

# MODELADO DE UN PÉNDULO INVERTIDO MÓVIL, USANDO HARDWARE Y SOFTWARE LIBRE<sup>253</sup> MODELING A MOBILE INVERTED PENDULUM, USING HARDWARE AND FREE SOFTWARE

Jorge Luis Apaza Cruz<sup>254</sup>

Mary Luz Limachi Flores<sup>255</sup>

Marco Antonio Quispe Barra<sup>256</sup>

Delgado Huayta Iván<sup>257</sup>

James Rolando Arredondo Mamani<sup>258</sup>

Pares evaluadores: Red de Investigación en Educación, Empresa y Sociedad – REDIEES.<sup>259</sup>

---

<sup>253</sup> Derivado del proyecto de investigación: “Modelado de un péndulo invertido móvil, usando hardware y software libre”

<sup>254</sup> Ingeniero Electrónico, Magister scientiae en: Ingeniería Mecánica Eléctrica y Doctoris Scientiae en Ciencia, Tecnología y Medio Ambiente de la Universidad Nacional Del Altiplano. Docente investigador. Miembro del instituto de investigación de ciencias de la educación, correo electrónico institucional: jlapaza@unap.edu.pe.

<sup>255</sup> Licenciada en Educación Física, Magíster Scientiae en: Educación y Doctor en Educación de la Universidad Nacional Del Altiplano. Docente del Instituto de Educación Superior Pedagógico Privado “Andrés Bello” de Puno, Perú. Miembro del instituto de investigación de ciencias de la educación, correo electrónico: limaryflor@gmail.com.

<sup>256</sup> Ingeniero Electrónico, Maestro en ciencias ingeniería electrónica, y Doctor en ciencias: ingeniería mecatrónica de la Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa. Docente investigador de la Universidad Nacional del Altiplano, correo electrónico institucional: marcoquispe@unap.edu.pe

<sup>257</sup> Ingeniero Electrónico, Maestro en ciencias: ingeniería electrónica de la Universidad Alas Peruanas S.A. y Doctor en ciencias: ingeniería mecatrónica de la Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa. Docente investigador de la Universidad Nacional del Altiplano, Miembro del instituto de ingenieros eléctricos y electronicos, correo electrónico institucional: idelgado@unap.edu.pe

<sup>258</sup> Ingeniero Electrónico de la Universidad Nacional del Altiplano, Maestro en ciencias con mención en ingeniería ambiental de la Universidad José Carlos Mariátegui y Doctor en ciencias con mención en energética de la Universidad Nacional de Ingeniería. Docente investigador de la Universidad Nacional del Altiplano, correo electrónico institucional: jarredondo@unap.edu.pe

<sup>259</sup> Red de Investigación en Educación, Empresa y Sociedad – REDIEES. [www.rediees.org](http://www.rediees.org)

## 25. MODELADO DE UN PÉNDULO INVERTIDO MÓVIL, USANDO HARDWARE Y SOFTWARE LIBRE<sup>260</sup>

Jorge Luis Apaza Cruz<sup>261</sup>, Mary Luz Limachi Flores<sup>262</sup>, Marco Antonio Quispe Barra<sup>263</sup>,  
Delgado Huayta Iván<sup>264</sup>, James Rolando Arