, similar a la dispersión física, las ondas con diferentes longitudes de onda se propagan a diferentes velocidades. De esta manera, la onda no puede conservar su patrón de onda original y se llama **onda dispersiva**.

La exactitud de una solución numérica lineal depende de cuán bien los valores calculados de γ y $\zeta \sim \phi$ aproximan las soluciones exactas de la ecuación diferencial, esto ocurre en el caso que, $\gamma_{exacto} = 1$ y $\zeta_{exacto} = u_1$.

Si $|\gamma| > 1$ para cualquier longitud de onda posible, entonces la técnica de solución es linealmente inestable.

Si no es linealmente inestable, pero el valor absoluto de $\frac{\gamma}{\gamma_{exacto}}$ es menor que la unidad para cualquier longitud de onda, entonces el esquema está amortiguando, y si γ es idénticamente igual a γ_{exacto} , entonces la técnica produce la amplitud correcta ver Figura 4.1.

Cuando $\zeta \sim \phi = \zeta_{exacto}$, La representación de la aproximación es erróneamente dispersiva (la solución exacta, por supuesto, es dispersiva si ζ_{exacto} es una función de k).

También es importante determinar el amortiguamiento en un período de tiempo especificado, como el tiempo que tarda la onda en recorrer un incremento de cuadrícula. Esto significa que un esquema podría estar ligeramente amortiguando para cada paso de tiempo, pero si el paso de tiempo era pequeño, el amortiguamiento acumulado con el tiempo podría ser bastante grande.

Los valores de $\frac{\zeta_{\phi}}{u_1}$ se dan en el Cuadro 4.3 para diversas combinaciones de λ y k . Por ejemplo, en el Cuadro 4.3, mostramos que con $\lambda = 0,5$, el cambio de amplitud por paso de tiempo es mayor que con $\lambda = 0,1$.

Como con la amplitud, una longitud de onda de $2h_x$ generalmente tiene la representación más pobre de la velocidad de fase apropiada.

Sólo en $\lambda = 1$ y en $\lambda = 0,5$ (donde la amplitud de una onda de $2h_x$ se elimina en un paso de tiempo) la fase es representada con precisión para todas las longitudes de onda.

Cuando $0,5 < \lambda < 1$, las ondas viajan más rápido en la representación de diferencias finitas que la solución exacta ($\zeta_{\phi} > u_1$), mientras que viajan más lentamente cuando $0 < \lambda < 0,5$ es decir ($\zeta_{\phi} < u_1$) ver Figura 4.2.

	0.001	0.01	0.1	0.2	λ		0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	Longitud de Onda
γ^1	0.998	0.980	0.800	0.600	0.200	0.400	0.000	0.200	0.400	0.600	0.800	1.000	$2h_x$
	0.999	0.980	0.820	0.680	0.580	0.520	0.500	0.520	0.580	0.680	0.820	1.000	$4h_x$
	1.000	0.996	0.967	0.934	0.920	0.908	0.905	0.908	0.920	0.934	0.967	1.000	$10h_x$
	1.000	0.984	0.991	0.984	0.979	0.977	0.984	0.977	0.979	0.984	0.991	1.000	$20h_x$
	0.99999	0.99988	0.99889	0.99803	0.99741	0.99704	0.99692	0.99704	0.99741	0.99803	0.99889	1.000	$40h_x$
	1.000	0.99997	0.99972	0.99950	0.99935	0.99926	0.99923	0.99925	0.99935	0.99951	1.000	1.000	$80h_x$
$\frac{\zeta_{\phi}}{u_1}$	0.000	0.000	0.00	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	$2h_x$
	0.637	0.643	0.704	0.780	0.859	0.936	1.000	1.043	1.060	1.055	1.033	1.000	$4h_x$
	0.936	0.937	0.953	0.968	0.981	0.992	1.000	1.005	1.008	1.008	1.005	1.000	$10h_x$
	0.999	0.999	0.988	0.992	0.995	0.998	1.000	1.001	1.002	1.002	1.001	1.000	$20h_x$
	0.99590	0.99601	0.99704	0.99802	0.99885	0.99951	1.000	1.00033	1.00049	1.00049	1.00033	1.000	$40h_x$
	0.99898	0.99900	0.99926	0.99950	0.99971	0.99988	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	$80h_x$

Cuadro 4.3: Valor de la amplitud γ^1 y error de fase $\frac{\zeta_{\phi}}{u_1}$ por pasos de tiempo como una función de longitud de onda para la aproximación computacional de la ecuación de advección $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -u_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ usando el esquema forward upsteam.

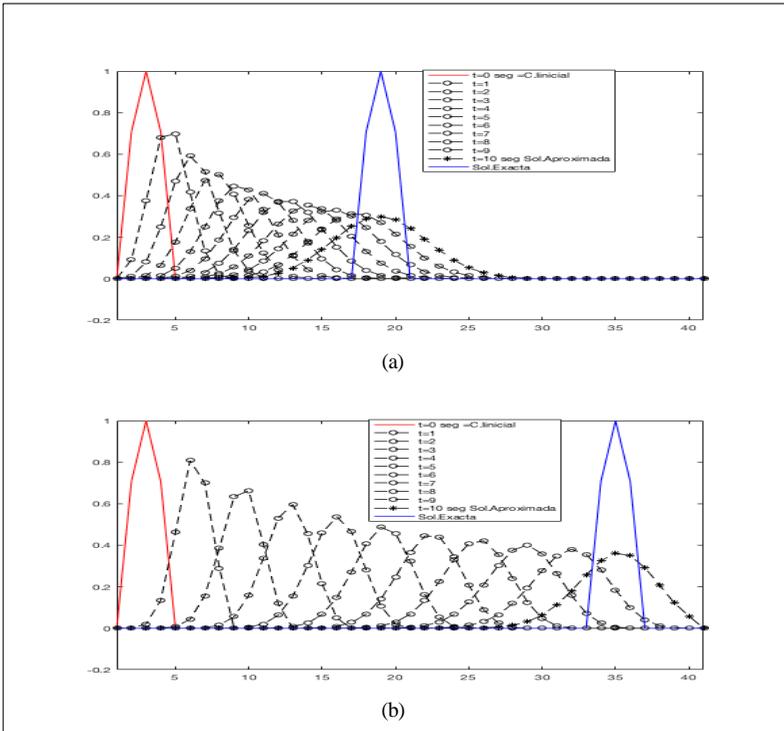


Figura 4.2: Temperatura obtenida por la aproximación computacional de la ecuación de advección $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -u_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ usando el esquema forward upstream (4.4) sujeto a la condición inicial (4.2) y la condición de frontera (4.3) para (a) $\lambda = 0,4$ y (b) $\lambda = 0,8$.

Debe observarse que en un esquema aproximado que está amortiguando (es decir, $|\gamma| < 1$), reducir h_t para el mismo h_x no necesariamente resulta menos amortiguación total después de un período de tiempo. Esto se debe a que la técnica de solución se utiliza con más frecuencia durante ese tiempo debido a la menor h_t ver Figura 4.3.

Por lo tanto, para una mayor precisión y eficiencia computacional, como h_t es tan grande como sea permitido por los criterios de estabilidad lineal, debe ser elegido cuando un esquema de aproximación tiene amortiguación computacional. Los valores del Cuadro 4.3 han sido validados con los valores obtenidos por Charly Martin y Jeff MacQueen ([18] y [22]) y se han obtenido como sigue:

1. Para una longitud de onda $2h_x$ consideramos el número de puntos temporales igual al número de puntos espaciales, es decir $m_t = m_x = 2$, con velocidad $u_1 = 1$ y número de Courant $\lambda = 0, i$, obteniendo $h_t = \frac{i}{20}$ para $i = 1, 9$; en los casos de $\lambda = 1; 0,01; 0,001$ se obtuvieron $h = \frac{1}{2}; \frac{1}{200}; \frac{1}{2000}$ respectivamente.
2. Para una longitud de onda $4h_x$ consideramos el número de puntos temporales igual al número de puntos espaciales, es decir $m_t = m_x = 4$, con velocidad $u_1 = 1$ y número de Courant $\lambda = 0, i$, obteniendo $h_t = \frac{10 \cdot i}{400}$ para $i = 1, 9$; en los casos de $\lambda = 1; 0,01; 0,001$ se obtuvieron $h = \frac{1}{4}; \frac{1}{400}; \frac{1}{4000}$ respectivamente.
3. Para una longitud de onda $10h_x$ consideramos el número de puntos temporales igual al número de puntos espaciales, es decir $m_t = m_x = 10$, con velocidad $u_1 = 1$ y número de Courant $\lambda = 0, i$, obteniendo $h_t = \frac{i}{100}$ para $i = 1, 9$; en los casos de $\lambda = 1; 0,01; 0,001$ se obtuvieron $h = \frac{1}{10}; \frac{1}{1000}; \frac{1}{10000}$ respectivamente.
4. Para una longitud de onda $20h_x$ consideramos el número de puntos temporales igual al número de puntos espaciales, es decir $m_t = m_x = 20$, con velocidad $u_1 = 1$ y número de Courant $\lambda = 0, i$, obteniendo $h_t = \frac{i}{200}$ para $i = 1, 9$; en los casos de $\lambda = 1; 0,01; 0,001$ se obtuvieron $h = \frac{1}{20}; \frac{1}{2000}; \frac{1}{20000}$ respectivamente.
5. Para una longitud de onda $40h_x$ consideramos el número de puntos temporales igual al número de puntos espaciales, es decir $m_t = m_x = 40$, con velocidad $u_1 = 1$ y número de Courant $\lambda = 0, i$, obteniendo $h_t = \frac{i}{400}$ para $i = 1, 9$; en los casos de $\lambda = 1; 0,01; 0,001$ se obtuvieron $h = \frac{1}{4}; \frac{1}{4000}; \frac{1}{40000}$ respectivamente.
6. Para una longitud de onda $80h_x$ consideramos el número de puntos temporales igual al número de puntos espaciales, es decir $m_t = m_x = 80$, con velocidad $u_1 = 1$ y número de Courant $\lambda = 0, i$, obteniendo $h_t = \frac{i}{800}$ para $i = 1, 9$; en los casos de $\lambda = 1; 0,01; 0,001$ se obtuvieron $h = \frac{1}{80}; \frac{1}{8000}; \frac{1}{80000}$ respectivamente.

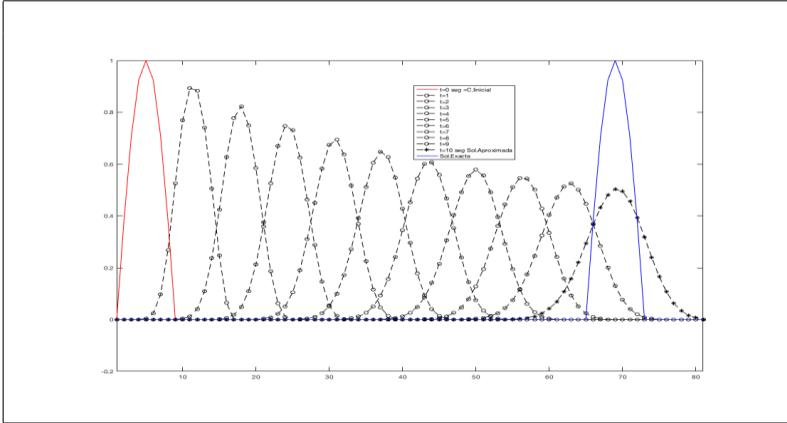


Figura 4.3: Temperatura obtenida por la aproximación computacional de la ecuación de advección $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -u_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ usando el esquema forward upstream (4.4) sujeto a la condición inicial (4.2) y la condición de frontera (4.3) con una longitud de onda $80h_x$.

Los esquemas de órdenes impares también cuestan más para ejecutarse eficientemente en sistemas computacionales basados en vectores, La asimetría del esquema impar (un punto adicional de contra viento) requiere una decisión con respecto a la dirección del viento o el cálculo del esquema de advección en ambas direcciones de velocidad negativa o positiva. Estos dos hechos hacen que los esquemas uniformes como el esquema forward upstream sean más atractivos en la mayoría de las aplicaciones [22].

4.3. Ecuación de transporte unidimensional

Ahora examinaremos la ecuación de transporte

$$\vartheta_t + u\vartheta_x = \alpha\vartheta_{xx}, \quad (4.32)$$

con $x \in [0, 1]$, u es la velocidad, α es la constante de difusión térmica y ϑ es una función escalar que representa la temperatura, sujeto a la condición inicial (4.2) y condición de frontera (4.3). La ecuación (4.32) puede ser interpretada como modelo para la parte convectiva y difusiva de la ecuación de energía ([11],[3]).

Empezaremos la discusión de la ecuación de transporte unidimensional (4.32) considerando la diferenciación forward upstream (4.4) del término

convectivo, como las deducidas en (4.5) y (4.6); usando la notación $\alpha^* = \alpha - u \frac{h_x}{2}$ y $\alpha^* = \alpha + u \frac{h_x}{2}$ la ecuación de transporte unidimensional (4.32) puede ser escrito como

$$\frac{\phi_i^{t+1} - \phi_i^n}{h_t} = \begin{cases} -u \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} + \alpha^* \frac{(\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n)}{h_x^2}, & \text{si } u \leq 0, \\ -u \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} + \alpha^* \frac{(\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n)}{h_x^2}, & \text{si } u > 0. \end{cases} \quad (4.33)$$

Este esquema (4.51) es exacto de primer orden para el tiempo y exacto de segundo orden para el espacio, es decir tiene un error de truncamiento $o(h_t, h_x^2)$

Usando la notación $\mu = \alpha \frac{h_t}{h_x}$ y $\lambda = u \frac{h_t}{h_x}$ el esquema forward upstream (4.51) se escribe como

$$\phi_i^{t+1} = \begin{cases} \mu\phi_{i-1}^n + (1 - 2\mu + \lambda)\phi_i^n + (\mu - \lambda)\phi_{i+1}^n & \text{si } u \leq 0, \\ (\mu + \lambda)\phi_{i-1}^n + (1 - 2\mu - \lambda)\phi_i^n + \mu\phi_{i+1}^n & \text{si } u > 0. \end{cases} \quad (4.34)$$

Haciendo el análisis de estabilidad con el criterio de Von Neumann con $\psi = h_x \xi$, $\xi \in [-\frac{\pi}{h_x h_t}, \frac{\pi}{h_x h_t}]$ obtenemos el factor de amplificación

$$\rho(\psi) = \begin{cases} 1 - 2(2\mu - \lambda)\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right) - \lambda\sin(\psi) & \text{si } u \leq 0, \\ 1 - 2(2\mu + \lambda)\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right) - \lambda\sin(\psi) & \text{si } u > 0. \end{cases} \quad (4.35)$$

Aplicando el criterio Von Neumann al esquema forward upstream (4.51) para el caso $u \leq 0$, teniendo en cuenta que $\lambda \leq 0$ para $u \leq 0$ se cumple que $|\lambda|_{max} = 0$ entonces esta desigualdad $|\rho(\psi)| \leq |1 + 2(2\mu - \lambda)|_{max} + |\lambda|_{max} \leq 1$ se escribe como $|1 + 2(2\mu - \lambda)|_{max} \leq 1$. Por lo tanto hay estabilidad si y solo sí $0 \leq \mu - 0,5\lambda \leq \frac{1}{2}$.

Mayorando para el caso $u > 0$ teniendo en cuenta que $\lambda > 0$ para $u > 0$ se cumple que $|\lambda|_{max} > 0$ entonces esta desigualdad $|\rho(\psi)| \leq |1 - 2(2\mu + \lambda)|_{max} + |\lambda|_{max} \leq 1$ se escribe como $|1 - 2(2\mu + \lambda)|_{max} < 1$. Por lo tanto hay estabilidad si y solo sí $0 < \mu + 0,5\lambda < \frac{1}{2}$.

4.3.1. Análisis numérico para la ecuación de transporte

Considerando la ecuación de transporte unidimensional (4.32) para un número de pasos temporales de 40 denotado como m_t , es decir $m_t = 40$ el cual nos da un tiempo de ocho segundos; con $\lambda = 0,8$, $u = 0,1$, $h_x = \frac{1}{40}$ obtenemos $h_t = 0,2$ y un ℓ_2 -error (6.9) calculado en un tiempo máximo de 8 segundos.

Observe, que por el error de redondeo calculado ha partir de ocho decimales podemos concluir que el esquema forward upstream (4.51) es más preciso cuando el coeficiente de difusión térmica α es más pequeño como muestra el Cuadro 4.4 y el Cuadro 4.5.

Sin embargo cuando aumentamos el número de pasos temporales y espaciales es decir $m_t = 80$ y $m_x = 80$ respectivamente. Note que para $\lambda = 0,8$, $u = 0,1$ y $h_x = \frac{1}{80}$ obtenemos $h_t = 0,1$ así el Cuadro 4.6, muestra que el esquema forward upstream (4.51) es más preciso con respecto ha la solución exacta ϑ , por tal razón éste esquema será trabajado en esta investigación para interpretar la ecuación del transporte de energía ([11],[3]).

			Exacta	Error	Forward Upstream
m_x	x	ϕ	ϑ	$\ \epsilon\ _2$	ρ
40	0.875	0.30563561	0.70710325	0.16707313	0.996060252 (4,51)

Cuadro 4.4: Precisión del esquema forward upstream para $h_t = 0,2$ y $\alpha = 1 \times 10^{-4}$.

			Exacta	Error	Forward Upstream
m_x	x	ϕ	ϑ	$\ \epsilon\ _2$	ρ
40	0.875	0.36031410	0.70710325	0.15584145	0.996060252 (4,51)

Cuadro 4.5: Precisión del esquema forward upstream para $h_t = 0,2$ y $\alpha = 1 \times 10^{-6}$.

$h_t = 0,1$			Exacta	Error	Forward Upstream
m_x	x	ϕ	ϑ	$\ \epsilon\ _2$	ρ
80	0.875	0.49373254	0.70710325	0.12088340	0.999013543 (4,51)

Cuadro 4.6: Precisión del esquema forward upstream para $h_t = 0,1$ y $\alpha = 1 \times 10^{-6}$.

4.3.2. Esquemas para la ecuación de transporte

La ecuación de transporte (4.32), también se puede representar usando los operadores

$$L_x T_i = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2h_x}, \quad L_{xx} T_i = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h_x^2}. \quad (4.36)$$

Usando los operadores dados en (4.36), y el **esquema explícito FTCS** para representar la ecuación de transporte dada en (4.32), obtenemos

$$\frac{\Delta \phi_i^{n+1}}{h_t} + 0,5uh_x L_x \phi_i^n - \alpha L_{xx} \phi_i^n = 0, \quad (4.37)$$

o, equivalentemente

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{h_t} = -u \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} + \alpha \left(\frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{h_x^2} \right), \quad (4.38)$$

el cual denotando $S = \alpha \frac{h_t}{h_x^2}$ y el número de Courant, C , $C = u \frac{h_t}{h_x}$, puede ser escrito como un algoritmo

$$\phi_i^{n+1} = (S + 0,5C)\phi_{i-1}^n + (1 - 2S)\phi_i^n + (S - 0,5C)\phi_{i+1}^n \quad (4.39)$$

Usando el **esquema implícito de Du Fort-Frankel**, para representar la ecuación de transporte dada en (4.32), obtenemos

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^{n-1}}{2h_t} + 0,5uh_x L_x \phi_i^n - \frac{\alpha}{h_x^2} \phi_i^n - (\phi_i^{n-1} + \phi_i^{n+1}) + \phi_i^n = 0, \quad (4.40)$$

Usando el **esquema implícito de Crank-Nicolson**, para representar la ecuación de transporte dada en (4.32), obtenemos

$$\frac{\Delta \phi_i^{n+1}}{h_t} + 0,5(uL_x - \alpha L_{xx})(\phi_i^n + \phi_i^{n+1}) = 0, \quad (4.41)$$

o, equivalentemente

$$\begin{aligned} & \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{h_t} + 0,5u \left(\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} + \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1}}{2h_x} \right) \\ & - 0,5\alpha \left(\frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{h_x^2} + \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}}{h_x^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.42)$$

y puede ser escrito como un algoritmo

$$\begin{aligned} & -(S + 0,5C)\phi_{i-1}^{n+1} + 2(1 + S)\phi_i^{n+1} - (S - 0,5C)\phi_{i+1}^{n+1} \\ & = (S + 0,5C)\phi_{i-1}^n + 2(1 - S)\phi_i^n + (S - 0,5C)\phi_{i+1}^n \end{aligned} \quad (4.43)$$

Usando el **esquema explícito de Lax-Wendroff**, para representar la ecuación de transporte dada en (4.32), denotando $\alpha^* = \alpha + 0,5uCh_x$ obtenemos

$$\frac{\Delta \phi_i^{n+1}}{h_t} + uL_x \phi_i^n - \alpha^* L_{xx} \phi_i^n = 0, \quad (4.44)$$

o, equivalentemente

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{h_t} = -u \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} + \alpha^* \left(\frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{h_x^2} \right), \quad (4.45)$$

y puede ser escrito como un algoritmo

$$\begin{aligned} \phi_i^{n+1} &= (S + 0,5C + 0,5C^2)\phi_{i-1}^n + \\ & (1 - 2S - C^2)\phi_i^n + (S - 0,5C + 0,5C^2)\phi_{i+1}^n \end{aligned} \quad (4.46)$$

Ahora, usando diferencia finita Upwind de cuatro puntos para el caso $u \geq 0$ y el operador $M_x = \{ \delta, 1 - 2\delta, \delta \}$, obtenemos el **esquema implícito de Crank-Nicolson generalizado**

$$M_x \frac{\Delta \phi_i^{n+1}}{h_t} + 0,5(uL_x - \alpha L_{xx})(\phi_i^n + \phi_i^{n+1}) = 0, \quad (4.47)$$

donde, si $u \geq 0$ afirmamos que

$$L_x^{(4)} \phi^n \approx \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} + q \frac{\phi_{i-2}^n - 3\phi_{i-1}^n + 3\phi_i^n - \phi_{i+1}^n}{3h_x}. \quad (4.48)$$

Denotando $Q^* = \frac{1}{3}qC$ tal que $1,5Q^* = 0,5qC$, puede ser escrito como un algoritmo

$$\begin{aligned} & 0,5Q^* \phi_{i-2}^{n+1} + (\delta - 0,25C - 0,5S - 1,5Q^*) \phi_{i-1}^{n+1} + \\ & (1 - 2\delta + S + 1,5Q^*) \phi_i^{n+1} + (\delta + 0,25C - 0,5S - 0,5Q^*) \phi_{i+1}^{n+1} \\ & = 0,5Q^* \phi_{i-2}^n + (\delta + 0,25C + 0,5S + 1,5Q^*) \phi_{i-1}^n + \\ & (1 - 2\delta - S - 1,5Q^*) \phi_i^n + (\delta - 0,25C + 0,5S + 0,5Q^*) \phi_{i+1}^n \end{aligned} \quad (4.49)$$

Ilustraremos el nivel de precisión de estos esquemas considerando el siguiente problema

$$\vartheta_t + u\vartheta_x = \alpha\vartheta_{xx}, \quad (4.50)$$

con $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, u es la velocidad, α es la constante de difusión térmica y $\vartheta = \vartheta(x, t)$ es una función escalar que representa la temperatura, para efectos de cálculos numéricos estará sujeto a la condición de frontera $\vartheta(-2, t) = 1$ y $\vartheta(-2, t) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$ y condición inicial

$$\vartheta(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } -2 \leq x \leq 0, \\ 0 & \text{si } 0 < x \leq 2, \end{cases} \quad (4.51)$$

bajo estas condiciones para $x \in [-2, 2] := L$, una solución exacta, por la técnica de separación de variables, es

$$\vartheta(x, t) = 0,5 \sum_{k=1}^N \frac{2}{\pi} \sin \frac{(2k-1)\pi}{L} (x-ut) \frac{e^{-\alpha \left[\frac{(2k-1)\pi}{L} \right]^2 t}}{2k-1} \quad (4.52)$$

Ver apéndice (8.6) el código en fortran 90 ([7],[12]).

Capítulo V

Esquema Forward Upstream en 3D

5.1. Formulación del problema

Considerando el dominio espacial del problema como una caja rectangular tridimensional de la forma $\Omega := [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$ donde $L_i > 0$ con $i = 1, 2, 3$ son dados.

El problema de valor inicial y de contorno (PVIC) asociado a esta ecuación de energía (2.35) es el siguiente:

$$\begin{aligned} & \text{Hallar } \vartheta : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:} \\ & \square \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -u_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - u_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial y} - u_3 \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \alpha_1 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \\ & \quad \text{si } x \in L_x = [0, L_1], y \in L_y = [0, L_2], z \in L_z = [0, L_3], t > 0 \\ & \square \quad \vartheta(x, y, z, 0) = f_0(x, y, z) \quad \text{si } x \in L_x, y \in L_y, z \in L_z \\ & \square \quad \vartheta(0, y, z, t) = f_1(y, z) \quad \text{si } y \in L_y, z \in L_z, t > 0 \\ & \square \quad \vartheta(L_1, y, z, t) = f_2(y, z) \quad \text{si } y \in L_y, z \in L_z, t > 0 \\ & \square \quad \vartheta(x, 0, z, t) = f_3(x, z) \quad \text{si } x \in L_x, z \in L_z, t > 0 \\ & \square \quad \vartheta(x, L_2, z, t) = f_4(x, z) \quad \text{si } x \in L_x, z \in L_z, t > 0 \\ & \square \quad \vartheta(x, y, 0, t) = f_5(x, y) \quad \text{si } x \in L_x, y \in L_y, t > 0 \\ & \square \quad \vartheta(x, y, L_3, t) = f_6(x, y) \quad \text{si } x \in L_x, y \in L_y, t > 0 \end{aligned}$$

donde ϑ representa la temperatura, u_1, u_2, u_3 denota las componentes de velocidad en la dirección x, y, z respectivamente, α_i con $i = \overline{1, 3}$ los coeficientes de difusión térmica.

Observe, que las condiciones en la frontera $\partial\Omega$ son del tipo Dirichlet, más

específicamente en cada cara del dominio la temperatura asume valores denotados por f_i con $i = \overline{1, 6}$. La distribución de temperatura inicial considerada denotada por $f_0(x, y, z)$ es conocida.

Como observamos, el problema es tridimensional, el cual puede ser una abstracción matemática de la física de la conducción del calor en una caja rectangular, cuyos caras se mantienen a temperaturas conocidas f_i con $i = \overline{1, 6}$; el hecho de que este problema modelo, tenga solución analítica explícita, es un buen modelo para probar la eficiencia del esquema numérico forward upstream que se pretende estudiar.

5.2. Solución del problema discreto

La discretización del problema(PVIC) usando el esquema de diferencias finitas, se realiza en tres etapas, primero discretizaremos el dominio, en segundo lugar la variable, finalmente construiremos un esquema de diferencias para la aproximación numérica de la ecuación.

5.2.1. Discretización del dominio

Tomamos el dominio $\Omega := [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, L_3]$, este dominio es dividido en un número finito de subdominios rectangulares de longitud h_x, h_y, h_z, h_t , donde $h_x > 0, h_y > 0, h_z > 0$, son números positivos. De igual manera elegimos un número positivo $h_t > 0$ que servirá para subdividir el eje $t > 0$. Los subdominios rectangulares no necesariamente son homogéneos y en el extremo de cada rectángulo se define de un modo como sigue

Definición 5.2.1.1 Sea h_x, h_y, h_z, h_t números positivos, una malla es un conjunto de puntos de la forma

$$(x_i, y_j, z_k, t_n) = (ih_x, jh_y, kh_z, nh_t),$$

llamados también nodos donde i, j, k, n son números enteros no negativos con $n > 0$.

Buscamos la solución aproximada en el nodo $(\xi_{i,j,k}, nh_t)$, donde $\xi_{i,j,k} = (ih_x, jh_y, kh_z) \in \mathbb{R}^3$ corresponde a un nodo en la malla del dominio espacial discreto, cuyos nodos interiores en un tiempo n están representados en la Figura 5.1.

5.2.2. Discretización de la variable

La variable o incognita del problema ϑ , se discretiza usando la malla definida en 5.2.1.1, donde a cada nodo (ih_x, jh_y, kh_z, nh_t) se le asigna un valor $\vartheta(ih_x, jh_y, kh_z, nh_t)$ que se denota por

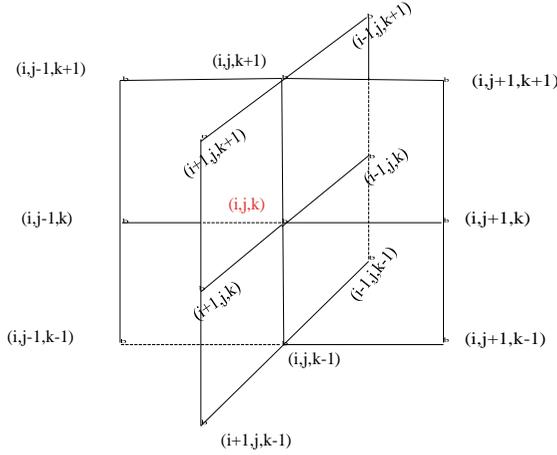


Figura 5.1: Nodo interior $\xi_{i,j,k}$ del dominio espacial.

$$\vartheta_{i,j,k}^n = \vartheta(ih_x, jh_y, kh_z, nh_t). \quad (5.1)$$

Definición 5.2.2.1 Una función discreta ϕ es una función definida sobre una malla tal que cada punto (x_i, y_j, z_k, t_n) le asignamos un valor real denotado por $\phi_{i,j,k}^n$.

Cualquier función continua ϕ sobre $\Omega \times \mathbb{R}^+$ puede ser discretizada sobre la malla definida en 5.2.1.1, definiendo $\phi_{i,j,k}^n = \phi(x_i, y_j, z_k, t_n)$, en particular la solución del problema(PVIC) ϑ dada en (5.1) es discretizado por $\vartheta_{i,j,k}^n = \vartheta(x_i, y_j, z_k, t_n)$.

Como no conocemos la solución ϑ del problema entonces aproximamos esta solución discreta $\vartheta_{i,j,k}^n$ por una función discreta que la denotamos por $\phi_{i,j,k}^n$ tal que $\vartheta_{i,j,k}^n \approx \phi_{i,j,k}^n$ en cada nodo de la malla.

Así $\{\phi_{i,j,k}^n\}$ y $\{\phi_{i,j,k}^{n+1}\}$ denota la función discreta en el nivel n y $n+1$ respectivamente, donde:

$$\phi_{i,j,k}^n \approx \vartheta(\xi_{i,j,k}, nh_t) \text{ y } \phi_{i,j,k}^{n+1} \approx \vartheta(\xi_{i,j,k}, nh_t + h_t). \quad (5.2)$$

Además la condición inicial discretizada es

$$\phi_{i,j,k}^0 = f_0(ih_x, jh_y, kh_z) \text{ con } i, j, k \in \mathbb{Z}^+,$$

y las condiciones de frontera discretizadas sobre los puntos de la malla dada en la definición 5.2.1.1 que están en la frontera del dominio con $i, j, k \in \mathbb{Z}^+$, y se escriben como

$$\begin{aligned}
\phi_{0,j,k}^n &= f_1(jh_y, kh_z), & \phi_{i,j,k}^n &= f_2(jh_y, kh_z), \\
\phi_{i,0,k}^n &= f_3(ih_x, kh_z), & \phi_{i,j,k}^n &= f_4(ih_x, kh_z), \\
\phi_{i,j,0}^n &= f_5(ih_x, jh_y), & \phi_{i,j,k}^n &= f_6(ih_x, jh_y).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

5.2.3. Discretización de la ecuación por diferencias finitas

Sea la serie de Taylor para el punto $(\xi_{i,j,k}, nh_t + h_t)$ alrededor del punto $(\xi_{i,j,k}, nh_t)$ es

$$\begin{aligned}
\theta(\xi_{i,j,k}, nh_t + h_t) &= \theta(\xi_{i,j,k}, nh_t) + \frac{\partial\theta(\xi_{i,j,k}, nh_t)}{\partial t} h_t + \\
&\quad \frac{\partial^2\theta(\xi_{i,j,k}, nh_t)}{\partial t^2} \frac{h_t^2}{2!} + \dots, \tag{5.4}
\end{aligned}$$

expresamos (5.4) de la siguiente forma

$$\theta(\xi_{i,j,k}, nh_t + h_t) = \theta(\xi_{i,j,k}, nh_t) + \frac{\partial\theta(\xi_{i,j,k}, nh_t)}{\partial t} h_t + o(h_t^2), \tag{5.5}$$

donde $o(h_t^2)$ denota el término que contiene la segunda derivada y las potencias mayores de h_t .

De expresión (5.5) se puede obtener la primera derivada de ϑ en el punto $(\xi_{i,j,k}, nh_t)$ por

$$\frac{\partial\vartheta(\xi_{i,j,k}, nh_t)}{\partial t} = \frac{\vartheta(\xi_{i,j,k}, nh_t + h_t) - \vartheta(\xi_{i,j,k}, nh_t)}{h_t} - o(h_t), \tag{5.6}$$

si truncamos la ecuación (5.6) eliminando el término $o(h_t)$ se tiene la aproximación por diferencias finitas de la primera derivada en el punto $(\xi_{i,j,k}, nh_t)$, llamada **diferencia progresiva en el tiempo** la cual tiene un error de truncamiento $o(h_t)$, esto es

$$\frac{\partial\vartheta(\xi_{i,j,k}, nh_t)}{\partial t} \approx \frac{\vartheta(\xi_{i,j,k}, nh_t + h_t) - \vartheta(\xi_{i,j,k}, nh_t)}{h_t}, \tag{5.7}$$

usando la notación (5.1) y la notación $\vartheta_{i,j,k}^n = \vartheta(\xi_{i,j,k}, nh_t)$ la aproximación (5.7) se expresa como:

$$\frac{\partial\vartheta(\xi_{i,j,k}, nh_t)}{\partial t} \approx \frac{\vartheta_{i,j,k}^{n+1} - \vartheta_{i,j,k}^n}{h_t}. \tag{5.8}$$

Usando las aproximaciones (5.2) tenemos que la aproximación (5.8) se puede escribir como

$$\frac{\partial \vartheta(\xi_{i,j,k}, nh_t)}{\partial t} \approx \frac{\Phi_{i,j,k}^{n+1} - \Phi_{i,j,k}^n}{h_t}, \quad (5.9)$$

de igual manera usando la serie de Taylor con las variables espaciales obtenemos:

$$\begin{aligned} \vartheta(x_i \pm h_x, y_j, z_k, t_n) &= \vartheta(x_i, y_j, z_k, t_n) \pm \frac{1}{1!} h_x \vartheta_x(x_i, y_j, z_k, t_n) \\ &+ \frac{1}{2!} h_x^2 \vartheta_{xx}(x_i, y_j, z_k, t_n) \pm \frac{1}{3!} h_x^3 \vartheta_{xxx}(x_i, y_j, z_k, t_n) + \dots, \end{aligned} \quad (5.10)$$

de (5.10) se puede obtener la primera derivada de ϑ en el punto $(\xi_{i,j,k}, t_n)$ por

$$\frac{\partial \vartheta(\xi_{i,j,k}, t_n)}{\partial x} = \pm \left(\frac{\vartheta(x_i \pm h_x, y_j, z_k, t_n) - \vartheta(\xi_{i,j,k}, t_n)}{h_x} - o(h_x) \right), \quad (5.11)$$

si truncamos la ecuación (5.11) se tiene dos tipos de aproximaciones por diferencias finitas de la primera derivada en el punto $(\xi_{i,j,k}, t_n)$.

La primera

$$\frac{\partial \vartheta(\xi_{i,j,k}, t_n)}{\partial x} \approx \frac{\vartheta(x_i + h_x, y_j, z_k, t_n) - \vartheta(\xi_{i,j,k}, t_n)}{h_x}, \quad (5.12)$$

llamada **diferencia progresiva en la dirección x** con un error de truncamiento $o(h_x)$, y la segunda

$$\frac{\partial \vartheta(\xi_{i,j,k}, t_n)}{\partial x} \approx \frac{\vartheta(\xi_{i,j,k}, t_n) - \vartheta(x_i - h_x, y_j, z_k, t_n)}{h_x}, \quad (5.13)$$

llamada **diferencia regresiva en la dirección x** con un error de truncamiento $o(h_x)$.

En términos de la variable discreta tenemos las siguientes aproximaciones de las derivadas

$$\frac{\partial \vartheta(\xi_{i,j,k}, t_n)}{\partial x} \approx \frac{\Phi_{i+1,j,k}^n - \Phi_{i,j,k}^n}{h_x}, \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial \vartheta(\xi_{i,j,k}, t_n)}{\partial x} \approx \frac{\Phi_{i,j,k}^n - \Phi_{i-1,j,k}^n}{h_x}. \quad (5.15)$$

Así mismo trabajando la serie de Taylor dada en (5.10) tenemos

$$\begin{aligned} \vartheta(x_i + h_x, y_j, z_k, t_n) &= \vartheta(x_i, y_j, z_k, t_n) + \frac{1}{1!} h_x \vartheta_x(x_i, y_j, z_k, t_n) \\ &+ \frac{1}{2!} h^2 \vartheta_{xx}(x_i, y_j, z_k, t_n) + o(h^3), \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \vartheta(x_i - h_x, y_j, z_k, t_n) &= \vartheta(x_i, y_j, z_k, t_n) - \frac{1}{1!} h_x \vartheta_x(x_i, y_j, z_k, t_n) \\ &+ \frac{1}{2!} h^2 \vartheta_{xx}(x_i, y_j, z_k, t_n) + o(h^3), \end{aligned} \quad (5.17)$$

sumando las expresiones (5.16) y (5.17), obtenemos

$$\begin{aligned} \vartheta(x_i + h_x, y_j, z_k, t_n) + \vartheta(x_i - h_x, y_j, z_k, t_n) &= \\ 2\vartheta(x_i, y_j, z_k, t_n) + h^2 \vartheta_{xx}(x_i, y_j, z_k, t_n) + o(h^3), \end{aligned} \quad (5.18)$$

de (5.18) obtenemos

$$\begin{aligned} \vartheta_{xx}(x_i, y_j, z_k, t_n) &= \frac{1}{h_x^2} \vartheta(x_i + h_x, y_j, z_k, t_n) - \\ \frac{2}{h_x^2} \vartheta(x_i, y_j, z_k, t_n) + \frac{1}{h_x^2} \vartheta(x_i - h_x, y_j, z_k, t_n) - o(h^2), \end{aligned} \quad (5.19)$$

si truncamos (5.19) se tiene la aproximación por diferencias finitas de la segunda derivada en el punto $(\xi_{i,j,k}, nh_t)$, llamada **diferencia central segunda en la dirección x** la cual tiene un error de truncamiento $o(h_x^2)$, esto es

$$\begin{aligned} \vartheta_{xx}(x_i, y_j, z_k, t_n) &\approx \frac{1}{h_x^2} \vartheta(x_i + h_x, y_j, z_k, t_n) \\ - \frac{2}{h_x^2} \vartheta(x_i, y_j, z_k, t_n) + \frac{1}{h_x^2} \vartheta(x_i - h_x, y_j, z_k, t_n), \end{aligned} \quad (5.20)$$

Usando las aproximaciones (5.2) tenemos que a partir de (5.20) aproximamos la segunda derivada por

$$\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \right)_{i,j,k,n} \approx \frac{\phi_{i+1,j,k} - 2\phi_{i,j,k} + \phi_{i-1,j,k}}{h_x^2}, \quad (5.21)$$

Los cálculos matemáticos en las direcciones y, z son similares ha los usados para la obtención de la aproximación (5.21).

5.2.4. Discretizada del problema de valor inicial y de contorno

Ahora encontramos la ecuación discretizada del problema (PVIC) usando el esquema forward upstream.

Caso1: Para $u_i \leq 0$ con $i = \overline{1, 3}$ es

$$\begin{aligned}
 \frac{\phi_{i,j,k}^{n+1} - \phi_{i,j,k}^n}{h_t} &= -u_1 \frac{\phi_{i+1,j,k}^n - \phi_{i,j,k}^n}{h_x} - \\
 u_2 \frac{\phi_{i,j+1,k}^n - \phi_{i,j,k}^n}{h_y} &- u_3 \frac{\phi_{i,j,k+1}^n - \phi_{i,j,k}^n}{h_z} \\
 +\alpha_1 \frac{\phi_{i+1,j,k}^n - 2\phi_{i,j,k}^n + \phi_{i-1,j,k}^n}{h_x^2} &+ \\
 \alpha_2 \frac{\phi_{i,j+1,k}^n - 2\phi_{i,j,k}^n + \phi_{i,j-1,k}^n}{h_y^2} & \\
 +\alpha_3 \frac{\phi_{i,j,k+1}^n - 2\phi_{i,j,k}^n + \phi_{i,j,k-1}^n}{h_z^2} & \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

Caso2: Para $u_i > 0$ con $i = \overline{1, 3}$, el esquema forward upstream es:

$$\begin{aligned}
 \frac{\phi_{i,j,k}^{n+1} - \phi_{i,j,k}^n}{h_t} &= -u_1 \frac{\phi_{i,j,k}^n - \phi_{i-1,j,k}^n}{h_x} - \\
 u_2 \frac{\phi_{i,j,k}^n - \phi_{i,j-1,k}^n}{h_y} &- u_3 \frac{\phi_{i,j,k}^n - \phi_{i,j,k-1}^n}{h_z} \\
 +\alpha_1 \frac{\phi_{i+1,j,k}^n - 2\phi_{i,j,k}^n + \phi_{i-1,j,k}^n}{h_x^2} &+ \\
 \alpha_2 \frac{\phi_{i,j+1,k}^n - 2\phi_{i,j,k}^n + \phi_{i,j-1,k}^n}{h_y^2} & \\
 +\alpha_3 \frac{\phi_{i,j,k+1}^n - 2\phi_{i,j,k}^n + \phi_{i,j,k-1}^n}{h_z^2} & \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

Note, que los términos advectivos en la dirección del eje x,y,z son regresivos cuando los coeficientes de velocidad son definidos positivos, es decir $u_i > 0$ para $i = \overline{1, 3}$; y los términos advectivos en la dirección del eje x,y,z son progresivos cuando los coeficientes de velocidad son negativos, es decir $u_i \leq 0$ para $i = \overline{1, 3}$ de allí el nombre forward upstream ya que la derivada espacial se evalúa contra el viento desde el punto de la malla definida en 5.2.1.1.

Estas características hace que el esquema forward upstream tenga "sentido físico" y así sea más atractivo en las aplicaciones [22].

El esquema forward upstream se ha utilizado ampliamente en los modelos numéricos de mesoescala en los primeros niveles de tiempo del desarrollo del modelo numérico. Debido a su ventaja en los niveles de tiempo iniciales, ahorra una cantidad significativa de memoria de la computadora en las simulaciones ver el capítulo cuatro. Cabe resaltar que las características de amortiguación computacional y la falta de conservación de la fase adecuada han generado serias críticas; estos aspectos del esquema forward upstream para el caso unidimensional fueron tratados ha detalle en el capítulo cuatro. Se cree que esta técnica es aceptable si la advección y la propagación de ondas no son dominantes en las relaciones de conservación para un fenómeno particular de mesoescala [18].

Sin embargo, puede ser posible mejorar la precisión computacional, y para tal efecto en esta investigación se ha trabajado la parte convectiva del problema (PVIC), usando el esquema forward upstream econtrando las siguientes equivalencias (en la dirección del eje x)

Caso1: Para $u_1 \leq 0$, se tiene

$$\begin{aligned} u_1 \left(\frac{\phi_{i+1,j,k}^n - \phi_{i,j,k}^n}{h_x} \right) &= u_1 \left(\frac{\phi_{i+1,j,k}^n - \phi_{i-1,j,k}^n}{2h_x} + \frac{\phi_{i+1,j,k}^n - \phi_{i-1,j,k}^n}{2h_x} + \frac{\phi_{i,j,k}^n - \phi_{i,j,k}^n}{h_x} \right) \\ &= u_1 \left(\frac{\phi_{i+1,j,k}^n - \phi_{i-1,j,k}^n}{2h_x} \right) + u_1 \frac{h_x (\phi_{i+1,j,k}^n - 2\phi_{i,j,k}^n + \phi_{i-1,j,k}^n)}{2h_x^2}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

Caso2: Para $u_1 > 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} u_1 \left(\frac{\phi_{i,j,k}^n - \phi_{i-1,j,k}^n}{h_x} \right) &= u_1 \left(\frac{\phi_{i+1,j,k}^n - \phi_{i-1,j,k}^n}{2h_x} + \frac{\phi_{i+1,j,k}^n - \phi_{i-1,j,k}^n}{2h_x} + \frac{\phi_{i,j,k}^n - \phi_{i+1,j,k}^n}{h_x} \right) \\ &= u_1 \left(\frac{\phi_{i+1,j,k}^n - \phi_{i-1,j,k}^n}{2h_x} \right) - u_1 \frac{h_x (\phi_{i+1,j,k}^n - 2\phi_{i,j,k}^n + \phi_{i-1,j,k}^n)}{2h_x^2}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

donde se puede ver que aparece una diferencia central de primer orden y una diferencia central de segundo orden llamado difusión numérica. En la dirección del eje y, z los cálculos matemáticos son similares ha los usados en para obtención de las ecuaciones (5.24) y (5.25).

Las razones por la que se ha decidido trabajar la parte convectiva del problema (PVIC) con las expresiones (5.24) y (5.25) en lugar de las presentadas en (5.22), (5.23), es porque haciendo un análisis numérico exhaustivo, estas expresiones (5.24) y (5.25) para el caso unidimensional generan una mayor precisión por efectos del error de redondeo a partir de ocho decimales, ver el capítulo cuatro.

Así la ecuación discretizada del problema (PVIC) usando el esquema forward upstream (arreglado), con su modificación se presenta:

Caso1: Para $u_i \leq 0$ con $i = \overline{1, 3}$ es

$$\begin{aligned}
 \frac{\phi_{i,j,k}^{n+1} - \phi_{i,j,k}^n}{h_t} &= -u_1 \frac{\phi_{i+1,j,k}^n - \phi_{i-1,j,k}^n}{2h_x} - \\
 u_2 \frac{\phi_{i,j+1,k}^n - \phi_{i,j-1,k}^n}{2h_y} &- u_3 \frac{\phi_{i,j,k+1}^n - \phi_{i,j,k-1}^n}{2h_z} \\
 +(\alpha_1 - \frac{u_1 h_x}{2}) &\frac{\phi_{i+1,j,k}^n - 2\phi_{i,j,k}^n + \phi_{i-1,j,k}^n}{h_x^2} \\
 +(\alpha_2 - \frac{u_2 h_y}{2}) &\frac{\phi_{i,j+1,k}^n - 2\phi_{i,j,k}^n + \phi_{i,j-1,k}^n}{h_y^2} \\
 +(\alpha_3 - \frac{u_3 h_z}{2}) &\frac{\phi_{i,j,k+1}^n - 2\phi_{i,j,k}^n + \phi_{i,j,k-1}^n}{h_z^2} \quad (5.26)
 \end{aligned}$$

Caso2: Para $u_i > 0$ con $i = \overline{1, 3}$ el esquema forward upstream es

$$\begin{aligned}
 \frac{\phi_{i,j,k}^{n+1} - \phi_{i,j,k}^n}{h_t} &= -u_1 \frac{\phi_{i+1,j,k}^n - \phi_{i-1,j,k}^n}{2h_x} - \\
 u_2 \frac{\phi_{i,j+1,k}^n - \phi_{i,j-1,k}^n}{2h_y} &- u_3 \frac{\phi_{i,j,k+1}^n - \phi_{i,j,k-1}^n}{2h_z} \\
 +(\alpha_1 + \frac{u_1 h_x}{2}) &\frac{\phi_{i+1,j,k}^n - 2\phi_{i,j,k}^n + \phi_{i-1,j,k}^n}{h_x^2} \\
 +(\alpha_2 + \frac{u_2 h_y}{2}) &\frac{\phi_{i,j+1,k}^n - 2\phi_{i,j,k}^n + \phi_{i,j-1,k}^n}{h_y^2} \\
 +(\alpha_3 + \frac{u_3 h_z}{2}) &\frac{\phi_{i,j,k+1}^n - 2\phi_{i,j,k}^n + \phi_{i,j,k-1}^n}{h_z^2} \quad (5.27)
 \end{aligned}$$

Observe, que la discretización del problema(PVIC) escrito en la forma (5.26) y (5.27) tienen un error local de truncamiento de $o(h_x) + o(h_y) + o(h_z) + o(h_t) + o(h_x^2) + o(h_y^2) + o(h_z^2)$.

De las aproximaciones (5.2) definimos los siguientes operadores discretos:

$$\begin{aligned}
 S_{1\pm} \phi_{i,j,k}^n &:= \phi_{i\pm 1,j,k}^n \quad \text{tal que } S_{1\pm} \phi = \{\phi_{i\pm 1,j,k}^n\}, \\
 S_{2\pm} \phi_{i,j,k}^n &:= \phi_{i,j\pm 1,k}^n \quad \text{tal que } S_{2\pm} \phi = \{\phi_{i,j\pm 1,k}^n\}, \\
 S_{3\pm} \phi_{i,j,k}^n &:= \phi_{i,j,k\pm 1}^n \quad \text{tal que } S_{3\pm} \phi = \{\phi_{i,j,k\pm 1}^n\},
 \end{aligned} \quad (5.28)$$

podemos caracterizar a S_{1+} , S_{1-} como los operadores de desplazamiento hacia adelante y hacia atrás respectivamente, en dirección del *eje x*; S_{2+} , S_{2-}

son los operadores de desplazamiento hacia adelante y hacia atrás respectivamente, en dirección del *eje y*; y S_{3+} , S_{3-} son los operadores de desplazamiento hacia adelante y hacia atrás respectivamente, en dirección del *eje z*. Sea el operador diferenciable y continuo P , el esquema de diferencias finitas forward upstream (5.23) se puede escribir como un operador discreto

$$P_{h_x, h_y, h_z, h_t} \Phi_{i,j,k}^n = 0. \quad (5.29)$$

5.3. Análisis numérico del esquema Forward Upstream

En un análisis de ecuaciones de diferencias, la consistencia junto a la estabilidad garantizan convergencia; el término consistencia se refiere a una aproximación entre el esquema forward upstream y la ecuación diferencial (2.35).

5.3.1. Consistencia

Definición 5.3.1.1 $P_{h_x, h_y, h_z, h_t} \Phi_{i,j,k}^n$ es consistente con $P\vartheta$ hasta un tiempo $n > 0$ en ℓ -norma, si $\|P_{h_x, h_y, h_z, h_t} \Phi_{i,j,k}\|_{\ell^2} = \|\kappa\tau(h_x, h_y, h_z, h_t)\|_{\ell^2}$; $\tau(h_x, h_y, h_z, h_t) \rightarrow 0$ cuando $\kappa \rightarrow 0$. Donde $\tau(h_x, h_y, h_z, h_t)$ es el error de truncamiento local en el tiempo $n\kappa$

Probaremos la consistencia ([3]) de la ecuación discretizada (5.23), para tales efectos denotemos los operadores diferenciales continuos A , B y P como: $A = \frac{\partial}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial x} + u_2 \frac{\partial}{\partial y} + u_3 \frac{\partial}{\partial z}$ y $B = -\alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha_3 \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, aplicando estos operadores a una función suave $\vartheta(\xi, t)$ para $\xi \in \mathbb{R}^3$ se tiene $A\vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + u_3 \frac{\partial \vartheta}{\partial z}$, $B\vartheta = -\alpha_1 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \alpha_2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} - \alpha_3 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}$; así la ecuación (2.35) se escribe como

$$P\vartheta = A\vartheta + B\vartheta = 0. \quad (5.30)$$

Luego con la fórmula de Taylor progresivo en el tiempo obtenemos:

$$\begin{aligned} \vartheta(\xi_{i,j,k}, t_n + h_t) &= \vartheta(\xi_{i,j,k}, t_n) + \frac{1}{1!} h_t \vartheta_t(\xi_{i,j,k}, t_n) + \\ &\frac{1}{2!} h_t^2 \vartheta_{tt}(\xi_{i,j,k}, t_n) + \frac{1}{3!} h_t^3 \vartheta_{ttt}(\xi_{i,j,k}, t_n) + \dots, \end{aligned} \quad (5.31)$$

y reemplazando la notación (5.1) en la expansión de Taylor (5.31) obtenemos

$$\vartheta_{i,j,k}^{n+1} = \vartheta_{i,j,k}^n + \vartheta_t h_t + O(h_t^2). \quad (5.32)$$

Usando fórmula de Taylor con las variables espaciales obtenemos:

$$\begin{aligned} \vartheta(x_i \pm h_x, y_j, z_k, t_n) &= \vartheta(\xi_{i,j,k}, t_n) \pm \frac{1}{1!} h_x \vartheta_x(\xi_{i,j,k}, t_n) \\ &+ \frac{1}{2!} h_x^2 \vartheta_{xx}(\xi_{i,j,k}, t_n) \pm \frac{1}{3!} h_x^3 \vartheta_{xxx}(\xi_{i,j,k}, t_n) + \dots, \end{aligned} \quad (5.33)$$

y reemplazando la notación reducida $\vartheta_{i \pm 1, j, k}^n = \vartheta(x_i \pm h_x, y_j, z_k, t_n)$ en la expansión de Taylor (5.33) obtenemos

$$\vartheta_{i \pm 1, j, k}^n = \vartheta_{i, j, k}^n \pm \vartheta_x h_x + O(h_x^2). \quad (5.34)$$

Trabajando y reemplazando la aproximación (5.32) y (5.34) en la ecuación (5.23) obtenemos que el operador discreto (5.29) se puede escribir como

$$\begin{aligned} P_{h_x, h_y, h_z} \vartheta_{i, j, k}^n &= \vartheta_t + u_1 \vartheta_x + u_2 \vartheta_y + u_3 \vartheta_z - \\ &\alpha_1 \vartheta_{xx} - \alpha_2 \vartheta_{yy} - \alpha_3 \vartheta_{zz} + o(h_x) + o(h_y) + o(h_z) + o(h_t) \\ &+ o(h_x^2) + o(h_y^2) + o(h_z^2) \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$P_{h_x, h_y, h_z, h_t} \vartheta_{i, j, k}^n = A \vartheta + B \vartheta + o(h_x) + o(h_y) + o(h_z) + o(h_t) + o(h_x^2) + o(h_y^2) + o(h_z^2), \quad (5.36)$$

de la ecuación (5.30) y la ecuación (5.36) obtenemos

$$P \vartheta - P_{h_x, h_y, h_z, h_t} \vartheta_{i, j, k}^n = o(h_x) + o(h_y) + o(h_z) + o(h_t) + o(h_x^2) + o(h_y^2) + o(h_z^2). \quad (5.37)$$

Así el esquema (5.23) es consistente con (5.30) pues de (5.37) podemos apreciar que el error local de truncamiento que es el lado derecho tiende a cero cuando $h_x, h_y, h_z, h_t \rightarrow 0$ tienden a cero es decir:

$$P \vartheta - P_{h_x, h_y, h_z, h_t} \vartheta_{i, j, k}^n \rightarrow 0.$$

Por lo tanto hemos contrastado la definición 5.3.1.1.

5.3.2. Estabilidad

Para garantizar la estabilidad del esquema forward upstream expresado de la forma (5.46), deben satisfacer el Criterio de **Von Neumann** el cual sera abordado con detalle. Consideremos las siguientes definiciones:

Definición 5.3.2.1 El esquema de diferencias finitas forward upstream expresado como (5.46) es **estable** con respecto alguna norma $\|\cdot\|$ si y solo si existe solución, es única y depende continuamente de los datos iniciales, es decir existen constantes positivas h_{x_0} , h_{y_0} , h_{z_0} , h_{t_0} y constantes no negativas $C > 0$, $t > 0$, $\alpha > 0$ con $n \geq 0$ tal que

$$\|\phi_{i,j,k}^{n+1}\| \leq Ce^{\alpha t} \|\phi_{i,j,k}^0\|,$$

para $0 \leq t = (n + 1)h_t$, $0 < h_x \leq h_{x_0}$, $0 < h_y \leq h_{y_0}$, $0 < h_z \leq h_{z_0}$ y $0 < h_t \leq h_{t_0}$.

Factor de amplificación

Para calcular el factor de amplificación, escribiremos una definición formal de la transformada de Fourier ([3]) como

Definición 5.3.2.2 Sea $\phi(\xi, n)$ una función discreta definida en \mathbb{Z} , entonces su transformada de Fourier discreta de $\phi(\xi, n)$ con $n \in \mathbb{Z}^+$, es denotado como $\hat{\phi}(\xi, n)$ y definido por:

$$\hat{\phi}(\xi, n) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^N} e^{-imh \cdot \xi} \phi_m^n h^N,$$

donde $h\mathbb{Z}^N = \{hm : m \in \mathbb{Z}^N\}$ con $mh \cdot \xi$ un producto interno definido para $\xi \in [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^N$, y la fórmula de inversión es

$$\phi_m^n = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^N} e^{imh \cdot \xi} \hat{\phi}(\xi, n) d\xi.$$

De la definición 2.2.0.1 y 2.2.0.2 podemos contrastar que existe una correspondencia biunívoca entre el espacio discreto $\ell^2(\mathbb{Z})$ y el espacio $L^2[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$

el cual para $\xi \in [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$ garantiza que

$$\|\phi_i^n\|_{\ell^2}^2 = h \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\phi_m^n|^2 = \int_{[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]} |\hat{\phi}^n(\xi)|^2 d\xi = \|\phi\|_{L^2}^2, \quad (5.38)$$

la relación (5.38) es denominada relación de Parseval's ([3] y [2]).

De la definición 5.3.2.2, y la notación (5.2) denotando $h_1 = h_x$, $h_2 = h_y$, $h_3 = h_z$, $h\ell\mathbb{Z}^N = \{hem : m \in \mathbb{Z}^N\}$; tenemos que $mh\ell \cdot \xi$ es el producto interno definido para $\xi \in [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]^N$ con $\ell = 1, 2, 3$. Siendo $\phi = \{\phi_{i,j,k}^n\}$

la función discreta, se define la transformada discreta de Fourier $\hat{\phi}(\xi, n)$ y se escribe de la forma

$$\hat{\phi}(\xi, n) = \frac{h_1 h_2 h_3}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{i,j,k} \phi_{i,j,k}^n e^{-i h_1 \xi_1} e^{-i h_2 \xi_2} e^{-i h_3 \xi_3}, \quad (5.39)$$

donde $\hat{i} \in \mathbb{C}; i, j, k \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{Z}^+$.

Denotando $\theta_1 = h_1 \xi_1, \theta_2 = h_2 \xi_2, \theta_3 = h_3 \xi_3$ la transformada discreta de Fourier dada en (5.39) se puede escribir como

$$\hat{\phi}(\theta, \theta, \theta, n) = \frac{h_1 h_2 h_3}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{i,j,k} \phi_{i,j,k}^n e^{-i \theta_1} e^{-i \theta_2} e^{-i \theta_3}, \quad (5.40)$$

donde $\hat{i} \in \mathbb{C}; i, j, k \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{Z}^+$.

Aplicando transformada discreta de Fourier de la forma (5.40) en (5.28) obtenemos

$$\widehat{S_{\ell \pm} \phi}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, n) = e^{\pm i \theta_\ell} \hat{\phi}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, n), \quad (5.41)$$

donde $\theta_\ell = h_\ell \xi$ para $\ell = 1, 2, 3$ así de la ecuación (5.40) y (5.41) podemos definir

$$\tilde{S}_{\ell \pm} := e^{\pm i \theta_\ell} \text{ para } \ell = 1, 2, 3. \quad (5.42)$$

Haciendo la siguiente notación

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{h_t u_1}{h_x}, \lambda_2 = \frac{h_t u_2}{h_y}, \lambda_3 = \frac{h_t u_3}{h_z}, \\ \mu_x &= \frac{\alpha_1 h_t}{h_x^2}, \mu_y = \frac{\alpha_1 h_t}{h_y^2}, \mu_z = \frac{\alpha_1 h_t}{h_z^2}, \\ \alpha_x &= \alpha_1 + 0,5 u_1 h_x, \alpha_y = \alpha_2 + 0,5 u_2 h_y, \alpha_z = \alpha_3 + 0,5 u_3 h_z, \\ \mu_1 &= \mu_x + 0,5 \lambda_1, \mu_2 = \mu_y + 0,5 \lambda_2, \mu_3 = \mu_z + 0,5 \lambda_3; \end{aligned} \quad (5.43)$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son denominados los números de Courant, la ecuación (5.27) para $u_i > 0$ con $i = 1, 3$ se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} &= (1 - 2\mu_1 - 2\mu_2 - 2\mu_3) \phi_{i,j,k}^n + \\ & \left(\frac{-\lambda_1}{2} + \mu_1 \right) \phi_{i+1,j,k}^n + \left(\frac{\lambda_1}{2} + \mu_1 \right) \phi_{i-1,j,k}^n \\ & + \left(\frac{-\lambda_2}{2} + \mu_2 \right) \phi_{i,j+1,k}^n + \left(\frac{\lambda_2}{2} + \mu_2 \right) \phi_{i,j-1,k}^n \\ & + \left(\frac{-\lambda_3}{2} + \mu_3 \right) \phi_{i,j,k+1}^n + \left(\frac{\lambda_3}{2} + \mu_3 \right) \phi_{i,j,k-1}^n \end{aligned} \quad (5.44)$$

De las notaciones (5.43), y los operadores discretos (5.28) el esquema forward upstream expresado de la forma (5.44) se escribe como

$$\begin{aligned} \phi_{i,j,k}^{n+1} = & (1 - 2\mu_1 - 2\mu_2 - 2\mu_3)\phi_{i,j,k}^n + \\ & \left(\frac{-\lambda_1}{2} + \mu\right) S_{1+} \phi_{i,j,k}^n + \left(\frac{\lambda_1}{2} + \mu\right) S_{1-} \phi_{i,j,k}^n \\ & + \left(\frac{-\lambda_2}{2} + \mu\right) S_{2+} \phi_{i,j,k}^n + \left(\frac{\lambda_2}{2} + \mu\right) S_{2-} \phi_{i,j,k}^n \\ & + \left(\frac{-\lambda_3}{2} + \mu\right) S_{3+} \phi_{i,j,k}^n + \left(\frac{\lambda_3}{2} + \mu\right) S_{3-} \phi_{i,j,k}^n \end{aligned} \quad (5.45)$$

Finalmente la ecuación (5.45) queda representada como

$$\phi_{i,j,k}^{n+1} = Q\phi_{i,j,k}^n, \quad (5.46)$$

donde $Q = Q(S_{1+}, S_{1-}, S_{2+}, S_{2-}, S_{3+}, S_{3-})$ es un polinomio de la forma:

$$\begin{aligned} Q = & (1 - 2\mu_1 - 2\mu_2 - 2\mu_3) + \left(\frac{-\lambda_1}{2} + \mu_1\right) S_{1+} + \\ & \left(\frac{\lambda_1}{2} + \mu\right) S_{1-} + \left(\frac{-\lambda_2}{2} + \mu\right) S_{2+} + \\ & \left(\frac{\lambda_2}{2} + \mu\right) S_{2-} + \left(\frac{-\lambda_3}{2} + \mu\right) S_{3+} + \left(\frac{\lambda_3}{2} + \mu\right) S_{3-}, \end{aligned} \quad (5.47)$$

Trabajando y reemplazando (5.42), (5.43) en el polinomio Q y usando la fórmula de inversión de Fourier, detallado en la definición (5.3.2.2) el esquema explícito (5.46) se escribe de la forma:

$$\hat{\phi}_{i,j,k}^{n+1} = \rho \hat{\phi}_{i,j,k}^n \text{ siendo } \hat{Q} = \rho(\beta_1, \beta_2, \beta_3, h_x, h_y, h_z, h_t) \quad (5.48)$$

donde $\rho(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \hat{h}_x, \hat{h}_y, \hat{h}_z, \hat{h}_t) = \hat{Q}(e^{\pm ih_1 \xi_1}, e^{\pm ih_2 \xi_2}, e^{\pm ih_3 \xi_3})$ se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \rho = & 1 - 4\mu_1 \text{sen}^2 \frac{\beta_1}{2} - 4\mu_2 \text{sen}^2 \frac{\beta_2}{2} - 4\mu_3 \text{sen}^2 \frac{\beta_3}{2} - \\ & \hat{I}(\lambda_1 \text{sen} \beta_1 + \lambda_2 \text{sen} \beta_2 + \lambda_3 \text{sen} \beta_3). \end{aligned}$$

Haciendo procedimientos análogos y considerando

$$\alpha_x^* = \alpha_1 - 0,5u_1 h_x, \alpha_y^* = \alpha_2 - 0,5u_2 h_y, \alpha_z^* = \alpha_3 - 0,5u_3 h_z \quad (5.49)$$

$$\mu_1^* = \mu_x - 0,5\lambda_1, \mu_2^* = \mu_y - 0,5\lambda_2, \mu_3^* = \mu_z - 0,5\lambda_3, \quad (5.50)$$

el esquema explícito (5.47) se escribe de la forma:

$$\begin{aligned} \rho = & 1 - 4\mu_1^* \text{sen}^2 \frac{\beta_1}{2} - 4\mu_2^* \text{sen}^2 \frac{\beta_2}{2} - 4\mu_3^* \text{sen}^2 \frac{\beta_3}{2} - \\ & \hat{I}(\lambda_1 \text{sen} \beta_1 + \lambda_2 \text{sen} \beta_2 + \lambda_3 \text{sen} \beta_3). \end{aligned}$$

La ecuación (5.49) y (5.51) se denominan **factor de amplificación** y mide la amplitud de las soluciones generadas por el esquema forward upstream.

Criterio de Von Neumann

Con el uso del análisis de Fourier se puede dar condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de esquemas de diferencias finitas, esto es lo que se llama análisis de Von Neumann para tales efectos estableceremos el siguiente criterio y teorema respectivamente

Criterio 5.3.1 *El esquema forward upstream expresado de la forma (5.46) satisface el criterio de estabilidad de Von Neumann ([20]), si existe una constante $C > 0$ independiente de $h_x, h_y, h_z, h_t, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ y κ tal que*

$$|\rho(\theta_1, \theta_2, \theta_3, h_x, h_y, h_z, h_t)| \leq 1 + C\kappa. \quad (5.51)$$

Donde $\kappa > 0$ es el paso del tiempo y $\rho(\theta_1, \theta_2, \theta_3, h_x, h_y, h_z, h_t)$ denota el radio espectral del factor de amplificación (5.49) y (5.51).

Si $\rho(\theta_1, \theta_2, \theta_3, h_x, h_y, h_z, h_t)$ es independiente de h_x, h_y, h_z, h_t , la condición de estabilidad (5.51) puede ser remplazada con una condición de estabilidad restricta como

$$|\rho(\theta_1, \theta_2, \theta_3)| \leq 1. \quad (5.52)$$

Teorema 5.3.1 *El esquema de diferencias finitas forward upstream representado en (5.46) es estable en la norma ℓ^2 si y solo si satisface el Criterio 5.3.1 de Von Neumann.*

El teorema (5.3.1) muestra que para determinar la estabilidad esquema de diferencias finitas forward upstream representado en (5.46), solamente necesitamos considerar el factor de amplificación $\rho(\theta_1, \theta_2, \theta_3, h_x, h_y, h_z, h_t)$.

Demostración

\Leftrightarrow Si el Criterio 5.3.1 de **Von Neumann** es satisfecha, el esquema de diferencias finitas forward upstream representado en (5.46) es estable en la norma ℓ^2 .

Aplicando transformada de Fourier al esquema explícito (5.46) se obtiene

$$\hat{\phi}_{i,j,k}^{n+1} = \rho \hat{\phi}_{i,j,k}^n, \quad (5.53)$$

trabajando esta expresión se puede escribir de la forma

$$\hat{\phi}_{i,j,k}^n = \rho \hat{\phi}_{i,j,k}^{n-1} = \rho^2 \hat{\phi}_{i,j,k}^{n-2} = \dots = \rho^n \hat{\phi}_{i,j,k}^0 \quad (5.54)$$

Usando la relación de Parseval's (5.38) para dimensiones mayores y denotando $\zeta = |\hat{\phi}^n(\theta_1, \theta_2, \theta_3)|^2$ obtenemos

$$\begin{aligned} \|\phi_{i,j,k}^n\|_{\ell^2}^2 &= h_1 h_2 h_3 \sum_{i,j,k} (\phi_{i,j,k}^n)^2 \\ &= \int_{-\frac{\pi}{h_1}}^{\frac{\pi}{h_1}} \int_{-\frac{\pi}{h_2}}^{\frac{\pi}{h_2}} \int_{-\frac{\pi}{h_3}}^{\frac{\pi}{h_3}} \zeta d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3, \end{aligned} \quad (5.55)$$

en efecto tenemos que

$$\|\phi_{i,j,k}^n\|_{\ell^2}^2 = \int_{-\frac{\pi}{h_1}}^{\frac{\pi}{h_1}} \int_{-\frac{\pi}{h_2}}^{\frac{\pi}{h_2}} \int_{-\frac{\pi}{h_3}}^{\frac{\pi}{h_3}} \zeta d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \quad (5.56)$$

ahora reemplazando (5.54) en la identidad de Parseval's (5.56) y denotando $\nu = |\rho(\theta_1, \theta_2, \theta_3, h_x, h_y, h_z, h_t)|^{2n}$ y $\zeta_0 = |\hat{\phi}^n(\theta_1, \theta_2, \theta_3)|^2$ obtenemos

$$\|\phi_{i,j,k}^n\|_{\ell^2}^2 = \int_{-\frac{\pi}{h_1}}^{\frac{\pi}{h_1}} \int_{-\frac{\pi}{h_2}}^{\frac{\pi}{h_2}} \int_{-\frac{\pi}{h_3}}^{\frac{\pi}{h_3}} \nu \zeta_0 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3. \quad (5.57)$$

trabajando y usando el Criterio 5.3.1 tal que

$$|\rho(\theta_1, \theta_2, \theta_3, h_x, h_y, h_z, h_t)| \leq 1 + C\kappa$$

con $C > 0$ y $\kappa > 0$, la ecuación (5.57) denotando

$$\nu_1 = |\hat{\phi}^0(\theta_1, \theta_2, \theta_3)|^2,$$

se puede escribir como

$$\|\phi_{i,j,k}^n\|_{\ell^2}^2 \leq (1 + C\kappa)^{2n} \int_{-\frac{\pi}{h_1}}^{\frac{\pi}{h_1}} \int_{-\frac{\pi}{h_2}}^{\frac{\pi}{h_2}} \int_{-\frac{\pi}{h_3}}^{\frac{\pi}{h_3}} \nu_1 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3,$$

usando el resultado 5.55 obtenemos

$$\|\phi_{i,j,k}^n\|_{\ell^2}^2 \leq (1 + C\kappa)^{2n} \sum_{i,j,k} (\phi_{i,j,k}^0)^2 h_1 h_2 h_3,$$

por tanto, se tiene que

$$\|\phi_{i,j,k}^n\|_{\ell^2}^2 \leq (1 + C\kappa)^{2n} \|\phi_{i,j,k}^0\|_{\ell^2}^2. \quad (5.58)$$

Sea $T > 0$ suficientemente grande talque $n\kappa \leq T$, entonces $n \leq \frac{T}{\kappa}$, y del hecho que $1 + C\kappa \leq e^{C\kappa}$ con $C > 0$ y $\kappa > 0$ obtenemos $(1 + C\kappa)^{2n} \leq (1 + C\kappa)^2 \frac{T}{\kappa} \leq e^{2CT}$, y remplazando en la desigualdad (5.58) obtenemos

$$\|\phi_{i,j,k}^n\|_{\ell^2} \leq e^{CT} \|\phi_{i,j,k}^0\|_{\ell^2}. \quad (5.59)$$

Así de (5.58) y (5.59) el esquema de diferencias finitas forward upstream dado en (5.46) es estable. Este resultado contrasta la definición 5.3.2.1 en modo discreto.

⇒ Para esto utilizamos la contraposición, si el Criterio (5.3.1) de Von Neumann no es satisfecha, entonces el esquema de diferencias finitas forward upstream representado en (5.46) no es estable. Observe, que para esta demostración basta probar el caso unidimensional.

Por la continuidad de $\rho(\beta)$, para algún $C > 0$, existe un $\beta_c \in [\beta_1, \beta_2]$ tal que $|\rho(\beta_c, h_x, h_t)| > 1 + C\kappa$, ver Figura 5.2.

Considerando el dato inicial ϕ_j^0 construimos una función tal que

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^0(\xi) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \beta_c \notin [\beta_1, \beta_2] \\ \frac{S}{h} & \text{si } \beta_c \in [\beta_1, \beta_2] \\ 0 & \text{si } \xi \notin \left[\frac{\beta_1}{h_x}, \frac{\beta_2}{h_x}\right] \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{S}{\beta_2 - \beta_1} & \text{si } \xi \in \left[\frac{\beta_1}{h_x}, \frac{\beta_2}{h_x}\right] \end{cases} \end{aligned} \quad (5.60)$$

Observe, que $\|\hat{\phi}^0\| = 1$.

Aplicando la transformada de Fourier al esquema forward upstream expresado como (5.46) para el caso unidimensional sabiendo que para algún $C > 0$ con $\beta_c \in [-\pi, \pi]$ tenemos que $\hat{\phi}^0(\beta_c) \neq 0$ entonces para $|\rho(\beta_c)| >$

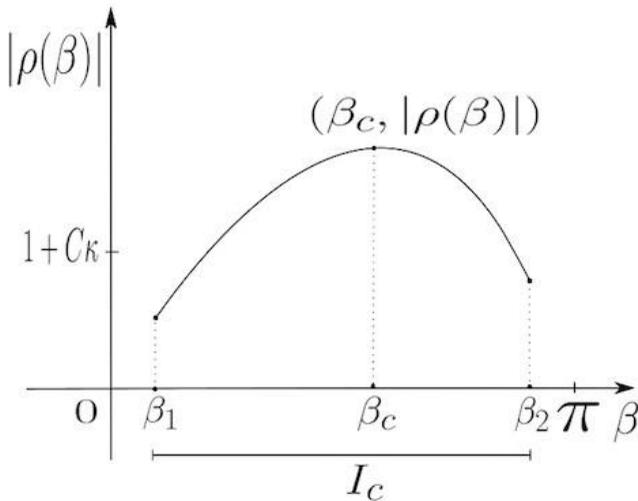


Figura 5.2: Intervalo $I_c = [\beta_1, \beta_2]$, que contiene β_c con $|\rho(\beta_c)| > 1 + C_k$ para algún valor de $h\xi = \beta_c \in I_c$.

$1 + C_k$ obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^n &= \rho(\beta_c) \hat{\phi}^{n-1} \\ &= \rho^2(\beta_c) \hat{\phi}^{n-2} = \dots = \rho^n(\beta_c) \hat{\phi}^0 > (1 + C_k)^n \hat{\phi}^0. \end{aligned} \tag{5.61}$$

Usando la relación de Parseval's (5.38) obtenemos

$$\|\phi_i^n\|_{\ell^2}^2 = h_x \sum_i (\phi_i^n)^2 = \int_{-\frac{\pi}{h_x}}^{\frac{\pi}{h_x}} |\hat{\phi}^n(\beta_c)|^2 d\beta_c,$$

en efecto tenemos que

$$\|\phi_i^n\|_{\ell^2}^2 = \int_{-\frac{\pi}{h_x}}^{\frac{\pi}{h_x}} |\hat{\phi}^n(\beta_c)|^2 d\beta_c \tag{5.62}$$

ahora reemplazando (5.61) en la identidad de Parseval's (5.62) obtenemos

$$\|\phi_i^n\|_{\ell^2}^2 = \int \frac{\pi}{h_x} |\rho(\beta_c)|^{2n} |\hat{\phi}^0(\beta_c)|^2 d\beta_c,$$

o equivalentemente

$$\|\phi_i^n\|_{\ell^2}^2 = \frac{\beta_2}{\beta_1 h_x} |\rho(h_x \xi, h_x, h_t)|^{2n} |\hat{\phi}^0(\xi)|^2 d\xi. \quad (5.63)$$

Por hipótesis se tiene $|\rho(\beta_c, h_x, h_t)| > 1 + C\kappa$ con $C > 0$ y $\kappa > 0$, y reemplazado en la ecuación (5.63) obtenemos

$$\|\phi_i^n\|_{\ell^2}^2 > (1 + C\kappa)^{2n} \frac{\beta_2}{\beta_1 h_x} |\hat{\phi}^0(\xi)|^2 d\xi, \quad (5.64)$$

trabajando la desigualdad (5.64) y usando la función construida (5.60) obtenemos

$$\|\phi_i^n\|_{\ell^2}^2 > (1 + C\kappa)^{2n}, \quad (5.65)$$

si elegimos $C > 0$ para el cual existe $T > 0$ y $\kappa > 0$ con $\kappa n \sim T$ tal que se cumpla $2 + 2CT \geq e^{2CT} \sim (1 + \kappa C)^2 \kappa^{\frac{T}{\kappa}}$, la desigualdad (5.65) se escribe como

$$\|\phi_i^n\|_{\ell^2}^2 \geq \frac{1}{2} (1 + C\kappa)^2 \kappa^{\frac{T}{\kappa}} \sim \frac{1}{2} e^{2CT} \cdot 1,$$

así podemos concluir que

$$\|\phi_i\|_{\ell^2} \geq \frac{1}{2} e^{\frac{2CT}{n}} \|\phi_i\|_{\ell^2}. \quad (5.66)$$

esto muestra que el esquema de diferencias finitas forward upstream escrito como (5.46) es ilimitado $\forall C > 0$, por tanto, es inestable.

De las desigualdades (5.59), (5.66) el teorema (5.3.1) queda demostrado

□

Note, que del resultado (5.59) la cual es una representación discreta de la definición 5.3.2.1, establecemos la siguiente conclusión.

Conclusión 5.3.1 *El esquema forward upstream representado en (5.46) es llamado estable si existe una constante $\kappa > 0$, $C > 0$, $T > 0$ y una norma ℓ^2 tal que*

$$\|\Phi_{i,j,k}^n\|_{\ell^2} = \|Q^n \Phi_{i,j,k}^0\|_{\ell^2} \leq e^{CT} \|\Phi_{i,j,k}^0\|_{\ell^2},$$

donde $n\kappa \leq T$; κ y C independientes de $h_x, h_y, h_z, h_t, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, con $n > 0$ siendo $\mathfrak{E} = h\ell\xi$ con $\xi \in [-\frac{\pi}{h'}, \frac{\pi}{h}]^N$ para $\ell = 1, 2, 3$.

Note, que de acuerdo al Criterio (5.3.1), si

$$\rho(\beta_1, \beta_2, \beta_3, h_x, h_y, h_z, h_t) = \rho(\beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

entonces la CVN se puede sustituir por $|\rho(\beta_1, \beta_2, \beta_3)| \leq 1$.

En efecto aplicando este resultado en (5.49) obtenemos

$$\left| 1 - 4\mu_1 \text{sen}^2 \frac{\beta_1}{2} - 4\mu_2 \text{sen}^2 \frac{\beta_2}{2} - 4\mu_3 \text{sen}^2 \frac{\beta_3}{2} \right| + |\lambda_1 \text{sen} \beta_1 + \lambda_2 \text{sen} \beta_2 + \lambda_3 \text{sen} \beta_3| \leq 1, \quad (5.67)$$

y aplicando en (5.51) obtenemos

$$\left| 1 - 4\mu_1^* \text{sen}^2 \frac{\beta_1}{2} - 4\mu_2^* \text{sen}^2 \frac{\beta_2}{2} - 4\mu_3^* \text{sen}^2 \frac{\beta_3}{2} \right| + |\lambda_1 \text{sen} \beta_1 + \lambda_2 \text{sen} \beta_2 + \lambda_3 \text{sen} \beta_3| \leq 1. \quad (5.68)$$

Observe, que mayorando la ecuación (5.67) y (5.68) considerando $h_x = h_y = h_z = h_t$ obtenemos que las condiciones de estabilidad son respectivamente ([10])

$$\left| 1 - 4 \left(\frac{\alpha_1}{h_x} + 0,5u_1 + \frac{\alpha_2}{h_y} + 0,5u_2 + \frac{\alpha_3}{h_z} + 0,5u_3 \right) \right|_{\max} + |u_1 + u_2 + u_3|_{\max} \leq 1,$$

$$\left| 1 - 4 \left(\frac{\alpha_1}{h_x} - 0,5u_1 + \frac{\alpha_2}{h_y} - 0,5u_2 + \frac{\alpha_3}{h_z} - 0,5u_3 \right) \right|_{\max} + |u_1 + u_2 + u_3|_{\max} \leq 1.$$

5.3.3. Convergencia

Definición 5.3.3.1 Un esquema de diferencia finita forward upstream que aproxima una ecuación diferencial parcial como (2.35) es un esquema **convergente** en alguna norma $\| \cdot \|$ si las soluciones de la ecuación diferencial parcial $\vartheta(\xi, t)$, y las soluciones del esquema de diferencias finitas $\phi_{i,j,k}^n$, tales que $\phi_{i,j,k}^0$ converge a $\vartheta_0(\xi)$ cuando ih_x, jh_y, kh_z, nh_t converge a x, y, z, t respectivamente, entonces $\phi_{i,j,k}^n$ converge a $\vartheta(\xi, t)$ cuando

$$(ih_x, jh_y, kh_z, nh_t)$$

converge a (x, y, z, t) cuando h_x, h_y, h_z, h_t convergen a 0; con $\xi \in \mathbf{R}^3$ y $t > 0$.

Proposición 5.3.1 Las soluciones del esquema de diferencias finitas forward upstream (5.46) son convergentes en norma ℓ^2 , con las soluciones de la ecuación diferencial parcial (2.35), representadas por $\vartheta(\xi, t)$, para $\xi \in \mathbf{R}^3$ si $\|\vartheta(\xi, t) - \phi_{i,j,k}^n\|_{\ell^2} \rightarrow 0$ cuando $h_x, h_y, h_z, h_t \rightarrow 0$.

Demostración

Note, que considerando $h_x = h_y = h_z = h_t = h$ el esquema forward upstream (5.23) se rescribe de la siguiente manera

$$\vartheta_{i,j,k}^{n+1} = Q_{i,j,k}^n \vartheta_{i,j,k}^n + 4o(h) + 3o(h^2). \quad (5.69)$$

Sea $\vartheta(\xi, t)$ una solución de la ecuación (5.30), como el esquema forward upstream es **consistente** con orden de precisión (1, 2), del resultado (5.37), trabajando y considerando $h_x = h_y = h_z = h_t = h$ obtenemos

$$P\vartheta - P_{h_x, h_y, h_z, h_t} \phi_{i,j,k}^n = 4o(h) + 3o(h^2), \quad (5.70)$$

es decir

$$\vartheta_{i,j,k}^n - Q_{i,j,k}^{n-1} \vartheta_{i,j,k}^{n-1} = 4o(h) + 3o(h^2). \quad (5.71)$$

$$\text{Sea } \varphi_{i,j,k}^n = \vartheta_{i,j,k}^n - \phi_{i,j,k}^n \text{ el error en el } n\text{-ésimo paso,} \quad (5.72)$$

$$\text{tal que } \varphi_{i,j,k}^0 = \max_{i,j,k} |\vartheta_{i,j,k}^0 - \phi_{i,j,k}^0| = 0. \quad (5.73)$$

De la ecuación (5.71), la ecuación (5.72) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j,k}^n &= Q\varphi_{i,j,k}^{n-1} + 4o(h) + 3o(h^2) \\ &= Q^2\varphi_{i,j,k}^{n-2} + Q[4o(h) + 3o(h^2)] + 4o(h) + 3o(h^2) = \dots \\ &= Q^n \varphi_{i,j,k}^0 + \sum_{j=0}^{n-1} Q^j [4o(h) + 3o(h^2)], \end{aligned}$$

usando la ecuación (5.73) obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j,k}^n &= \sum_{j=0}^{n-1} Q^j [4o(h) + 3o(h^2)] \\ \|\varphi_{i,j,k}^n\|_{\ell^2} &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \|Q^j\|_{\ell^2} [4o(h) + 3o(h^2)], \end{aligned} \quad (5.74)$$

y usando la conclusión 5.3.1 de **estabilidad** esta desigualdad se escribe como

$$\|\varphi_{i,j,k}^n\|_{\ell^2} \leq \sum_{j=0}^{n-1} e^{CT_j} [4o(h) + 3o(h^2)] \quad (5.75)$$

Remplazando la ecuación (5.72) en la desigualdad (5.75) obtenemos

$$\|\vartheta_{i,j,k}^n - \phi_{i,j,k}^n\|_{\ell^2} \leq \sum_{j=0}^{n-1} e^{CT_j} [4o(h) + 3o(h^2)], \quad (5.76)$$

cuando $T_j \sim t_j = jh$ obtenemos

$$\|\vartheta_{i,j,k}^n - \phi_{i,j,k}^n\|_{\ell^2} = o(h) + o(h^2), \quad (5.77)$$

del resultado de la ecuación (5.77), el esquema de las diferencias finitas forward upstream es convergente de orden (1,2).

Podemos concluir que los criterios de consistencia, convergencia y estabilidad quedan rigurosamente establecidos ([15], [3] y [20]).

Capítulo VI

Aplicaciones

6.1. Aplicación 1

El problema de valor inicial y de contorno (PVIC) para el caso 1D se escribe como

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \alpha_1 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \quad \text{si } x \in L_x, t > 0 \\
 (PVIC - 1D) \quad & \vartheta(x, 0) = f_0(x) \quad \text{si } x \in L_x \\
 & \vartheta(x, t) |_{\partial\Omega} = g \quad \text{si } x \in L_x, t > 0
 \end{aligned}$$

donde $L_x = [0, L_1] = \Omega$, g depende de f_1 y f_2 ; la solución discretizada para PVIC-1D usando el esquema forward upstream expresado de la forma (5.26) sería cuando $j = k = 0$ y se puede escribir explícitamente para el caso 1D como

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n + \frac{h_t \alpha_1}{(h_x)^2} (\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n). \quad (6.1)$$

Para el caso unidimensional el factor de amplificación expresado en la forma (5.51) se puede escribir como $\rho(\beta_1, h_x, t) = \rho(\beta_1)$, así la CVN se puede sustituir por

$$|\rho(\beta_1)| \leq 1, \quad (6.2)$$

de la desigualdad (6.2) obtenemos $-1 \leq \rho(\beta) = 1 - 4\mu^* \text{Sin}^2 \frac{\beta_1}{2}$, trabajando ésta desigualdad se obtiene $\mu^* \text{Sin}^2 \frac{\beta_1}{2} \leq \frac{1}{2}$, y mayorando obtenemos que

$0 \leq \mu^*_1 \leq \frac{1}{2}$, por lo tanto de la discretización (6.1) del PVIC-1D es estable si satisface la siguiente desigualdad ([9]):

$$0 \leq \frac{h_t \alpha_1}{h_x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

La discretización (6.1) con $m_x = 10$ el número de pasos espaciales y $h_x = h_t = 0,1$, permite hacer una comparación del esquema forward upstream con los resultados obtenidos por Fletcher ([7]) para la condición inicial $\phi(x, 0) = 0$ y la condición de frontera $\phi(0, t) = \phi(1, t) = 100$ en un tiempo máximo de 3000 segundos, siendo ϑ la solución exacta de la ecuación (6.1) obtenida por separación de variables ([7]) y es de la forma

$$\vartheta(x_i, T_j) = 100 - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{400}{(2m-1)\pi} \right] \sin(2m-1)\pi x_i e^{-\alpha_1 \lambda_m^2 T_j}, \quad (6.3)$$

donde $\lambda_m = \frac{(2m-1)\pi}{L_1}$, $x^i = ih_x$, $T_j = jh_t$ con $i, j \in Z$ y son mostrados en el Cuadro 6.2.

Los datos del Cuadro 6.1 y el Cuadro 6.2 representan los cambios de temperatura en los tiempos 500s, 1000s, 1500s, 2000s, 2500s hasta un tiempo máximo de 3000s.

Incorporando la condición $\phi(0, 0) = \phi(1, 0) = 50$ permite obtener mayor aproximación de la solución exacta ([7]), ver Figura 6.2, el Cuadro 6.1 y el Cuadro 6.2.

El Cuadro 6.3 muestra el correspondiente ℓ_2 - error denotado como $\|e\|_{\ell^2}$, tal que

$$\|e\|_{\ell^2} = \frac{\sum_{i,t=0}^{m_x m_t} \phi(x_i, T_j) - \vartheta(x_i, T_j)}{m_x - 1}, \quad (6.4)$$

y el factor de amplificación ρ en el tiempo máximo de 3000s en la línea $x = 0,9$.

											Esquema	
											Forward Upstream	
0	0.1	0.2	0.3	0.4	x 0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1		
100.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100.00		500s
100.00	50.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	50.00	100.00		1000s
100.00	50.00	25.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	25.00	50.00	100.00		1500s
100.00	62.50	25.00	12.50	0.00	0.00	0.00	12.50	25.00	62.50	100.00		2000s
100.00	62.50	37.50	12.50	6.25	0.00	6.25	12.50	37.50	62.50	100.00		2500s
100.00	68.75	37.50	21.87	6.25	6.25	6.25	21.87	37.50	68.75	100.00		3000s
100.00	68.75	45.31	21.88	14.06	6.25	14.06	21.88	45.31	68.75	100.00		3500s
100.00	68.33	41.53	22.49	11.68	8.25	11.68	22.49	41.53	68.33	100.00		ϑ

Cuadro 6.1: Cambios de temperatura con $\phi(0, t) = \phi(1, t) = 100$.

Implementamos un código en octave y fortran 90 para la visualización gráfica y numérica respectivamente, ver Código (8.5, 8.5.1).

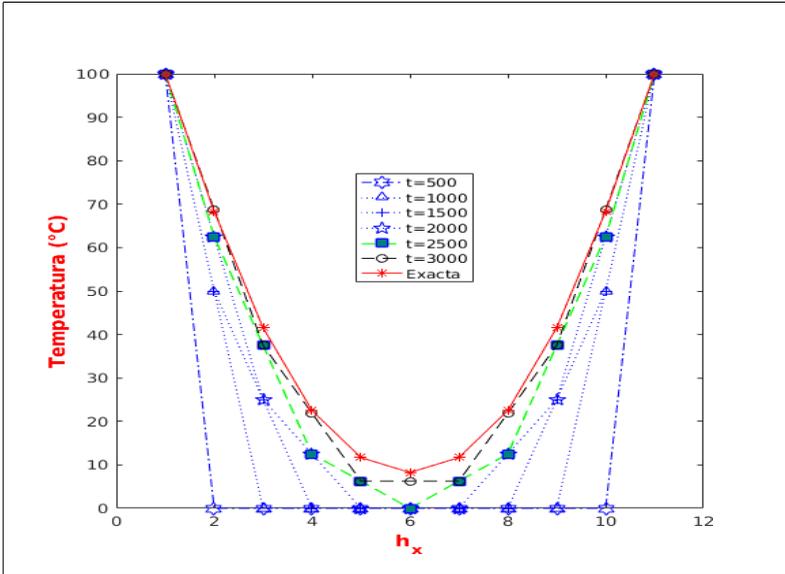


Figura 6.1: Cambios de temperatura por el esquema forward upstream.

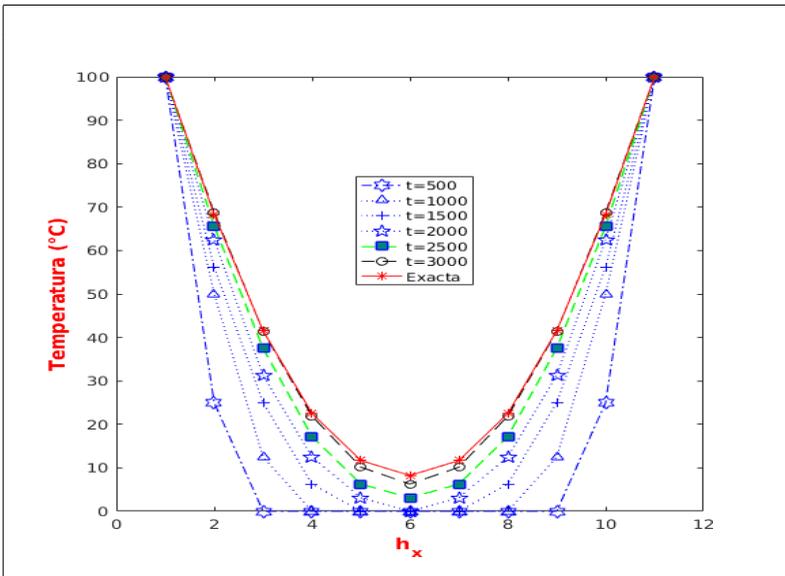


Figura 6.2: Cambios de temperatura incorporando la condición de frontera $\phi(0, 0) = \phi(1, 0) = 50$.

											Esquema	
0	0.1	0.2	0.3	0.4	x		0.6	0.7	0.8	0.9	1	Forward Upstream
50.00	25.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	.00	25.00	50.00	500s
100.00	50.00	12.50	.00	.00	.00	.00	.00	.00	12.50	50.00	100.00	1000s
100.00	56.25	25.00	6.25	.00	.00	.00	6.25	25.00	56.25	100.00	100.00	1500s
100.00	62.50	31.25	12.50	3.13	.00	3.13	12.50	31.25	62.50	100.00	100.00	2000s
100.00	65.63	37.50	17.19	6.25	3.13	6.25	17.19	37.50	65.63	100.00	100.00	2500s
100.00	68.75	41.41	21.88	10.16	6.49	10.16	21.88	41.41	68.75	100.00	100.00	3000s
100.00	68.75	41.41	21.88	10.16	6.49	10.16	21.88	41.41	68.75	100.00	100.00	Fletcher [7]
100.00	68.33	41.53	22.49	11.68	8.25	11.68	22.49	41.53	68.33	100.00		ϑ

Cuadro 6.2: Cambios de temperatura incorporando $\phi(0, 0) = \phi(1, 0) = 50$.

								Error	
m_x	μ_1	t_{max}	x	ϕ	ϑ	$\ e\ _2$	ρ		
10	0.5	3000s	0.9	68.75	68.33	0.9418			Fletcher [7]
10	0.5	3000s	0.9	68.75	68.33	0.94195	0.9611		Present work

Cuadro 6.3: Cambio de temperatura en un tiempo máximo de 3000 segundos.

6.2. Aplicación 2

La ecuación (2.37), cuando $j = k = 0$ y $\alpha_l = v_n = 0$ con $l = 2, 3$ y $n = 2, 3$; se puede escribir como

$$\phi_i^{t+1} = \phi_i^t - 0,5v_1 \frac{h_t}{h_x} (\phi_{i+1}^t - \phi_{i-1}^t) + \frac{h_t \alpha_1}{(h_x)^2} (\phi_{i+1}^t - 2\phi_i^t + \phi_{i-1}^t) \quad (6.5)$$

Para el caso **1D**, de la ecuación (5.49) y la desigualdad (6.2) se obtiene: $\rho(\beta_1) = 1 - 4\mu_1 \sin^2 \frac{\beta_1}{2} - \lambda_1 \sin(\beta)$, y usando el resultado obtenido en la desigualdad (5.68), obtenemos

$$|1 - 4\mu_1 \sin^2 \frac{\beta_1}{2}| + |\lambda_1 \sin \beta_1| \leq 1. \quad (6.6)$$

La ecuación de Transporte (6.5) para el caso **1D** con $h_x = 0,2$, $h_t = 0,1$, permite hacer una comparación del esquema central con los resultados obtenidos por Fletcher [7] cuya condición de frontera es $\phi(-2, t) = 1$ y $\phi(-2, t) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$ y condición inicial

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } -2 \leq x \leq 0, \\ 0 & \text{si } 0 < x \leq 2, \end{cases} \quad (6.7)$$

bajo estas condiciones, una solución exacta por la técnica de separación de variables es

$$\vartheta(x, t) = 0,5 \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \sin \frac{(2k-1)\pi}{L_1} (x-ut) \frac{e^{-\alpha \left[\frac{(2k-1)\pi}{L_1} \right]^2 t}}{2k-1}, \quad (6.8)$$

siendo ϑ la solución exacta [7] de la ecuación (6.5) mostrado en el Cuadro 6.4 y 6.5 y representa los cambios de temperatura en los tiempos 0s, 0.5s hasta un tiempo máximo de 1s.

Considerando, $h_t = 0,05$, $h_x = 0,2$ y las condiciones $\nu_1 = 0,5$, $\lambda_1 = 0,125$, $\alpha_1 = 0,1$, $\mu_1 = 0,125$ con $n=m=20$ y un número de Raynolds ($Re = \nu_1 \frac{h_x}{\alpha_1}$) $Re = 1$, así obtenemos mayor precisión en la aproximación de la solución exacta [7] lo que implica una disminución del ℓ_2 -error denotado como $\|e\|_{\ell^2}$, tal que

$$\|e\|_{\ell^2} = \frac{\sum_{i, t=0}^{m_x, m_t} \phi(i, t) - \vartheta(i, t)}{m_x - 1}, \quad (6.9)$$

calculado en un tiempo máximo de 1 segundo, ver Figura 6.3, y el Cuadro 6.6.

x										Esquema Central	
-2.0	-1.8	-1.6	-1.4	-1.2	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0.0	0s
1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1s
1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.99972	0.99858	0.99421	0.98070	0.94678	0.87713	1s-Fletcher[7]
1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.994	0.981	0.947	0.877	ϑ

Cuadro 6.4: Cambios de temperatura.

x										Esquema Central
0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	0s
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1s
0.75979	0.59759	0.41415	0.24546	0.12064	0.04747	0.01429	0.00308	0.00042	0.00	1s-Fletcher[7]
0.760	0.598	0.414	0.245	0.121	0.047	0.014	0.003	0.000	0.00	ϑ

Cuadro 6.5: Cambios de temperatura.

$m_x \times m_t$	μ_1	t_{max}	x	ϕ	ϑ	$\ e\ _2$	$\rho(\theta)$
10 × 10	0.25	1s	-0.2	0.94678205	1.0	0.00603304	0.62986082
20 × 20	0.125	1s	-0.2	0.94622105	1.0	0.00285694	0.81493044

Cuadro 6.6: Temperatura en un tiempo máximo de 1 segundo

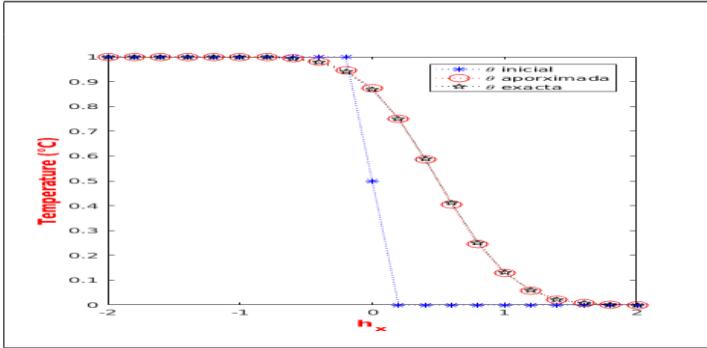


Figura 6.3: Cambios de temperatura para $h_t = 0,05$

6.3. Aplicación 3

Cuando $k = 0$ y $\alpha_l = \nu_n = 0$, $l = 3$; $n = 1, 3$ la ecuación (2.41) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}^{t+1} = \phi_{i,j}^t + \frac{h_t \alpha_1}{(h_x)^2} (\phi_{i+1,j}^t - 2\phi_{i,j}^t + \phi_{i-1,j}^t) + \\ \frac{h_t \alpha_2}{(h_y)^2} (\phi_{i,j+1}^t - 2\phi_{i,j}^t + \phi_{i,j-1}^t). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Para el caso 2D, de la ecuación (5.49) y la desigualdad (6.2) se obtiene: $-1 \leq \rho(\beta_1, \beta_2) = 1 - 4\mu_1 \sin^2 \frac{\beta_1}{2} - 4\mu_2 \sin^2 \frac{\beta_2}{2}$, mayorando obtenemos $0 \leq$

$\mu_1 + \mu_2 \leq \frac{1}{2}$ por lo tanto:

$$0 \leq \frac{h_t \alpha_1}{h_x^2} + \frac{h_t \alpha_2}{h_y^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Considerando la ecuación (6.10) con $h_x = h_y = h_t = 0,1$ y $\mu_1 = \mu_2 = 0,25$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,025$ permite hacer una comparación del esquema de diferencia central con los resultados obtenidos por Gary [20] con respecto a la solución exacta determinada por separación de variables y se escribe como $\vartheta(x, y, t) = e^{-2\alpha_1 \pi^2 t} \sin(\pi x) \sin(\pi y)$, con condición inicial $\phi(x, y, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ y condición de frontera $\phi(0, y, t) = \phi(1, y, t) = 0$ y $\phi(x, 0, t) = \phi(x, 1, t) = 0$. Sin embargo, para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,160$, $\mu_1 = \mu_2 = 0,16$ observamos mayor aproximación de la solución exacta ϑ , ver Cuadro 6.7.

El Cuadro 6.3 muestra el correspondiente ℓ_2 - error y el factor de ampli-
 ficación ρ en el tiempo máximo $t = 1$.

											$x=y=1$
0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	Gary [20]
0.0000	0.0128	0.0244	0.0336	0.0395	0.0415	0.0395	0.0336	0.0244	0.0128	0.0000	
0.0000	0.0244	0.0464	0.0639	0.0751	0.0790	0.0751	0.0639	0.0464	0.0244	0.0000	
0.0000	0.0336	0.0639	0.0880	0.1034	0.1087	0.1034	0.0880	0.0639	0.0336	0.0000	
0.0000	0.0395	0.0751	0.1034	0.1216	0.1278	0.1216	0.1034	0.0751	0.0395	0.0000	
0.0000	0.0415	0.0790	0.1087	0.1278	0.1344	0.1278	0.1087	0.0790	0.0415	0.0000	
0.0000	0.0395	0.0751	0.1034	0.1216	0.1278	0.1216	0.1034	0.0751	0.0395	0.0000	
0.0000	0.0336	0.0639	0.0880	0.1034	0.1087	0.1034	0.0880	0.0639	0.0336	0.0000	
0.0000	0.0244	0.0464	0.0639	0.0751	0.0790	0.0751	0.0639	0.0464	0.0244	0.0000	
0.0000	0.0128	0.0244	0.0336	0.0395	0.0415	0.0395	0.0336	0.0244	0.0128	0.0000	
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
<hr/>											
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	Presente
0.0000	0.0128	0.0244	0.0336	0.0395	0.0415	0.0395	0.0336	0.0244	0.0128	0.0000	trabajo
0.0000	0.0244	0.0464	0.0639	0.0751	0.0790	0.0751	0.0639	0.0464	0.0244	0.0000	$\alpha_1 = 0,025$
0.0000	0.0336	0.0639	0.0880	0.1034	0.1087	0.1034	0.0880	0.0639	0.0336	0.0000	$\alpha_2 = 0,01$
0.0000	0.0395	0.0751	0.1034	0.1216	0.1278	0.1216	0.1034	0.0751	0.0395	0.0000	
0.0000	0.0415	0.0790	0.1087	0.1278	0.1344	0.1278	0.1087	0.0790	0.0415	0.0000	
0.0000	0.0395	0.0751	0.1034	0.1216	0.1278	0.1216	0.1034	0.0751	0.0395	0.0000	
0.0000	0.0336	0.0639	0.0880	0.1034	0.1087	0.1034	0.0880	0.0639	0.0336	0.0000	
0.0000	0.0244	0.0464	0.0639	0.0751	0.0790	0.0751	0.0639	0.0464	0.0244	0.0000	
0.0000	0.0128	0.0244	0.0336	0.0395	0.0415	0.0395	0.0336	0.0244	0.0128	0.0000	
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
<hr/>											
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	Presente
0.0000	0.0132	0.0252	0.0346	0.0407	0.0428	0.0407	0.0346	0.0252	0.0132	0.0000	trabajo
0.0000	0.0252	0.0479	0.0659	0.0775	0.0814	0.0775	0.0659	0.0479	0.0252	0.0000	$\alpha_1 = 0,160$
0.0000	0.0346	0.0659	0.0907	0.1066	0.1121	0.1066	0.0907	0.0659	0.0346	0.0000	$\alpha_2 = 0,160$
0.0000	0.0407	0.0775	0.1066	0.1253	0.1318	0.1253	0.1066	0.0775	0.0407	0.0000	
0.0000	0.0428	0.0814	0.1121	0.1318	0.1386	0.1318	0.1121	0.0814	0.0428	0.0000	
0.0000	0.0407	0.0775	0.1066	0.1253	0.1318	0.1253	0.1066	0.0775	0.0407	0.0000	
0.0000	0.0346	0.0659	0.0907	0.1066	0.1121	0.1066	0.0907	0.0659	0.0346	0.0000	
0.0000	0.0252	0.0479	0.0659	0.0775	0.0814	0.0775	0.0659	0.0479	0.0252	0.0000	
0.0000	0.0132	0.0252	0.0346	0.0407	0.0428	0.0407	0.0346	0.0252	0.0132	0.0000	
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	
<hr/>											
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	solución
0.0000	0.0133	0.0252	0.0347	0.0408	0.0429	0.0408	0.0347	0.0252	0.0133	-0.0000	exacta
0.0000	0.0252	0.0480	0.0661	0.0777	0.0816	0.0777	0.0661	0.0480	0.0252	-0.0000	
0.0000	0.0347	0.0661	0.0909	0.1069	0.1124	0.1069	0.0909	0.0661	0.0347	-0.0000	
0.0000	0.0408	0.0777	0.1069	0.1256	0.1321	0.1256	0.1069	0.0777	0.0408	-0.0000	
0.0000	0.0429	0.0816	0.1124	0.1321	0.1389	0.1321	0.1124	0.0816	0.0429	-0.0000	
0.0000	0.0408	0.0777	0.1069	0.1256	0.1321	0.1256	0.1069	0.0777	0.0408	-0.0000	
0.0000	0.0347	0.0661	0.0909	0.1069	0.1124	0.1069	0.0909	0.0661	0.0347	-0.0000	
0.0000	0.0252	0.0480	0.0661	0.0777	0.0816	0.0777	0.0661	0.0480	0.0252	-0.0000	
0.0000	0.0133	0.0252	0.0347	0.0408	0.0429	0.0408	0.0347	0.0252	0.0133	-0.0000	
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	

Cuadro 6.7: Cambios de temperatura.

6.4. Aplicación 4

Sea la solución exacta de la ecuación (2.37) cuando $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ y $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$.

$$\vartheta(x, y, z, t) = e^{-3\alpha\pi^2 t} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z) \quad (6.11)$$

Donde la ecuación (6.12) es la condición inicial y la ecuación (6.13) es la condición de frontera.

$$\phi(x, y, z, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z). \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \phi(0, y, z, t) &= \phi(1, y, z, t) = \phi(x, 0, z, t) = 0, \\ \phi(x, 1, z, t) &= \phi(x, y, 0, t) = \phi(x, y, 1, t) = 0. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Usando el método de diferencias finitas considerando $v_j = 0$, $j = \overline{1, 3}$; $\alpha_i = 0,333333 = \alpha$, $i = 1, 2, 3$. En la ecuación (2.37) con $h_x = h_y = h_z = h_t = h = 0,1$ y $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$, permite hacer una comparación del **esquema de diferencia central** con los resultados obtenidos por Ortigoza [4], sujeto la condición inicial (6.12) y condición de frontera tipo Dirichlet (6.13).

Para la visualización se usaron cortes con tres planos en las líneas $x = 0,2$, $x = 0,5$ y $x = 0,8$; conforme el tiempo avanza el cubo se enfría. Los resultados obtenidos por Ortigoza presentan inestabilidad a partir del tiempo $t = 0,15$ pues el valor $\alpha_i = 0,333333$, $i = 1, 2, 3$ esta fuera del dominio establecido por el resultado de la desigualdad (6.14) del presente trabajo, ver Figura(6.4) caso (d).

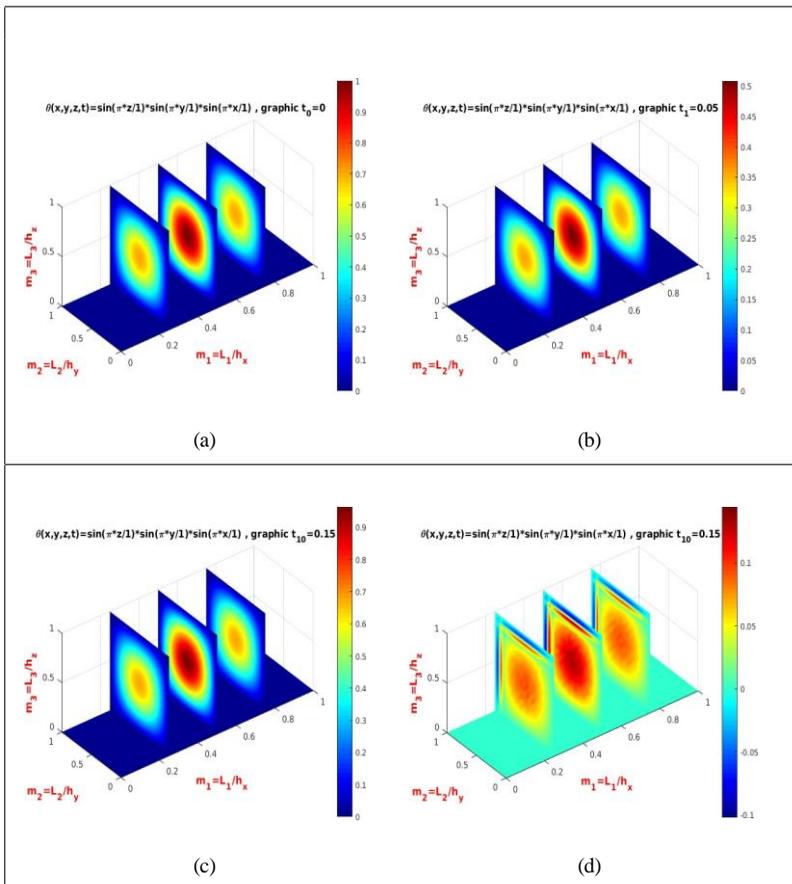


Figura 6.4: La temperatura (a),(b),(c) estable y (d) inestable.

Para el caso 3D, de la ecuación (5.49) y la desigualdad (6.2) se obtiene:

$$-1 \leq \rho(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 1 - 4\mu_1 \sin^2 \frac{\beta_1}{2} - 4\mu_2 \sin^2 \frac{\beta_2}{2} - 4\mu_3 \sin^2 \frac{\beta_3}{2}$$

mayorando se obtiene $0 \leq \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \leq \frac{1}{2}$ por lo tanto:

$$0 \leq \frac{h_t \alpha_1}{h_x^2} + \frac{h_t \alpha_2}{h_y^2} + \frac{h_t \alpha_3}{h_z^2} \leq \frac{1}{2} \quad (6.14)$$

Sin embargo, de la ecuación (6.14); cuando $h_x = h_y = h_z = h_t = h$, $\nu_j = 0$, $j = \overline{1, 3}$ con $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$ y $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ obtenemos $\alpha_i \leq \frac{1}{6}$; $i = \overline{1, 3}$ permitiendo hacer una comparación del **esquema de dife-**

rencia central para la ecuación (6.11), condición inicial (6.12) y condición de frontera tipo Dirichlet (6.13) usados por Ortigoza [4], cuyo resultado presenta estabilidad, ver Figura(6.4) casos (a), (b) y (c).

Además, en la Figura (6.5) para $h = 0,05$, $\alpha = 0,00014$ y $\mu = 0,165$ en la ecuación (2.41) muestra la temperatura en el tiempo $t_{20} = 1$ y para la visualización se usaron cortes con tres planos en las líneas $x = 0,2, 0,5$ y $0,8$. Observamos que conforme el tiempo avanza el cubo se enfría sin perder la estabilidad.

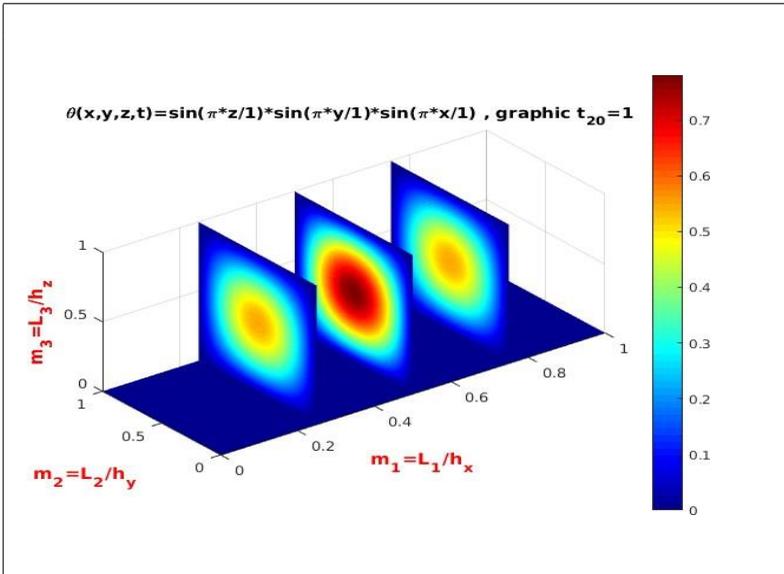


Figura 6.5: Temperatura estable en tiempo $t_{20} = 1$.

Por otra parte, modificando determinados parámetros en las ecuaciones, pueden ajustarse las animaciones para una mejor representación de un fenómeno físico, obteniendo de esta manera modelos matemáticos que describan con mayor exactitud un fenómeno. Se recomienda trabajar como un sistema las representaciones matemáticas que nos permiten modelar fenómenos atmosféricos, que provienen de algunas leyes de conservación, como la de masa, calor, movimiento, agua y aerosoles.

Capítulo VII

Problemas no lineales: Ecuación de Burgers

La mayoría de problemas en aplicaciones son *NO LINEALES*, por lo que nos sumergiremos en este estudio, presentando el análisis de un problema no lineal en una dimensión, basado en la ecuación de Burgers' (Burgers 1948):

7.1. Ecuación de Burgers

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}, \quad (7.1)$$

con $x \in \mathbb{R}$, $\bar{\vartheta}$ es el término convectivo (velocidad), ν es la constante de viscosidad cinemática (Fletcher 1983a, y Whitman 1974) y ϑ es una función escalar que representa particularmente la temperatura. En general la ecuación (7.1) siempre se cumple para $\nu \ll 1$, esto hace que dicha ecuación se denomine **ecuación disipativa** y para $\nu = 0$ se denomine ecuación de Burgers:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0, \quad (7.2)$$

una forma equivalente, es

$$\bar{\vartheta}_t + \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \bar{\vartheta}^2 \right) = 0 \simeq \bar{\vartheta}_t + \frac{1}{2} (\bar{\vartheta}^2)_x = 0, \quad (7.3)$$

otra forma alternativa, es

$$\bar{\vartheta}_t + \bar{F}_x = 0; \quad \bar{F} = \frac{1}{2} \bar{\vartheta}^2, \quad (7.4)$$

los efectos que puedan generar estos cambios alternativos en la evolución de la onda pueden ser un problema (Hamming 1973), sin embargo, podemos anticipar los gradientes de choque.

Una representación en diferencia finita de la ecuación (7.1) es el **esquema explícito FTCS**

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{h_t} = -\phi_i^n \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2h_x} + v \frac{(\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n)}{h_x^2}, \quad (7.5)$$

el término convectivo no lineal ϕ_i^n , es la solución en el punto (i, n) , siendo este directamente calculado así como en el esquema de Du Fort-Frankel para la ecuación de transporte lineal. En la aplicación del análisis de estabilidad de Von Neumann el término convectivo ϕ_i^n es temporalmente congelado, debido a que el AVN es solo para EDPs lineales, entonces una representación de (7.1) equivalente a la ecuación (7.5) se puede reescribir como

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{h_t} = -\frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2h_x} + v \frac{(\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n)}{h_x^2}, \quad (7.6)$$

Presentaremos la visualización gráfica del problema de valor inicial para la ecuación de Advección - Difusión, llamada también ecuación lineal de Burgers de modo que pueda observar el nivel de sensibilidad del término advectivo $u(x, t)$ y el término de viscosidad $v > 0$ con condición inicial en el tiempo $t = 1$

$$\vartheta(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{si } x \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{cases} \quad (7.7)$$

la solución del problema usando el wolfram mathematica 12, es:

```
1 BurgersEqn=D[u[x, t], t]+ u[x, t]D[u[x, t], x] ==\[Nu] D[u[x, t], {x
, 2}]
2 sol=DSolve[{BurgersEqn, u[x, 0]==UnitBox[x]}, u[x, t], {x, t}];(dsol=
u[x, t]/. sol[[1]]// FullSimplify) // TraditionalForm
```

Considerando los cambios de variable siguientes

$$\xi = e^{\frac{x}{2v}} \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{1-2x}{\sqrt{vt}}\right)}{4\sqrt{vt}} + \frac{e^{\frac{1}{2v}} (\operatorname{erfc}(2x+1))}{4\sqrt{vt}},$$

$$\zeta = e^{-\frac{t+1}{4v}} \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{2t-2x-1}{\sqrt{vt}}\right)}{4\sqrt{vt}} - \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{2t-2x+1}{\sqrt{vt}}\right)}{4\sqrt{vt}},$$

podemos obtener la solución

$$u(x, t) = \frac{e^{\frac{t+1}{4\nu}} \frac{\operatorname{erf}(2t\sqrt{\frac{2x+1}{4\nu t}}) - \operatorname{erf}(2t\sqrt{\frac{2x-1}{4\nu t}})}{\xi + \zeta}}{\xi + \zeta}$$

Ahora presentamos el código en Wolfram Mathematica el cual genera la gráfica de la ecuación de Burgers en diferentes tiempos para una viscosidad $\nu = 1/10$.

```
1 Plot[Table[dsol /. {\[Nu]-> 1/10}, {t, 1/100, 7}]]// Evaluate, {x, -2, 3.3}, PlotRange -> All, Filling -> Axis, WorkingPrecision -> 20]
```

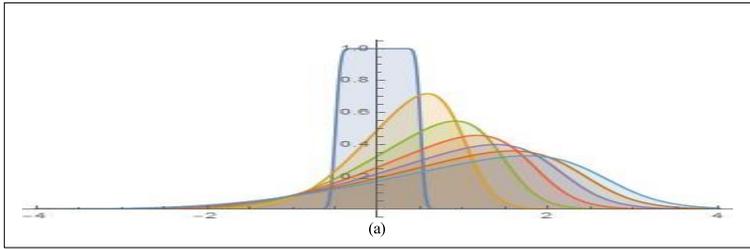


Figura 7.1: Gráfica de la ecuación de Burgers en diferentes tiempos para una viscosidad $\nu = 1/10$.

Ahora presentamos el código en Wolfram Mathematica el cual genera la gráfica de la ecuación de Burgers en diferentes tiempos para una viscosidad $\nu = 1/40$.

```
1 Plot[Table[dsol /. {\[Nu]-> 1/40}, {t, 1/100, 7}]]// Evaluate, {x, -2, 3.3}, PlotRange -> All, Filling -> Axis, WorkingPrecision -> 20]
```

Ahora presentamos el código en Wolfram Mathematica el cual genera la gráfica de la ecuación de Burgers en diferentes tiempos para una viscosidad $\nu = 1/300$.

```
1 Plot[Table[dsol /. {\[Nu]-> 1/300}, {t, 1/100, 7}]]// Evaluate, {x, -2, 3.3}, PlotRange -> All, Filling -> Axis, WorkingPrecision -> 20]
```

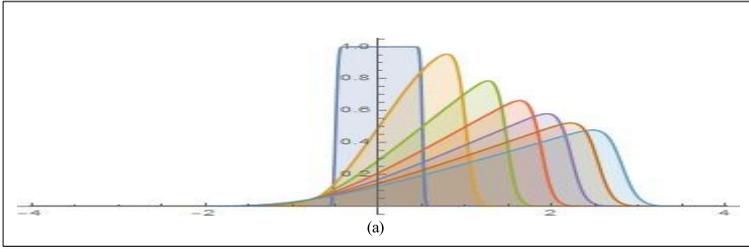


Figura 7.2: Gráfica de la ecuación de Burgers en diferentes tiempos para una viscosidad $\nu = 1/40$.

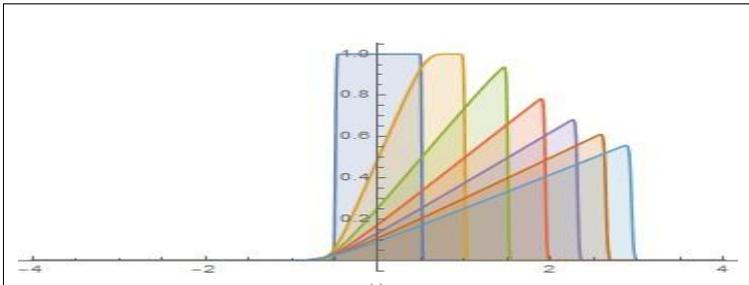


Figura 7.3: Gráfica de la ecuación de Burgers en diferentes tiempos para una viscosidad $\nu = 1/300$.

7.2. Discretización Upwind de cuatro puntos

Un tratamiento potencialmente más preciso del término convectivo no lineal, esta desarrollado por una *discretización Upwind de cuatro puntos* [7]. La derivada espacial y temporal de ϑ en el punto (i, j) , son expresadas en términos de ϑ en puntos cercanos y las denominamos para todo $i \in \mathbb{Z}$, la **expansión en serie de Taylor**

$$\vartheta_{i+1}^n = \sum_{m=0}^{\infty} h^m \frac{x}{m!} \frac{\partial^m \vartheta}{\partial x^m} \Big|_i^n, \quad (7.8)$$

$$\vartheta_i^{n+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h_t^m}{m!} \frac{\partial^m \vartheta}{\partial t^m} \Big|_i^n \quad (7.9)$$

respectivamente, donde $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}_i^n$ expresado en forma general, se escribe como

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x}_i^n = a\vartheta_{i-1}^n + b\vartheta_i^n + c\vartheta_{i+1}^n + o(h_x^m), \quad (7.10)$$

donde a, b y c son determinados y el término $o(h_x^m)$ indica la exactitud de la aproximación resultante.

Particularmente, podemos utilizar la ecuación (7.10) como una aproximación para $\phi_i^n > 0$ y es de la forma

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x}_i^n \approx a\phi_{i-2}^n + b\phi_{i-1}^n + c\phi_i^n + \phi_{i+1}^n, \quad (7.11)$$

esta aproximación para el esquema Upwind, permite encontrar la fórmula de cuatro puntos para $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}_i^n$, usando la aproximación (7.11) y la expansión en serie de Taylor (7.8) tenemos

$$\begin{aligned} a\phi_{i-2}^n + b\phi_{i-1}^n + c\phi_i^n + \phi_{i+1}^n &= (a + b + c + 1)\phi_i^n + \\ & [a(-2h_x) + b(-h_x) + h_x] \frac{\partial \phi}{\partial x}_i^n + \\ & \frac{1}{2!} a(-2h_x)^2 + b(-h_x)^2 + h_x^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}_i^n + \\ & \frac{1}{3!} a(-2h_x)^3 + b(-h_x)^3 + h_x^3 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}_i^n + \\ & \frac{1}{4!} a(-2h_x)^4 + b(-h_x)^4 + h_x^4 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}_i^n + \dots, \end{aligned} \quad (7.12)$$

haciendo convenientemente $a + b + c + 1 = 0$, $-2a - b + 1 = 1$, $4a + b + 1 = 0$, obtenemos los valores de $a = \frac{-1}{2}$, $b = 1$ y $c = \frac{-3}{2}$; ordenando y reemplazando en la ecuación (7.12) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} + q \frac{\phi_{i-2}^n - 3\phi_{i-1}^n - 3\phi_{i+1}^n + \phi_i^n}{3h_x} &= \frac{\partial \phi}{\partial x}_i^n + \\ & \frac{2}{3} h_x^2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}_i^n + \frac{1}{4} h_x^3 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}_i^n + \dots, \end{aligned} \quad (7.13)$$

esta discretización se usará para determinar $\frac{\partial F}{\partial x}$ el cual ha sido reemplazado por $\frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2h_x}$ en la ecuación (7.6) y ahora lo denotaremos como $L_x^4 F_x$, es decir

$$L_x^4 \bar{F} \approx \frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2h_x} + q \frac{F_{i-2}^n - 3F_{i-1}^n - 3F_{i+1}^n + 3F_i^n}{3h_x}, \quad (7.14)$$

el cual es una aproximación de orden $o(h_x^2)$ respecto de la ecuación (7.13) y el parámetro $q = \frac{-2}{3}$ controla el tamaño de la modificación realizada en la ecuación (7.13) y (7.14).

Análogamente, podemos utilizar la ecuación (7.10) como una aproximación para $\phi^n < 0$ y es de la forma

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}_i^n \approx a\phi_{i-1}^n + b\phi_i^n + c\phi_{i+1}^n + \phi_{i+2}^n, \quad (7.15)$$

esta aproximación para el esquema Upwind, permite encontrar la fórmula de cuatro puntos para $\frac{\partial \phi}{\partial x}_i^n$, usando la aproximación (7.15) y la expansión en serie de Taylor (7.8) tenemos

$$\begin{aligned} a\phi_{i-1}^n + b\phi_i^n + c\phi_{i+1}^n + \phi_{i+2}^n &= (a + b + c + 1)\phi_i^n + \\ & \quad [a(-h_x) + c(h_x) + 2h_x] \frac{\partial \phi}{\partial x}_i^n + \\ & \quad \frac{1}{2!} [a(-h_x)^2 + c(h_x)^2 + (2h_x)^2] \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}_i^n + \\ & \quad \frac{1}{3!} [a(-h_x)^3 + c(-h_x)^3 + (2h_x)^3] \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}_i^n + \\ & \quad \frac{1}{4!} [a(-h_x)^4 + c(h_x)^4 + (2h_x)^4] \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}_i^n + \dots, \end{aligned} \quad (7.16)$$

haciendo convenientemente $a + b + c + 1 = 0$, $-a + c + 2 = 1$, $a + c + 4 = 0$, obtenemos los valores de $a = \frac{-3}{2}$, $b = 3$ y $c = \frac{-5}{2}$; ordenando y reemplazando en la ecuación (7.16) obtenemos

$$\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h_x} + q^* \frac{\phi_{i-1}^n - 3\phi_i^n + 3\phi_{i+1}^n - \phi_{i+2}^n}{3h_x} = \frac{\partial \phi}{\partial x}_i^n + 2h_x^2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}_i^n + \frac{1}{2} h_x^3 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}_i^n + \dots, \quad (7.17)$$

esta discretización se usara para determinar $\frac{\partial F}{\partial x}$ el cual ha sido reemplazado por $\frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2h_x}$ en la ecuación (7.6) y ahora lo denotaremos como $L_x^4 F_x$, es decir

$$L_x^4 \bar{F} \approx \frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2h_x} + q^* \frac{F_{i-1}^n - 3F_i^n + 3F_{i+1}^n - F_{i+2}^n}{3h_x}, \quad (7.18)$$

el cual es una aproximación de orden $o(h_x^2)$ respecto de la ecuación (7.17) y el parámetro $q^* = -3$ controla el tamaño de la modificación hecha en la ecuación (7.17) y (7.18).

Finalmente, el término advectivo no lineal, usando el esquema upwind para cuatro puntos, es

$$L_x^4 \bar{F} \approx \begin{cases} \frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2h_x} + q^* \frac{F_{i-1}^n - 3F_i^n + 3F_{i+1}^n - F_{i+2}^n}{3h_x}, & \text{si } \bar{\vartheta} \leq 0, \\ \frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2h_x} + q \frac{F_{i-2}^n - 3F_{i-1}^n + 3F_i^n - F_{i+1}^n}{3h_x}, & \text{si } \bar{\vartheta} > 0. \end{cases} \quad (7.19)$$

7.3. Esquemas para la ecuación de transporte no lineal

Ordenando los términos de la ecuación (7.4) tenemos

$$\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial t} = - \frac{\partial F}{\partial x},$$

donde $\bar{F} = 0,5\bar{\vartheta}^2$ y derivando con respecto a t, tenemos respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial \bar{F}}{\partial x}, \quad (7.20)$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = \bar{\vartheta} \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial t} = -A \frac{\partial \bar{F}}{\partial x}, \quad (7.21)$$

donde $A = \bar{\vartheta}$; usando los resultados de las ecuaciones (7.20) y (7.21), la ecuación (7.4), la cual es un forma alternativa de la ecuación de Burgers la cual estudiaremos desde el enfoque del esquema de Lax-Wendroff; para tales efectos expresaremos el cambio temporal de $\bar{\vartheta}$ en una expansión de serie de Taylor de orden $o(h_t^2)$ como

$$\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial t} \approx \frac{\bar{\vartheta}_i^{n+1} - \bar{\vartheta}_i^n}{h_t} - \frac{1}{2} h_t \frac{\partial^2 \bar{\vartheta}}{\partial t^2} = \frac{\bar{\vartheta}_i^{n+1} - \bar{\vartheta}_i^n}{h_t} - \frac{1}{2} h_t \frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial \bar{F}}{\partial x},$$

de esta ecuación (7.22), la podemos reescribir como

$$\bar{\vartheta}_i^{n+1} = \bar{\vartheta}_i^n - 0,5 \left(\frac{h_t}{h_x} \right)^2 A_{i+0,5} F_{i+1}^n - (A_{i+0,5} + A_{i-0,5}) F_i^n + 0,5 \left(\frac{h_t}{h_x} \right)^2 A_{i-0,5} F_{i-1}^n, \quad (7.22)$$

donde $A_{i+0,5} = \bar{\vartheta}_{i+0,5} = 0,5(\bar{\vartheta}_i + \bar{\vartheta}_{i+1})$, $A_{i-0,5} = \bar{\vartheta}_{i-0,5} = 0,5(\bar{\vartheta}_i + \bar{\vartheta}_{i-1})$ y $A_{i+0,5} + A_{i-0,5} = 2A_i$. Finalmente, usando la ecuación (7.22); la ecuación (7.4), se puede representar convenientemente con error de truncamiento de orden $o(h_x^2, h_t^2)$ y se escribe como

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}_i^{n+1} = & \bar{\vartheta}_i^n - 0,5 \frac{h_t}{h_x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) + \\ & 0,5 \left(\frac{h_t}{h_x} \right)^2 A_{i+0,5} (F_{i+1}^n - F_i^n) + \\ & + 0,5 \left(\frac{h_t}{h_x} \right)^2 A_{i-0,5} (F_i^n - F_{i-1}^n), \end{aligned} \quad (7.23)$$

Una formulación implícita de la ecuación de transporte dada en (7.1), usando el esquema de Crank- Nicolson es

$$\frac{\bar{\vartheta}_i^{n+1}}{h_t} = -0,5 L_x (F_i^n - F_i^{n+1}) + 0,5 v L_{xx} (\bar{\vartheta}_i^n - \bar{\vartheta}_i^{n+1}), \quad (7.24)$$

donde $\blacktriangle \vartheta_i^{n+1} = \vartheta_i^{n+1} - \vartheta_i^n$ y los operadores usados para efectos de cálculo y eficiencia computacional son $L_x = (-1, 0, 1)/2h_x$ y $L_{xx} = (1, -2, 1)/h_x^2$, en efecto tendríamos

$$L_x F_i = \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2h_x}, \quad L_{xx} F_i = \frac{F_{i+1} - 2F_i + F_{i-1}}{h_x^2} \quad (7.25)$$

la finalidad de usar estos operadores, es reducir la ecuación (7.24) en un sistema de ecuaciones lineales tridiagonales y así poder usar el eficiente **algoritmo de Thomas**, sin embargo el término implícito no lineal F_i^{n+1} representa un problema que lo resolveremos usando la expansión en serie de Taylor y en el n-ésimo nivel se escribe como

$$F_i^{n+1} = F_i^n + h_t \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_i^n + 0,5h_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \Big|_i^n + \dots, \quad (7.26)$$

y en una representación equivalente es

$$F_i^{n+1} = F_i^n + A \blacktriangle \vartheta_i^{n+1} + o(h_t^2), \quad (7.27)$$

donde $A = \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \Big|_i^n = \vartheta_i^n$. Reemplazando la ecuación (7.27) en la ecuación (7.24)

$$\begin{aligned} \frac{\blacktriangle \vartheta_i^{n+1}}{h_t} &= -0,5L_x(2F_i^n - \vartheta_i^n \blacktriangle \vartheta_i^{n+1}) + 0,5vL_{xx}(\vartheta_i^n - \vartheta_i^{n+1}) \\ \vartheta_i^{n+1} &= \vartheta_i^n - h_t L_x F_i^n + 0,5h_t L_x \vartheta_i^n \vartheta_i^{n+1} + 0,5h_t L_x (\vartheta_i^n)^2 + \\ &\quad 0,5h_t v L_{xx} (\vartheta_i^n - \vartheta_i^{n+1}), \end{aligned} \quad (7.28)$$

y considerando el cambio de variable dado en la ecuación (7.4) el cual implica que: $L_x F_i^n = 0,5L_x(\vartheta_i^n)^2 = L_x(0,5\vartheta_i^n)^2$ obtenemos una forma equivalente

$$\vartheta_i^{n+1} + 0,5h_t L_x(\vartheta_i^n \vartheta_i^{n+1}) - vL_{xx} \vartheta_i^{n+1} = \vartheta_i^n + 0,5vh_t L_{xx} \vartheta_i^n, \quad (7.29)$$

y usando los operadores (7.25) tenemos

$$\begin{aligned} \vartheta_i^{n+1} + 0,5h_t \frac{\vartheta_{i+1}^n \vartheta_{i+1}^{n+1} - \vartheta_{i-1}^n \vartheta_{i-1}^{n+1}}{2h_x} \\ - 0,5h_t v \frac{\vartheta_{i-1}^{n+1} - 2\vartheta_i^{n+1} + \vartheta_{i+1}^{n+1}}{h_x^2} &= \\ \vartheta_i^n + 0,5vh_t \frac{\vartheta_{i-1}^n - 2\vartheta_i^n + \vartheta_{i+1}^n}{h_x^2}, \end{aligned} \quad (7.30)$$

ordenando y haciendo $s = v \frac{h_t}{h_x^2}$ reemplazamos en la ecuación (7.30) obteniendo

$$\begin{aligned} -0,25 \frac{h_t}{h_x} \vartheta_{i-1}^n - 0,5s \vartheta_{i-1}^{n+1} + (1+s)\vartheta_i^{n+1} + \\ -0,25 \frac{h_t}{h_x} \vartheta_i^n - 0,5s \vartheta_{i+1}^{n+1} = (1-s)\vartheta_i^n + \\ 0,5s \vartheta_{i-1}^n + \vartheta_{i+1}^n, \end{aligned} \quad (7.31)$$

finalmente, en una representación tridiagonal se escribe como

$$a_i^n \vartheta_{i-1}^{n+1} + b_i^n \vartheta_i^{n+1} + c_{i+1}^n \vartheta_{i+1}^{n+1} = d_i^n, \quad (7.32)$$

donde

$$\begin{aligned} a_i^n &= -0,25 \frac{h_t}{h_x} \vartheta_{i-1}^n - 0,5s, \\ b_i^n &= 1+s, \\ c_i^n &= -0,25 \frac{h_t}{h_x} \vartheta_i^n - 0,5s, \\ d_i^n &= (1-s)\vartheta_i^n + 0,5s \vartheta_{i-1}^n + \vartheta_{i+1}^n, \end{aligned}$$

ahora representando la parte convectiva no lineal L_x , usando el esquema upwind de cuatro puntos, es decir, L_x^4 e introduciendo el operador $M_x = \frac{\Delta \vartheta}{h_t}$, obtenemos el esquema de **Crank-Nicolson Generalizado** y se escribe como

$$\begin{aligned} M_x \frac{\Delta \vartheta^{n+1}}{h_t} &= -0,5L_x^4(F_i^n - F_i^{n+1}) + 0,5vL_{xx}(\vartheta_i^n - \vartheta_i^{n+1}) \\ M_x \frac{\Delta \vartheta^{n+1}}{h_t} &= -0,5L_x^4(2F_i^n - \vartheta_i^n \Delta \vartheta_i^n) + \\ & 0,5vL_{xx}(\vartheta_i^n - \vartheta_i^{n+1}) \end{aligned} \quad (7.33)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_t} \delta \vartheta_{j-1}^{n+1} + (1 - 2\delta) \vartheta_j^{n+1} + \delta \vartheta_j^{n+1} - \\
& \frac{1}{h_t} \delta \vartheta_{i-1}^n + (1 - 2\delta) \vartheta_i^n + \delta \vartheta_i^n = \\
& -0,25 \frac{h_t}{h_x} \vartheta_{j+1}^n \vartheta_{j+1}^{n+1} - \vartheta_{j-1}^n \vartheta_{j-1}^{n+1} + \\
& -0,5 \frac{qh_t}{3h_x} \vartheta_{j-2}^n \vartheta_{j-2}^{n+1} - 3 \vartheta_{j-1}^n \vartheta_{j-1}^{n+1} + 3 \vartheta_j^n \vartheta_j^{n+1} - \vartheta_{j+1}^n \vartheta_{j+1}^{n+1} + \\
& 0,5 \frac{vh_t}{h_x^2} (\vartheta_{j-1}^n - 2\vartheta_j^n + \vartheta_{j+1}^n) + 0,5 \frac{vh_t}{h_x^2} (\vartheta_{j-1}^{n+1} - 2\vartheta_j^{n+1} + \vartheta_{j+1}^{n+1}), \quad (7.34)
\end{aligned}$$

ordenando convenientemente con $\vartheta > 0$, obtenemos una representación cudri-diagonal para usar el algoritmo de Thomas y se escribe como

$$e_i^n \vartheta_{i-2}^{n+1} + a_i^n \vartheta_{i-1}^{n+1} + b_i^n \vartheta_i^{n+1} + c_i^n \vartheta_{i+1}^{n+1} = d_i^n, \quad (7.35)$$

donde

$$\begin{aligned}
e_i^n &= \frac{1}{6} q \frac{h_t}{h_x} \vartheta_{i-2}^n, \\
a_i^n &= \delta - 0,25 \frac{h_t}{h_x} \vartheta_{i-1}^n - 0,5q \frac{h_t}{h_x} \vartheta_{i-1}^n - 0,5s, \\
b_i^n &= 1 - 2\delta + 0,5q \frac{h_t}{h_x} \vartheta_i^n + s, \\
c_i^n &= \delta + 0,25 \frac{h_t}{h_x} \vartheta_{i+1}^n - \frac{1}{6} q \frac{h_t}{h_x} \vartheta_{i+1}^n - 0,5s, \\
d_i^n &= (\delta + 0,5s) \vartheta_{i-1}^n + (1 - 2\delta - s) \vartheta_i^n + (\delta + 0,5s) \vartheta_{i+1}^n.
\end{aligned}$$

Capítulo VIII

Apéndice

8.1. Código del método de Upwind

```
1 %metodo de Upwind
2 clear
3 n=500;
4 hx=0.05; ht=0.8*hx;
5 a=1; %a>0
6 landa=a*ht/hx; %Numero de Courant
7
8 i=1;
9 while i<=n
10 x(i)=(i-1)*hx;
11 if x(i)>=0 & x(i)<=25
12     u(i,:)=exp(-20*(x(i)-2).^2)+exp(-(x(i)-5).^2); %condicion
13     inicial
14 end
15 for j=1:340 %t=17
16     t(j)=(j-1)*ht;
17     w(i,:)=exp(-20*(x(i)-a*t(j)-2).^2)+exp(-(x(i)-a*t(j)-5).^2);
18 end
19 i=i+1;
20 end
21 for j=1:n
22     t(j)=(j-1)*ht;
23     for i=2:n
24         u(i,j+1)=a*landa*u(i-1,j)+(1-a*landa)*u(i,j);
25         w(i,j+1)=a*landa*w(i-1,j)+(1-a*landa)*w(i,j);
26     end
27 end
28 figure(2)
29 plot(x,u(:,1),'g--p', 'MarkerSize',7)
30 hold on
```

```

31 plot(x,u(:,340),'r-o')
32 hold on
33 plot(x,u(:,500),'k-*'), title('Upwind a>0')
34 hold on
35 plot(x,w(:,1),'b : +')
36
37 legend('n=1,t_n=0','n=340,t_n=17 ','n=500,t_n=25 ','Exacta '
,[210,200.45,0.25,0.5]);
38 xlabel('h_{x}','FontSize',12,'FontWeight','bold','Color','r')
39 ylabel('Temperatura (°C)','FontSize',12,'FontWeight','bold','
Color','r')
40 %Factor de Amplificacion
41 beta =-pi:0.05:pi;
42 figure(3)
43 plot(1-a*landa+a*landa*cos(beta),-a*landa*sin(beta),'k : *'),
title('\rho (\beta)')
44 hold on
45 %circulo unitario
46 plot(cos(beta),sin(beta),'r : o')
47 legend('\rho (\beta)','\beta')
48 whos

```

8.2. Código del método de Lax Friedrichs

```

1 clear
2 %Metodo de Lax Friedrichs
3 n=500;
4 hx=0.05;ht=0.8*hx;
5 landa=ht/hx; %landa=0.8
6 a=1;
7 i=1;
8 while i<=n
9     x(i)=(i-1)*hx;
10    if x(i)>=0 & x(i)<=25
11        u(i,:)=exp(-20*(x(i)-2).^2)+exp(-(x(i)-5).^2); %
condicion inicial
12    end
13
14    for j=1:340 %t=17
15        t(j)=(j-1)*ht;
16        w(i,:)=exp(-20*(x(i)-a*t(j)-2).^2)+exp(-(x(i)-a*t(j)-5)
.^2);
17    end
18    i=i+1;
19 end
20 a=1;
21 for j=1:n
22    t(j)=(j-1)*ht;

```

```

23     for i=2:n-1
24         u(i,j+1)=(-a*landa/2+1/2)*u(i+1,j)+(1/2+landa*a/2)*u(i
-1,j);
25         w(i,j+1)=(-a*landa/2+1/2)*w(i+1,j)+(1/2+landa*a/2)*w(i
-1,j);
26     end
27 end
28 figure(1)
29 plot(x,u(:,1),'g--p','MarkerSize',7)
30 hold on
31 plot(x,u(:,340),'r-o')
32 hold on
33 plot(x,u(:,500),'k-*')
34 hold on
35 plot(x,w(:,1),'b : +')
36
37 legend('n=1,t_n=0','n=340,t_n=17','n=500,t_n=25','Exacta'
,[210,200.45,0.25,0.5]);
38 xlabel('h_{x}','FontSize',12,...
39         'FontWeight','bold','Color','r')
40 ylabel('Temperatura (°C)','FontSize',12,...
41         'FontWeight','bold','Color','r')
42 %factor de amplificacion
43 beta =0:0.05:2*pi;
44 figure(2)
45 plot(cos(beta),-a*landa*sin(beta),'k : *'),title('\rho (\beta)')
46 hold on
47 %circulo unitario
48 plot(cos(beta),sin(beta),'r : o')
49 legend('\rho (\beta)','\beta')
50 whos

```

8.3. Código del método de Lax Wendroff

```

1 clear
2 % metodo de Lax Wendroff
3 n=500;
4 hx=0.05; ht=0.8*hx;
5 landa=ht/hx; %landa=0.8
6 a=1;
7 i=1;
8 while i<=n
9     x(i)=(i-1)*hx;
10    if x(i)>=0 & x(i)<=25
11        u(i,:)=exp(-20*(x(i)-2).^2)+exp(-(x(i)-5).^2); %
condicion inicial
12    end
13

```

```

14 for j=1:340 %t=17
15     t(j)=(j-1)*ht;
16     w(i,:) = exp(-20*(x(i)-a*t(j)-2).^2)+exp(-(x(i)-a*t(j)-5)
    .^2);
17 end
18     i=i+1;
19 end
20 a=1;
21 for j=1:n
22     t(j)=(j-1)*ht;
23     for i=2:n-1
24         u(i,j+1)=(-a*landa/2+a^2*landa^2/2)*u(i+1,j)+(1-landa^2*a^2)*
            u(i,j)+(a*landa/2+a^2*landa^2/2)*u(i-1,j);
25         w(i,j+1)=(-a*landa/2+a^2*landa^2/2)*w(i+1,j)+(1-landa^2*a^2)*
            w(i,j)+(a*landa/2+a^2*landa^2/2)*w(i-1,j);
26     end
27 end
28 figure(1)
29 plot(x,u(:,1),'g--p','MarkerSize',7)
30 hold on
31 plot(x,u(:,340),'r-o')
32 hold on
33 plot(x,u(:,500),'k-*')
34 hold on
35 plot(x,w(:,1),'b : +')
36
37 legend('n=1,t_n=0','n=340,t_n=17','n=500,t_n=25','Exacta'
    ,[210,200.45,0.25,0.5]);
38 xlabel('h_{x}','FontSize',12,...
    'FontWeight','bold','Color','r')
39 ylabel('Temperatura (°C)','FontSize',12,...
    'FontWeight','bold','Color','r')
40
41 %factor de amplificacion
42 beta =-pi:0.05:pi;
43 figure(2)
44 plot(1-(landa*a)^2+(a*landa)^2*cos(beta),-a*landa*sin(beta),'k :
    *'), title('\rho (\beta)')
45 hold on
46 %circulo unitario
47 plot(cos(beta),sin(beta),'r : o')
48 legend('\rho (\beta)','\beta')
49 whos
50

```

8.4. Código del método de Leap-Frog

```

1 clear
2 %%metodo de Leap-Frog
3 n=500;

```

```

4  hx=0.05; ht=0.8*hx;
5  landa=ht/hx; %%landa=0.8
6  a=1;
7  i=1;
8  while i<=n
9      x(i)=(i-1)*hx;
10     if x(i)>=0 & x(i)<=25
11         u(i,0:17.1)=exp(-20*(x(i)-2).^2)+exp(-(x(i)-5).^2); %
12         condicion inicial
13     end
14 for j=1:340 %t=17
15     t(j)=(j-1)*ht;
16     w(i,0:17.1)=exp(-20*(x(i)-a*t(j)-2).^2)+exp(-(x(i)-a*t(j)
17     -5).^2);
18 end
19     i=i+1;
20 end
21 a=1;
22
23 for j=2:n
24     t(j)=(j-1)*ht;
25     for i=2:n-1
26         u(i,j+1)=-a*landa*(u(i+1,j)-u(i-1,j))+u(i,j-1);
27         w(i,j+1)=-a*landa*(w(i+1,j)-w(i-1,j))+w(i,j-1);
28     end
29 end
30 figure(1)
31 plot(x,u(:,1),'g— p', 'MarkerSize',7)
32 hold on
33 plot(x,u(:,340),'r-o')
34 hold on
35 plot(x,u(:,500),'k - *')
36 hold on
37 plot(x,w(:,1),'b : +')
38
39 legend('n=1,t_n=0','n=340,t_n=17 ','n=500,t_n=25','Exacta'
40     ,[210,200.45,0.25,0.5]);
41 xlabel('h_{x}','FontSize',12,...
42     'FontWeight','bold','Color','r')
43 ylabel('Temperatura (°C)','FontSize',12,...
44     'FontWeight','bold','Color','r')
45 %factor de amplificacion
46 beta=-pi:0.05:pi;
47 figure(3)
48 plot(sqrt(-a^2*landa^2*sin(beta).^2+1),-a*landa*sin(beta),'k : *
49     '), title('\rho (\beta)')
50 hold on
51 %circulo unitario
52 plot(cos(beta),sin(beta),'r : o')
53 legend('\rho (\beta)','\beta')
54 whos

```

8.5. Código de la ecuación de Advección

```
1 program Ecu_TranspCalornega
2 !codigo de la aplicacion 1
3 implicit none
4 real , dimension (0:1000,0:1000) :: w, w1, w2
5 real , dimension (0:1000) :: TD, TN, DUM, TE, sumaprox , RMS, DTM, sumext ,
   rms1 , suma3 , suma2 , suma4
6 real , dimension (0:1000) :: x, t , diff
7 real Deltax , DeltaT , a , b , c , d , L1 , L2 , cp , Zeta , alphax , mu1 , bc , lamda , Fa ,
   dif
8 real DELX, AJM, DELT, ALPH, S , SJ , AJ , AM, DXM, DAM, AVS, sum1 , expm , rms2 ,
   sumal , suma6
9 INTEGER JMAP, Me, JMAX, NMAX, MAXEX, tmax
10 integer i , j , m, n
11 real , external :: f , f1
12 real , parameter :: pi = 3.1416
13 ! *****
   *
14 ! print *, 'Ingrese NPX= , NPY= , Tiempo <=50, -1 <= cp <0 '
15 ! read *, cp
16 ! *****
   *****
17
18 ! open ( unit = 1 , file = 'MayckolJHSpace : \ parX2 .m' )
19 open ( unit = 1 , file = ' parX .m' )
20 open ( unit = 2 , file = ' parT .m' )
21 open ( unit = 3 , file = ' CondInicial .m' )
22 open ( unit = 5 , file = ' mul .m' )
23 open ( unit = 4 , file = ' CondFrontera .m' )
24 open ( unit = 6 , file = ' comparacion .m' )
25
26 open ( unit = 7 , file = ' SolAprox 0 .m' )
27 open ( unit = 8 , file = ' SolAprox 1 .m' )
28 open ( unit = 9 , file = ' SolAprox 2 .m' )
29 open ( unit = 10 , file = ' SolAprox 3 .m' )
30 open ( unit = 11 , file = ' SolAprox 4 .m' )
31 open ( unit = 12 , file = ' SolAprox 5 .m' )
32 open ( unit = 13 , file = ' SolAprox 6 .m' )
33 open ( unit = 14 , file = ' SolAprox 7 .m' )
34
35 ! open ( unit = 15 , file = ' SolAprox 8 .m' )
36 ! open ( unit = 16 , file = ' SolAprox 9 .m' )
37 ! open ( unit = 17 , file = ' SolAprox 10 .m' )
38 ! open ( unit = 18 , file = ' SolAprox 11 .m' )
39 ! open ( unit = 19 , file = ' SolAprox 12 .m' )
40 ! open ( unit = 20 , file = ' SolAprox 13 .m' )
```

```

41 !open ( unit=21, file='SolAprox 14 .m')
42 !open ( unit=22, file='SolAprox 15 .m')
43 !open ( unit=23, file='SolAprox 16 .m')
44 !open ( unit=24, file='SolAprox 17 .m')
45 !open ( unit=25, file='SolAprox 18 .m')
46 !open ( unit=26, file='SolAprox 19 .m')
47 !open ( unit=27, file='SolAprox 20 .m')
48 !open ( unit=28, file='SolAprox 21 .m')
49
50 open ( unit=44, file='SolTE44 .m')
51 open ( unit=45, file='SolTE45 .m')
52 open ( unit=46, file='SolTE46 .m')
53 open ( unit=47, file='SolTE47 .m')
54 open ( unit=48, file='SolTE48 .m')
55 open ( unit=49, file='SolTE49 .m')
56 open ( unit=50, file='SolTE50 .m')
57
58 open ( unit=56, file='TEmax .m')
59 open ( unit=57, file='RMS.m')
60 open ( unit=58, file='TE .m')
61 open ( unit=59, file='Errorrtotal .m')
62 !open ( unit=60, file='FactorA .m')
63 open ( unit=61, file='Solaproximada .m')
64 open ( unit=63, file='Soltmax .m')
65 open ( unit=64, file='suma2 .m')
66 open ( unit=65, file='suma3 .m')
67
68 a=0! x0=a
69 b=1! xm=b
70 L1=b-a
71
72 c=500 !t0=c=500 s
73 d=3500 !tn=d=3500 s
74 L2=d-c
75
76 Deltax=0.1
77 m=L1/Deltax
78 Delta T=500
79 n=L2/Delta T
80 !maxex=500
81 !maxex=0 !40, numero de terminos en la solucion exacta
82 nmax=500 !maximo numero de pasos de time
83 tmax =3000
84 alphax=0.00001 !para un mul=0.5
85 !cp=+0.02 !para un mul=0.5
86 bc=0.0
87 lamda=bc*(Delta T/Deltax)
88 mul=bc+alphax*(Delta T/Deltax**2)-0.5*lamda
89 write (5,106)mul
90 write (6,*)m, n
91
92 !particiones para el espacio
93 do i=0,m

```

```

94      x(i)=(i)*Deltax
95 Fa=abs(1-4*(DeltaT*alphax/Deltax**2)*(sin(x(i)*pi*Deltax)/2)**2)
96      write(1,104)x(i)
97      write(60,*)Fa
98 end do
99 !particiones para el tiempo
100 do j=1,n
101     t(j)=(j)*DeltaT
102     write(2,104)t(j)
103 end do
104 !condicion inicial
105 do i=0,m
106 w(i,0)=0 !f(x(i))
107 write(3,*)w(i,0)
108 end do
109 !CF
110 do j=1,n
111 w(0,j)=100
112 w(m,j)=100
113 write(4,102)w(0,j),w(m,j)
114 end do
115 102 format (100 f15.2)
116
117
118 !w(0,0)=50 !condicion Fletcher
119 !w(m,0)=50
120
121 !El esquema de discretizacion que se utiliza es el FTCS
122 IF(0 .GE. NMAX)GOTO 11
123 11 continue
124 do j=1,n
125 do i=1,m-1
126 if (abs(1-4*(DeltaT*alphax/Deltax**2)*(sin(x(i)*pi*Deltax)*0.5)*
      *2)<=1) then
127 w(i,j)=(1-2*mul)*w(i,j-1)+mul*(w(i+1,j-1)+ w(i-1,j-1))!solucion
      d
128 endif
129 end do
130 end do
131
132 do j=0,n
133 write(7+j,104)(w(i,j),i=0,m) !sol Aprox
134 end do
135
136 do j=0,n
137 write(61,104)(w(i,j),i=0,m) !sol Aprox
138 end do
139
140 maxex=500
141 do j=0,n !particiones tiempo
142 do i=0,m !puntos en el espacio
143 sum1=0
144 do me=1,maxex

```

```

145 expm=-alpha*(2.*me-1.)*(2.*me-1.)*pi*pi*t(j)
146 sum1=sum1+ 400./(2.*me-1.)/pi*sin((2.*me-1.)*pi*x(i))*exp(expm)
147 end do
148 TE(i) = 100-sum1
149 end do
150
151 end do
152 do j=0,n
153 do i=0,m
154 WRITE(44+j,104)TE(i) !tmax
155 end do
156 end do
157
158 !solucion Exacta Vs solucion aproximada
159
160 do i=0,m
161 suma3(i)=w(i,6)
162 WRITE(65,104)suma3(i)
163 end do
164 !do j=1,n
165 do i=0,m
166 suma2(i)=TE(i)
167 WRITE(64,104)suma2(i)
168 end do
169 !end do
170 suma6=0
171 do i=0,m
172 suma1=suma2(i)-suma3(i)
173 suma6=suma6+suma1**2
174 end do
175 RMS2=SQRT(suma6/(m+1))
176 WRITE(59,105)RMS2 !Error Total en Tmax
177
178 103 format (100 f15.4)
179 104 format (100 f15.2)
180 105 format (100 f15.5)
181 106 format (100 f15.3)
182 close (1)
183
184 end program
185
186 real function f(x) ___
187 implicit none
188 real,intent(in)::x
189 real,parameter:: pi=3.1415
190 f=sin(pi*x)
191 return
192 end function

```

8.5.1. Código de Gráfica de la aplicación uno en Octave

```
1 %grafica de la aplicacion 1
2 clear
3 z=load('mul.m');%ZETA
4 x=load('parX.m');%particiones EJE X
5 t=load('parT.m');%particiones EJE T
6 CondI=load('CondInicial.m'); %condicion inicial
7 Saprox(:,1)=load('SolAprox0.m');
8 Saprox(:,2)=load('SolAprox1.m');
9 Saprox(:,3)=load('SolAprox2.m');
10 Saprox(:,4)=load('SolAprox3.m');
11 Saprox(:,5)=load('SolAprox4.m');
12 Saprox(:,6)=load('SolAprox5.m');
13 Saprox(:,7)=load('SolAprox6.m');
14
15 Saprox0=load('SolAprox0.m');
16 Saprox1=load('SolAprox1.m');
17 Saprox2=load('SolAprox2.m');
18 Saprox3=load('SolAprox3.m');
19 Saprox4=load('SolAprox4.m');
20 Saprox5=load('SolAprox5.m');
21 Saprox6=load('SolAprox6.m');
22 Saprox11=load('SolTE44.m');
23
24 [n,m]=size(Saprox0);
25 [n,m]=size(Saprox1);
26 [n,m]=size(Saprox2);
27 [n,m]=size(Saprox3);
28 [n,m]=size(Saprox4);
29 [n,m]=size(Saprox5);
30 [n,m]=size(Saprox6);
31
32 saprox0=Saprox0(:, :);
33 saprox1=Saprox1(:, :);
34 saprox2=Saprox2(:, :);
35 saprox3=Saprox3(:, :);
36 saprox4=Saprox4(:, :);
37 saprox5=Saprox5(:, :);
38 saprox6=Saprox6(:, :);
39 saprox11=Saprox11(:, :);
40
41 figure
42 %plot(saprox0,'K')
43 %hold on
44 plot(saprox1,'b - h','MarkerSize',10)
45 hold on
46 plot(saprox2,'b : ^','MarkerSize',6)
47 hold on
48 plot(saprox3,'b : +')
49 hold on
50 plot(saprox4,'b : p','MarkerSize',10)
51 hold on
```

```

52 plot(saprox 5, '--gs', 'LineWidth', 1, 'MarkerSize', 8, ...
53 'MarkerEdgeColor', 'b', 'MarkerFaceColor', [0.5, 0.5, 0.5])
54 hold on
55 plot(saprox 6, 'k-o')
56 hold on
57 plot(saprox 11, 'r-*')
58 legend('t=500', 't=1000', 't=1500', 't=2000', 't=2500', 't=3000',
        'Exact', [220, 200.45, 0.25, 0.5]);
59 xlabel('h_{x}', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold', 'Color', 'r')
60 ylabel('Temperature (°C)', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold',
        'Color', 'r')
61
62 %factor de amplificacion
63 figure
64 beta=0:0.1:2*pi;
65 plot(1-z+z*cos(beta), -z*sin(beta), 'k : *'), title('\rho (\beta)');
66 hold on
67 %circulo unitario
68 plot(cos(beta), sin(beta), 'r-o')
69 hleg3 = legend('\rho (\beta)=1+Zeta-Zeta*cos(\beta)-i*Zeta*sin(\beta)');
70 whos

```

8.6. Código de ecuación de transporte lineal

```

1 Program BurgerD
2 implicit none
3 !-----TRAN-----
4 !SOLVE THE LINEAR TRANSPORT EQUATION USING
5 !VARIOUS EXPLICIT END IMPLICIT SCHEMES
6 !-----
7 REAL, dimension (0:65) :: R, T, TD, TEX, X
8 REAL, DIMENSION (0:5, 0:65) :: A
9 REAL AA, BB, CC, AE, BE, CE
10 REAL, DIMENSION (0:4) :: D
11
12 REAL ATIM, TIM, DX, DT, XMAX, TIMAX, EM, ALPH, RCEL, QQ, MQ
13
14 REAL S, SS, Q, C, U
15 INTEGER ME, JMAX, JMAF, JMAP, AMP, NTIM, NEX, JPR, LN, EL
16
17 INTEGER N, J, K, JM, JMM, JP, JA, NP, JH, JB, NH, NEM, INT
18 REAL DIM, RMS, SUM, DUM
19
20 Integer :: opc
21

```

```

22 print*, 'Si ingrese opc=1=ME para FTCS DIFFERENCING, Si ingrese
    opc=2=ME para LAX-WENDROFF'
23 PRINT*, 'Si ingrese opc=3=ME para EXPLICIT 4PT UPWIND, Si ingrese
    opc=4=ME para GENERAL CRANK-NICOLSON'
24 read*, opc
25 !
-----
26
27 OPEN(1, FILE='TRAN.DAT')
28 OPEN(6, FILE='TRAN.OUT')
29
30 open (unit=37, file='Tinicial.m') !T inicial
31 open (unit=38, file='X.m')
32 open (unit=39, file='Taprox.m') !T final
33 open (unit=40, file='Texact.m') !TEX
34
35 IF (JPR .EQ. 1) WRITE(6,3)
36 IF (JPR .EQ. 2) WRITE(6,4)
37 3 FORMAT (' PROPAGATION SINE-WAVE')
38 4 FORMAT (' PROPAGATION TEM-FRONT')
39
40 NEX=100
41 !INT=2 !INT SUBROUTINE BANFAC
42 JPR=2 ! JPR=1, PROPAGATION SINE-WAVE
43 ! JPR=2, PROPAGATION TEMPERATURE FRONT
44
45 ! -----
46 Select case (opc)
47 case (1)
48 !print*, 'Si ingrese opc=1=ME para FTCS DIFFERENCING'
49 if (JPR .EQ. 2) then
50 ME=1
51 INT=1
52 endif
53 case (2)
54 !print*, 'Si ingrese opc=2=ME para LAX-WENDROFF'
55 if (JPR .EQ. 2) then
56 ME=2
57 INT=1
58 endif
59
60 case (3)
61 !print*, 'Si ingrese opc=3=ME para EXPLICIT 4PT UPWIND'
62 if (JPR .EQ. 2) then
63 ME=3
64 INT=3
65 endif
66 case (4)
67 !print*, 'Si ingrese opc=4=ME para GENERAL CRANK-NICOLSON'
68 if (JPR .EQ. 2) then
69 ME=4
70 INT=3

```

```

71  endif
72  End Select
73  ! -----
74
75  JMAX=21 !numero de puntos en el intervalo de  $0 \leq x \leq 1$ 
76  NTIM=10 !numero de pasos en el tiempo
77  U=0.50 !constante de velocidad  $U=u(x,t)=cte$ 
78  C=0.25 !munero de Courant
79  S=0.25 ! $S=\alpha \cdot ht/hx**2$ 
80  LN=20 !LONGIUD DEL INTERVALO?
81  N=10 !!
82  EM=0 !EM=delta=0 MDF EM=delta=1/6 MEF...Mx={delta,1-2delta,delta
      }
83
84  write(1,1)JMAX,NTIM,C,U,DX,DT
85  1 FORMAT(I3,I3,F5.2,F5.2,F5.3,F5.3)
86
87  WRITE(1,2)S,ALPH,RCEL,Q,QQ,NEX,EL,EM
88  2 FORMAT(F5.2,E10.3,F6.1,F6.2,F6.3,I5,I5,E10.3)
89
90  JMAF = JMAX-2 !puntos de la malla sin CF
91  JMAP = JMAX-1
92  AMP = JMAP
93  ! -----
94  DX = 1.0/AMP !SINE-WAVE
95  IF (JPR .EQ. 2) DX = 4./AMP !TEMPERATURE FRONT
96  ! -----
97  DT = C*DX/U !C=udt/dx
98  EL = LN !?
99
100 ALPH = S*DX*DX/DT
101 IF (ALPH .LT. 1.0E-10) ALPH = 1.0E-10
102 RCEL = U*DX/ALPH !numero de Reynolds
103 QQ = Q*C/3. !coeficiente de Upwind 4p
104 IF (ME .LT. 3) QQ = 0.
105
106 MQ = 0
107 IF (ABS(QQ) .GT. 0.0001) MQ = 1
108 ATIM = NTIM
109 TIM = 0.
110 TIMAX = DT*ATIM !tiempo de comparacion con la solucion exacta
111 !
112 !WRITE(6,3)
113 ! FORMAT('PROPAGATING SHOCK WAVE(BRGERS EQUATION)')
114 IF (ME .EQ. 1) WRITE(6,5)ME
115 IF (ME .EQ. 2) WRITE(6,6)ME
116 IF (ME .EQ. 3) WRITE(6,7)ME
117 IF (ME .EQ. 4) WRITE(6,8)ME
118 5 FORMAT(5H ME = ,I2,3X,18H FTCS DIFFERENCING) !18H = # DE
      CARACTERES
119 6 FORMAT(5H ME = ,I2,3X,13H LAX-WENDROFF)
120 7 FORMAT(5H ME = ,I2,3X,20H EXPLICIT 4PT UPWIND)
121 8 FORMAT(5H ME = ,I2,3X,23H GENERAL CRANK-NICOLSON)

```

```

122 WRITE(6,9)JMAX,NTIM,C,U,DX,DT
123 9 FORMAT('JMAX = ',I3,3X,'NTIM = ',I3,3X,'C = ',F5.2,3X,'U = ',F5
      .2,3X,'DX = ',F5.3,3X,'DT = ',F5.3)
124 WRITE(6,10)S,ALPH,RCEL,Q,QQ
125 10 FORMAT('S = ',F5.2,2X,'ALPH = ',E10.3,2X,'RCEL = ',F6.1,2X,'Q
      = ',F5.2,2X,'QQ = ',F6.3)
126 WRITE(6,11)NEX,LN,EM,ALPH,DIM
127 11 FORMAT('NEX = ',I5,2X,'LN = ',I5,2X,'EM = ',E10.3,2X,'ALPH = ',
      E10.3,2X,'DIM = ',E12.5)

128
129
130 IF(ME .GT. 3) GOTO 12
131 SS=S
132 IF(ME .EQ. 2) SS = S + 0.5*C*C
133
134 AA = (0.5*C + SS) + 3.*QQ
135 BB = 1. - 2.*SS - 3.*QQ
136 CC = -0.5*C + SS + QQ
137 GOTO 13
138 12 AA = EM - 0.25*C - 0.5*S - 1.5*QQ
139    BB = 1. - 2.0*EM + S + 1.5*QQ
140    CC = EM + 0.25*C - 0.5*S - 0.5*QQ !Esquemas Explicitos
141
142    AE = EM + 0.25*C + 0.5*S + 1.5*QQ !Esquemas Implicitos
143    BE = 1. - 2.0*EM - S - 1.5*QQ
144    CE = EM - 0.25*C + 0.5*S + 0.5*QQ
145 13 WRITE(6,14)AA,BB,CC,AE,BE,CE
146 14 FORMAT('AA = ',F8.5,2X,'BB = ',F8.5,2X,'CC = ',F8.5,2X,'AE = ',F8
      .5,2X,'BE = ',F8.5,2X,'CE = ',F8.5,/)

147
148 !
149 !INITIALISE T AND EVALUATE TEX
150 ! _____
151 CALL EXSOL(JPR,JMAX,X,T,TEX,NEX,DX,U,ALPH,TIMAX)
152 ! _____
153
154 DO 16 J = 1,JMAX
155 DO 15 K = 1,5
156 15 A(K,J) = 0.
157 16 CONTINUE
158 WRITE(6,17)TIM
159 17 FORMAT('INITIAL SOLUTION, TIM = ',F5.3)
160 WRITE(6,18)(X(J),J=1,JMAX)
161 WRITE(6,19)(T(J),J=1,JMAX)
162 18 FORMAT('X = ',12F6.3)
163 19 FORMAT('T = ',12F6.3)
164
165 WRITE(37,104)(T(J),J=1,JMAX)
166 104 format (100 f15.3)
167
168 ! _____
169 !MARCH SOLUTION IN TIME
170 ! _____

```

```

171 DO 26 N = 1,NTIM
172 IF(ME .GT. 3) GOTO 21
173
174 !-----
175 !EXPLICIT ESQUEMAS
176 !-----
177 D(1) = T(1)
178 D(2) = T(1)
179 D(3) = T(2)
180 DO 20 J = 2, JMAP
181 IF(ME .EQ. 3) D(4) = D(1)
182 D(1) = D(2)
183 D(2) = D(3)
184 D(3) = T(J+1)
185 T(J) = AA*D(1) + BB*D(2)+CC*D(3)
186
187 IF(ME .EQ. 3) T(J) = T(J) - QQ*D(4) !1 FTCS y 2 Lax Wendroff
188
189 20 CONTINUE
190
191 GOTO 26
192
193 !-----
194 !TRIDIAGONAL SYSTEM FOR IMPLICIT SCHEMES
195 !-----
196
197 21 IF(MQ .EQ. 1) DIM = 1.
198
199 DO 22 J = 2, JMAP
200 JM = J-1
201 A(1, JM) = 0.5*QQ
202 A(2, JM) = AA
203 A(3, JM) = BB
204 A(4, JM) = CC
205 R(JM) = AE*T(JM) + BE*T(J) + CE*T(J+1)
206 IF(MQ .EQ. 1 .AND. J .GT. 2) DIM = T(JM - 1)
207 IF(MQ .EQ. 1) R(JM) = R(JM) - 0.5*QQ*DIM
208 22 CONTINUE
209 R(1) = R(1) - A(2, 1)*T(1)
210 IF(MQ .EQ. 0) GOTO 24
211 R(1) = R(1) - A(1, 1)*T(1)
212 R(2) = R(2) - A(1, 2)*T(1)
213 !-----
214 !REDUCE A TO TRIDIAGONAL FORM
215 !-----
216 DO 23 JM = 3, JMAF
217 JMM = JM - 1
218 DUM = A(1, JM) / A(2, JMM)
219 A(2, JM) = A(2, JM) - A(3, JMM)*DUM
220 A(3, JM) = A(3, JM) - A(4, JMM)*DUM
221 A(1, JM) = 0.
222 R(JM) = R(JM) - R(JMM)*DUM
223 23 CONTINUE

```

```

224     A(1,1) = 0.
225     A(1,2) = 0.
226 24  A(2,1) = 0.
227     A(4,JMAF) = 0.
228 ! -----
229     CALL BANFAC(A,JMAF,N)
230     CALL BANSOL(R,TD,A,JMAF,N)
231 ! -----
232     DO 25 J = 2,JMAP
233 25  T(J) = TD(J - 1)
234
235 26  CONTINUE
236 !
237 WRITE(6,27)TIMAX
238 27  FORMAT('FINAL SOLUTION, TIM = ',F5.3)
239
240 WRITE(6,18)(X(J), J=1,JMAX)
241 WRITE(6,19)(T(J), J=1,JMAX)
242 WRITE(6,28)(TEX(J), J=1,JMAX)
243 28  FORMAT('TEX=',12F6.3)
244
245 WRITE(38,105)(X(J), J=1,JMAX)
246 WRITE(39,105)(T(J), J=1,JMAX)
247 write(40,105)(TEX(J), J=1,JMAX)
248 105 format (100 f15.3)
249
250 SUM = 0.
251 DO 29 J = 2,JMAP
252 29  SUM = SUM + (T(J)-TEX(J))**2
253 RMS = SQRT(SUM/(AMP-1.))
254 WRITE(6,30)RMS
255 30  FORMAT('RMS |ERROR|= ', E12.5)
256 STOP
257 END PROGRAM BURGERD
258
259 ! -----
260 SUBROUTINE EXXSOL(JPR,JMAX,X,T,TEX,NEX,DX,U,ALPH,TIMAX)
261 ! -----
262 !SETS THE INITIAL T SOLUTION AND FINAL EXACT (TEX) SOLUTION
263 !
264     REAL, DIMENSION(0:65)::T,TEX,X
265
266     JMAP = JMAX -1
267     PI = 3.141592654
268     IF(JPR .EQ. 1) XST = 0.
269     IF(JPR .EQ. 2) XST = -2.0 ! extremo del dominio x=-2
270
271     DO 1 J = 1,JMAX
272     AJ = J - 1
273     X(J) = XST + AJ*DX
274     T(J) = 0.
275 1  TEX(J) = 0.
276     !write(40,106)(TEX(J), J=1,JMAX)

```

```

277      !106 format (100 f15.3)
278
279      IF(JPR .EQ. 2) GOTO 3
280
281      ! -----
282      !EXACT SOLUTION FOR PROPAGATING SINE-WAVE
283      ! -----
284      JM = 0.1001/DX + 1.0
285      INC = U*TIMAX/DX + 0.001
286      DO 2 J = 1 ,JM
287      T(J) = SIN(10.*PI*X(J))
288      JP = J + INC
289 2   TEX(JP) = T(J)
290      !write(40,107)(TEX(J) , J=1 ,JMAX)
291      !107 format (100 f15.3)
292      RETURN
293      ! -----
294      !EXACT SOLUTION FOR PROPAGATING TEM-FRONT
295      ! -----
296
297 3   T(1) = 1.0
298
299      TEX(1) = 1.0
300      !
301      DO 5 J = 2 ,JMAP
302      !-----DOMINIO-----
303      IF(X(J) .LT. 0.) T(J) = 1.0
304      IF(ABS(X(J)) .LT. 1.0E-04) T(J) = 0.5
305      DEM = 0.
306      DO 4 K = 1,NEX
307      AK = 2*K - 1
308      DUM = AK*PI/4 !EL=4=LN ES LA LONG DEL INTERVALO
309      SNE = SIN(DUM*(X(J) - U*TIMAX))
310      DIM = -ALPH*DUM*DUM*TIMAX
311      IF(DIM .LT. -40) GOTO 5
312 4   DEM = DEM + (SNE/AK)*EXP(DIM)
313 5   TEX(J) = 0.5 - 2./PI*DEM
314      !write(40,108)(TEX(J) , J=1 ,JMAX)
315      ! 108 format (100 f15.3)
316      RETURN
317      END
318
319      ! -----
320      !
321      SUBROUTINE BANFAC(A,JMAF,N)
322      ! -----
323      !FACTORES BAND MATRIX ARISING FROM LINEAR OR QUATRIC !ELEMENTS
324      !
325      !INTRO L.U
326      REAL, DIMENSION(0:5,0:65)::A
327
328      IF(INT .EQ. 2) GOTO 2
329      !

```

```

329 !INT=1, LINEAR ELEMENTOS = TRIDIAGONAL SYSTEM
330 !
331 !IF(INT .EQ. 1) GOTO 1
332
333 NP = N-1
334 DO 1 J = 1,NP
335 JP = J+1
336 A(2,JP) = A(2,JP)/A(3,JP)
337 A(3,JP) = A(3,JP) - A(2,JP)*A(4,J)
338 1 CONTINUE
339 RETURN
340 !
341 !INT=2, QUADRATIC ELEMENTS = PENTADIAGONAL SYSTEM
342 !ASSUMES FRIST EQUATIONS FORMES AT NIDSIDE NODE
343 !
344 2 NH = N/2
345 DO 5 I = 1,2
346 JS = 3 - I
347 DO 4 J = JS,NH
348 JA = 2*(J-1)
349 IF(I .EQ. 2) GOTO 3
350 !
351 !I = 1, FRIST PASS, REDUCE TO TRIDIAGONAL
352 !
353 JB = JA + 2
354 A(1,JB) = A(1,JB)/A(2,JB-1)
355 A(2,JB) = A(2,JB) - A(1,JB)*A(3,JB-1)
356 A(3,JB) = A(3,JB) - A(1,JB)*A(4,JB-1)
357 GOTO 4
358 !
359 !I = 2, SECOND PASS, REDUCE TO UPPER TRIANGULAR
360 !
361 3 JB = JA + 3
362 A(2,JB-1) = A(2,JB-1)/A(3,JB-2)
363 A(3,JB-1) = A(3,JB-1) - A(2,JB-1)*A(4,JB-2)
364 IF(JB .GT. N) GOTO 4
365 A(2,JB) = A(2,JB)/A(3,JB-1)
366 A(3,JB) = A(3,JB) - A(2,JB)*A(4,JB-1)
367 A(4,JB) = A(4,JB) - A(2,JB)*A(5,JB-1)
368 4 CONTINUE
369 5 CONTINUE
370 RETURN
371 END
372
373 ! _____
374 SUBROUTINE BANSOL(R,TD,A,JMAF,N)
375 ! _____
376 !USE L.U FACTORIZATION TO SOLVE FOR T, GIVEN R
377 !
378 REAL, DIMENSION(0:65):: R,TD
379 REAL, DIMENSION(0:5,0:65):: A
380
381 IF(INT .EQ. 2) GOTO 3

```

```

382 !
383 !INT = 1, TRIDIAGONAL SYSTEM
384 !
385
386 NP = N - 1
387 DO 1 J = 1, NP
388 JP = J + 1
389 1 R(JP) = R(JP) - A(2, JP)*R(J)
390
391 TD(N) = R(N) / A(3, N)
392
393 DO 2 J = 1, NP
394 JA = N - J
395 TD(JA) = (R(JA) - A(4, JA)*TD(JA + 1)) / A(3, JA)
396 2 CONTINUE
397 RETURN
398
399 !
400 !INT = 2, PENTADIAGONAL SYSTEM
401 !ASSUMES FIRST EQUATION FORMED AT MIDSIDE NODE
402 !SET IBC = 0 IF LAST EQUATION FORMED AT MIDSIDE NODE
403 !SET IBC = 1 IF LAST EQUATION FORMED AT CORNER NODE
404
405 3 IBC = 1
406 NH = N/2
407 IF(2*NH .EQ. N) R(N+1) = 0.
408 IF(2*NH .EQ. N) A(2, N+1) = 0.
409
410 DO 6 I = 1, 2
411 DO 5 J = 1, NH
412 JA = 2*J
413 DO 4 K = 1, I
414 JB = JA - 1 + K
415 4 R(JB) = R(JB) - A(I, JB)*R(JB-1)
416 5 CONTINUE
417 6 CONTINUE
418 NEM = NH - IBC
419 TD(N) = R(N) / A(3, N)
420 IF(IBC .EQ. 1) TD(N-1) = (R(N-1) - A(4, N-1)*TD(N)) / A(3, N-1)
421
422 DO 7 J = 1, NEM
423 JA = N - 2*J + 1 - IBC
424 TD(JA) = (R(JA) - A(4, JA-1)*TD(JA+1) - A(5, JA)*TD(JA+2)) / A(3, JA)
425 TD(JA-1) = (R(JA-1) - A(4, JA-1)*TD(JA)) / A(3, JA-1)
426 7 CONTINUE
427 RETURN
428 END

```

8.6.1. Código de Gráfica en Octave

```
1 clear
2 x=load('X.m');%particiones EJE X
3 to=load('Tinicial.m');%particiones EJE T
4 tap=load('Taprox.m')
5 tex=load('Texact.m')
6 figure
7 plot(x,to,'b-*') % CondI=SolAprox en t=0
8 hold on
9 plot(x,tap,'r--o') % CondI=SolAprox en t=0
10 hold on
11 plot(x,tex,'k--p','MarkerSize',7) % CondI=SolAprox en t=0
12 legend('T inicial','T aproximada','T exacta')
13 whos
```

8.7. Código de la ecuación de transporte no Lineal

```
1 Program BurgerD
2 implicit none
3 _____
4 REAL, dimension (0:65)::R,U,UE,UD,X
5 REAL, DIMENSION (0:5,0:65)::A
6 REAL, dimension (0:2)::AA,BB,CC
7 REAL, DIMENSION (0:4)::EF
8
9 REAL ATIM,TIM,C,DX,DT,XMAX,TIMAX,S,SA,AD,Q,EM,ALPH,RCEL,QQ,MQ
10 INTEGER ME,JMAF,JMAP,AMP,NTIM,JMAX
11 INTEGER N,J,K,JM,JMM,JP,IP,INT
12
13 REAL DIM,DUM,RMS,SUM,PQ
14
15 OPEN(1,FILE='BURG4P.DAT')
16 OPEN(6,FILE='BURG4P.OUT')
17
18 ME=1 !ME=1,2,3,4
19 INT=2
20 N=20
21
22 !JPR=2
23 JMAX=21
24 NTIM=20
25 C=0.25
26
27 XMAX=2.00 !DOMINIO
28 S=0.25
```

```

29
30 AD=0.
31 Q=0.
32 EM=0.
33
34 write (1 , 1)JMAX,NTIM,C,DX,DT,XMAX
35 1 FORMAT(13 , I3 , F5.3 , F5.3 , F5.3 , F5.2)
36
37 WRITE(1 , 2)S , ALPH,RCEL,Q,EM,SA
38 2 FORMAT(F5.2 , E10.3 , F6.1 , F6.2 , F6.3 , E10.3)
39
40 JMAF = JMAX-2
41 JMAP = JMAX-1
42 AMP = JMAP
43
44 DX = 2.*XMAX/AMP
45 DT = C*DX
46 SA = AD*C*C
47
48 ALPH = S*DX*DX/DT
49 IF (ALPH .LT. 1.0E-10)ALPH = 1.0E-10
50 RCEL = DX/ALPH
51 QQ = Q*C/3.
52
53 IF (ME .LT. 3)QQ = 0.
54 MQ = 0
55 IF (ABS(QQ) .GT. 0.0001) MQ=1
56 !
57 ATIM = NTIM
58 TIM = 0.
59 TIMAX = DT*ATIM
60 !
61 WRITE(6,3)
62 3 FORMAT( 'PROPAGATING SHOCK WAVE(BRGERS EQUATION) ' )
63 IF (ME .EQ. 1)WRITE(6,4)ME
64 IF (ME .EQ. 2)WRITE(6,5)ME
65 IF (ME .EQ. 3)WRITE(6,6)ME
66 IF (ME .EQ. 4)WRITE(6,7)ME
67 4 FORMAT(5H ME = ,I2,3X,18H FTCS DIFFERENCING) !18H = # DE
    CHARACTERES
68 5 FORMAT(5H ME = ,I2 ,3X,13H LAX-WENDROFF)
69 6 FORMAT(5H ME = ,I2 ,3X,20H EXPLICIT 4PT UPWIND)
70 7 FORMAT(5H ME = ,I2 ,3X,23H GENERAL CRANK-NICOLSON)
71 WRITE(6 , 8)JMAX,NTIM,C,DX,DT,XMAX
72 8 FORMAT( 'JMAX = ' ,I3 ,3X, 'NTIM' ,I3 ,3x, 'C = ' , F5.3 ,3x, 'DX = ' ,F5
    .3 ,3x, 'DT = ' ,F5.3 ,3x, 'XMAX = ' ,F5.2)
73 WRITE(6 , 9)S , ALPH,RCEL,Q,EM,SA
74 9 FORMAT( 'S = ' ,F5.2 ,2x, 'ALPH = ' ,E10.3 ,2x, 'RCEL = ' ,F6.1 ,2x, 'Q
    = ' ,F5.2 ,2x, 'EM = ' ,F6.3 ,2x, 'SA = ' ,E10.3)
75 !
76 IF (ME .GT. 3) GOTO 10
77 AA(1) = 0.5 *C + 3.*QQ
78 BB(1) = -3.*QQ

```

```

79      CC(1) = -0.5*C + QQ
80
81      IF(ME .NE. 2) GOTO 11
82      AA(1) = 0.
83      BB(1) = 0.5*C
84      CC(1) = -0.5*C
85      AA(2) = C
86      BB(2) = -C
87      CC(2) = 0.
88
89      GOTO 11
90 10 AA(1) = EM + 0.5*S
91     BB(1) = 1.0 - 2.0*EM - S
92     CC(1) = EM + 0.5*S
93
94 11 WRITE(6,12)AA,BB,CC
95 12 FORMAT('AA = ',2F8.5,2X,'BB = ',2F8.5,2X,'CC = ',2F8.5,/)
96
97 ! INITIALISE U AND EVALUATE UEX
98 ! -----
99 ! CALL EXSH(JMAX,X,U,UE,DX,XMAX,ALPH,TIMAX)
100 ! -----
101
102     UD(1) = U(1)
103     UD(JMAX) = U(JMAX)
104
105     DO 14 J = 1,JMAX
106     DO 13 K = 1,5
107
108         13 A(K,J) = 0.
109         14 CONTINUE
110
111     WRITE(6,15)TIM
112     15 FORMAT('INITIAL SOLUTION, TIM = ', F5.3)
113     WRITE(6,16)(X(J),J=1,JMAX)
114     WRITE(6,17)(U(J),J=1,JMAX)
115
116
117 16 FORMAT('X = ',12F6.3)
118 17 FORMAT('U = ',12F6.3)
119
120 !
121 !MARCH SOLUTION IN TIME
122 !
123     DO 27 N = 1,NTIM
124     IF(ME .GT. 3) GOTO 21
125 !-----
126 !EXPLICIT ESQUEMAS
127 !-----
128
129     IP = 1
130 18 IF(IP .EQ. 1)EF(1) = 0.5*U(1)*U(1)
131     IF(IP .EQ. 2)EF(1) = 0.5*UD(1)*UD(1)

```

```

132 EF(2) = EF(1)
133 EF(3) = EF(2)
134 IF(IP .EQ. 1)EF(4) = 0.5*U(2)*U(2)
135 IF(IP .EQ. 2)EF(4) = 0.5*UD(2)*UD(2)
136 DO 20 J = 2,JMAP
137 IF(ME .EQ. 3)EF(1) = EF(2)
138 EF(2) = EF(3)
139 EF(3) = EF(4)
140 IF(IP .EQ. 1)EF(4) = 0.5*U(J+1)*U(J+1)
141 IF(IP .EQ. 2)EF(4) = 0.5*UD(J+1)*UD(J+1)
142 DUM = S*(U(J-1)-2.*U(J)+U(J+1))
143 IF(ME .NE. 2 .OR. IP .EQ. 2)GOTO 19
144 JP = J+1
145 IF(J .EQ. JMAP)JP = J
146 DUM = 0.5*DUM+0.5*S*(U(J)-2.*U(J+1)+U(JP+1))+0.5*(U(JP)-U(J))
147 19 UD(J) = U(J) + AA(IP)*EF(2)+BB(IP)*EF(3) + CC(IP)*EF(4)+
    DUM
148 IF(ME .EQ. 3)UD(J) = UD(J) - QQ*EF(1)
149 20 CONTINUE
150 IF(ME .NE. 2 .OR. IP .EQ. 2)GOTO 25
151 IP = IP+1
152 GOTO 18
153
154 ! -----
155 !TRIDIAGONAL SYSTEM FOR IMPLICIT SCHEMES
156 ! -----
157
158 21 IF(MQ .EQ. 1) DIM = U(1)
159 DO 22 J = 2,JMAP
160 JM = J-1
161 IF(JM .NE. 1) DIM = U(JM-1)
162 A(1,JM) = 0.5*QQ*DIM
163 A(2,JM) = EM - 2.0*S - (0.25*C+1.5*QQ)*U(JM)
164 A(3,JM) = 1.0 - 2.0*EM+S+1.5*QQ*U(J)
165 A(4,JM) = EM - 0.5*S - (0.25*C-0.5*QQ)*U(J+1)
166 IF(ME .NE. 5)GOTO 22
167 A(2,JM) = A(2,JM) - 0.5*SA*U(JM)
168 A(3,JM) = A(3,JM) + SA*U(J)
169 A(4,JM) = A(4,JM) - 0.5*SA*U(J+1)
170 22 R(JM) = AA(1)*U(JM) + BB(1)*U(J) + CC(1)*U(J+1)
171 R(1) = R(1) - A(2,1)*U(1)
172 IF(MQ .EQ. 0)GOTO 24
173 R(1) = R(1) - A(1,1)*U(1)
174 R(2) = R(2) - A(1,2)*U(1)
175 !
176 !REDUCE A TO TRIDIAGONAL FORM
177 !
178 DO 23 JM = 3,JMAF
179 JMM = JM - 1
180 DUM = A(1,JM)/A(2,JMM)
181 A(2,JM) = A(2,JM) - A(3,JMM)*DUM
182 A(3,JM) = A(3,JM) - A(4,JMM)*DUM
183 A(1,JM) = 0.

```

```

184      R(JM) = R(JM) - R(JMM)*DUM
185 23 CONTINUE
186      A(1,1) = 0.
187      A(1,2) = 0.
188 24 A(2,1) = 0.
189      A(4,JMAF) = 0.
190 !
191 CALL BANFAC(A,JMAF,N)
192 CALL BANSOL(R,UD,A,JMAF,N)
193 !
194 25 DO 26 J = 2,JMAP
195     IF (ME .LE. 3)U(J) = UD(J)
196     IF (ME .GT. 3)U(J) = UD(J-1)
197 26 CONTINUE
198 27 CONTINUE
199 !
200     WRITE(6,28)TIMAX
201 28 FORMAT('FINAL SOLUTION, TIM = ',F5.3)
202     WRITE(6,16)(X(J), J=1,JMAX)
203     WRITE(6,17)(U(J), J=1,JMAX)
204     WRITE(6,29)(UE(J), J=1,JMAX)
205 29 FORMAT('UE=' ,12F6.3)
206     SUM = 0.
207     DO 30 J = 2,JMAP
208 30 SUM = SUM + (U(J)-UE(J))**2
209     RMS = SQRT(SUM/(AMP-1))
210     WRITE(6,31)RMS
211 31 FORMAT('RMS ERR = ', E12.5)
212     STOP
213 END PROGRAM BURGERD
214 ! -----
215 SUBROUTINE EXSH(JMAX,X,U,UE,DX,XMAX,ALPH,TIMAX)
216 ! -----
217 !SETS THE INITIAL U SOLUTION AND FINAL EXACT (UEX) SOLUTION
218 !
219
220 REAL, DIMENSION(0:65)::U,UE,X
221
222 JMAP = JMAX -1
223 PI = 3.141592654
224 XST = -XMAX
225 DO 1 J = 1,JMAX
226 AJ = J - 1
227 X(J) = XST + AJ*DX
228 U(J) = 0.
229 1 UE(J) = 0.
230 U(1) = 1.0
231 UE(1) = 1.0
232 !
233 DO 2 J = 2,JMAP
234 IF (X(J) .LT. 0.) U(J) = 1.0
235 IF (ABS(X(J)) .LT. 1.0E-04) U(J) = 0.5
236 AJ = X(J)

```

```

237   XB = -AJ
238   XA = AJ - TIMAX
239   PQ = SQRT(0.25 * PI)
240   PP = SQRT(PI * TIMAX * ALPH)
241   XB = XB * PQ / PP
242   XA = XA * PQ / PP
243   !
244   !ERFC CALCULATE THE COMPLEMENTARY ERROR FUNCTION
245   !
246   CALL ERFC(XA,EXA)
247   CALL ERFC(XB,EXB)
248   !
249   SUMA = PP * EXA
250   SUMB = PP * EXB
251   DUM = 0.5 * (AJ - 0.5 * TIMAX) / ALPH
252   IF (DUM .GT. 20.) DUM = 20.
253   IF (DUM .LT. -20.) DUM = -20.
254   SUMC = EXP(DUM)
255   UE(J) = SUMA / (SUMA + SUMC * SUMB)
256 2 CONTINUE
257   RETURN
258   END
259
260   !-----
261 SUBROUTINE ERFC(X,ERC)
262   !-----
263   !COMPLEMENTARY ERROR FUNCTION
264   !
265   !REAL, DIMENSION(0:65):: X
266
267   B = ABS(X)
268   IF (B .LT. 4) GOTO 1
269   D = 1.0
270   GOTO 2
271 1 C = EXP(-B * B)
272   T = 1. / (1. + 0.3275911 * B)
273   D = 0.254829592 * T - 0.284496736 * T * T + 1.421413741 * T * T * T
274     + 1 - 1.4531520227 * T * T * T * T + 1.061405429 * T * T * T * T * T
275   D = 1. - D * C
276 2 IF (X .LT. 0.) D = -D
277   D = 1. - D
278   RETURN
279   END
280   !-----
281 SUBROUTINE BANFAC(A,JMAF,N)
282   !-----
283   !FACTORES BAND MATRIX ARISING FROM LINEAR OR QUATRIC !ELEMENTS
284   !INTRO L.U
285   !
286   REAL, DIMENSION(0:5,0:65):: A
287
288   IF (INT .EQ. 2) GOTO 2
289

```

```

288 !
289 !INT=1, LINEAR ELEMENTOS = TRIDIAGONAL SYSTEM
290 !
291
292 NP = N-1
293 DO 1 J = 1, NP
294 JP = J+1
295 A(2, JP) = A(2, JP) / A(3, JP)
296 A(3, JP) = A(3, JP) - A(2, JP) * A(4, J)
297 1 CONTINUE
298 RETURN
299 !
300 !INT=2, QUADRATIC ELEMENTS = PENTADIAGONAL SYSTEM
301 !ASSUMES FRIST EQUATIONS FORMES AT NIDSIDE NODE
302 !
303 2 NH = N/2
304 DO 5 I = 1, 2
305 JS = 3 - I
306 DO 4 J = JS, NH
307 JA = 2 * (J - 1)
308 IF (I .EQ. 2) GOTO 3
309 !
310 !I = 1, FRIST PASS, REDUCE TO TRIDIAGONAL
311 !
312 JB = JA + 2
313 A(1, JB) = A(1, JB) / A(2, JB - 1)
314 A(2, JB) = A(2, JB) - A(1, JB) * A(3, JB - 1)
315 A(3, JB) = A(3, JB) - A(1, JB) * A(4, JB - 1)
316 GOTO 4
317 !
318 !I = 2, SECOND PASS, REDUCE TO UPPER TRIANGULAR
319 !
320 3 JB = JA + 3
321 A(2, JB - 1) = A(2, JB - 1) / A(3, JB - 2)
322 A(3, JB - 1) = A(3, JB - 1) - A(2, JB - 1) * A(4, JB - 2)
323 IF (JB .GT. N) GOTO 4
324 A(2, JB) = A(2, JB) / A(3, JB - 1)
325 A(3, JB) = A(3, JB) - A(2, JB) * A(4, JB - 1)
326 A(4, JB) = A(4, JB) - A(2, JB) * A(5, JB - 1)
327 4 CONTINUE
328 5 CONTINUE
329 RETURN
330 END
331
332
333 ! -----
334 SUBROUTINE BANSOL(R, UD, A, JMAF, N)
335 ! -----
336 !USE L.U FACTORIZATION TO SOLVE FOR U, GIVEN R
337 !
338 REAL, DIMENSION(0:65) :: R, UD
339 REAL, DIMENSION(0:5, 0:65) :: A
340

```

```

341      IF (INT .EQ. 2) GOTO 3
342
343      !
344      !INT = 1, TRIDIAGONAL SYSTEM
345      !
346
347      NP = N - 1
348      DO 1 J = 1, NP
349      JP = J + 1
350      1 R(JP) = R(JP) - A(2, JP) * R(J)
351      UD(N) = R(N) / A(3, N)
352      DO 2 J = 1, NP
353      JA = N - J
354      UD(JA) = (R(JA) - A(4, JA) * UD(JA + 1)) / A(3, JA)
355      2 CONTINUE
356      RETURN
357      !
358
359      !INT = 2, PENTADIAGONAL SYSTEM
360      !ASSUMES FIRST EQUATION FORMED AT MIDSIDE NODE
361      !SET IBC = 0 IF LAST EQUATION FORMED AT MIDSIDE NODE
362      !SET IBC = 1 IF LAST EQUATION FORMED AT CORNER NODE
363
364      3 IBC = 1
365      NH = N / 2
366      IF (2 * NH .EQ. N) R(N + 1) = 0.
367      IF (2 * NH .EQ. N) A(2, N + 1) = 0.
368      DO 6 I = 1, 2
369      DO 5 J = 1, NH
370      JA = 2 * J
371      DO 4 K = 1, I
372      JB = JA - 1 + K
373      4 R(JB) = R(JB) - A(I, JB) * R(JB - 1)
374      5 CONTINUE
375      6 CONTINUE
376      NEM = NH - IBC
377      UD(N) = R(N) / A(3, N)
378      IF (IBC .EQ. 1) UD(N - 1) = (R(N - 1) - A(4, N - 1) * UD(N)) / A(3, N - 1)
379      DO 7 J = 1, NEM
380      JA = N - 2 * J + 1 - IBC
381      UD(JA) = (R(JA) - A(4, JA - 1) * UD(JA + 1)) / A(3, JA)
382      UD(JA - 1) = (R(JA - 1) - A(4, JA - 1) * UD(JA)) / A(3, JA - 1)
383      7 CONTINUE
384      RETURN
385      END

```

8.4.1. Código de Gráfica en Octave

```
1
2 clear
3 x=load('X.m');%particiones EJE X
4 to=load('T inicial.m');%particiones EJE T
5 tap=load('T aprox.m')
6 tex=load('T exact.m')
7 figure
8 plot(x,to,'b-*') % CondI=SolAprox en t=0
9 hold on
10 plot(x,tap,'r-o') % CondI=SolAprox en t=0
11 hold on
12 plot(x,tex,'k--p','MarkerSize',7) % CondI=SolAprox en t=0
13 legend('T inicial','T aproximada','T exacta')
14 whos
```

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Richard Bernatz. *FOURIER SERIES AND NUMERICAL METHODS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*. John Wiley and Sons, Luther College, 1 edition, 1955.
- [2] Titchmarsh E. C. *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*. Clarendon Press, Oxford, 1 edition, 1962.
- [3] John c. Strikwerda. *Finite Difference Schemas and Partial Differential Equations*. Siam, Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, 2 edition, 1989.
- [4] Ortigoza Capetillo. A finite-difference method of high-order accuracy for the solution of transient nonlinear diffusive–convective problem in three dimensions. *J. Appl.FÍSICA*, 3:43–50, 2014.
- [5] Steven C. Chapra and Raymond P. Canale. *MÉTODOS NUMÉRICOS PARA INGENIEROS*. The McGraw-Hill Companies, McGRAW-HILL INTERAMERICANA, 5 edition, 2007.
- [6] Lokenath Debnath. *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Birkhauser, University of Texas-Pan American, 2 edition, 2007.
- [7] Fletcher. *Computational Techniques for Fluid Dynamics*. Springer Verlag, University of Sydney, 2 edition, 1991.
- [8] S.R. Freitas, L.F. Rodrigues, K. L. Longo, and J. Panetta. Impact of a monotonic advection scheme with low numerical diffusion on transport modeling of emissions from biomass burning. *J. Adv.Model. Earth Syst*, 4:1–26, 2012.

- [9] Mayckol J. VI CONGRESO NACIONAL DEL COLEGIO DE MATEMÁTICOS DEL PERÚ, 2015.
- [10] Mayckol J., Obidio R., Sonia R., and Luis C. XI SELASI SEMINARIO EURO LATINOAMERICANO DE SISTEMAS DE INGENIERÍA Y AND INTERNATIONAL MEETING - OR IN AGRICULTURAL AND FOREST MANAGEMENT, 2015.
- [11] Mayckol Jiménez. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA TEMPERATURA ATMOSFÉRICA EN MESOESCALA USANDO EN EL ESQUEMA DE DIFERENCIAS FINITAS FORWARD UPSTREAM. Master's thesis, Departamento de ciencias físicas y matemática. Universidad Nacional de Trujillo, Julio 2017.
- [12] Mayckol Jiménez, Obidio Rubio, , and Luis J Caucha Morales. Central finite-difference of numerical solution for three-dimensional atmospheric transport equation. *Journal of Mathematical and Computational Science*, 10:2164–2190, 2020-08-24.
- [13] Randall J. Leveque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Springer Basel AG, University of Washington, 4 edition, 1992.
- [14] Mikel Lezaun. Predicciones del tiempo y matemáticas. *J. Appl. Matemática Aplicada, Estadística.*, 22:61–100, 2002.
- [15] Obidio E. Rubio M. *Método de Diferencias finitas para Ecuaciones diferenciales Parciales*. UNT, Universidad Nacional de Trujillo, P ERU, 1 edition, 2001.
- [16] F. Mesinger and A. Arakawa. *Numerical methods used in atmospheric model*. GARP PUBLICATIONS SERIES, Univerddad de California, 2 edition, 1976.
- [17] Shoichiro Nakamura. *APPLIED NUMERICAL METHODS WITH SOFTWARE*. Prentice Hall, PEARSON, 1 edition, 1992.
- [18] Roger A. Pielke. *Mesoscale Meteorological Modeling*. Academic Press, Colorado state Universidad, 2 edition, 2002.
- [19] G.D Smith. *Numerical solution of partial differential equations:finite difference methods*. Oxford University Press, OXFORD APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTING SCIENCE SERIES, 3 edition, 1985.
- [20] Gary A Soud. *NUMERICAL METHODS IN FLUID DYNAMICS*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, Tulane University, 1 edition, 1985.

- [21] J.W Thomas. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Springer-Verlag New York, Texts in Applied Mathematics, 22 edition, 1995.
- [22] Craig J. Tremback, James Powell, William R. Cotton, and Roger A. Pielke. The forward- in -time upstream advection scheme:extension to higher orders. *J. Appl. MONTHLY WEATHER REVIEV.*, 115:540–555, 1986.
- [23] Piter Wesseling. *Principles of Computational Fluid Dynamics*. Springer, Delft University of Technology, 1 edition, 2009.

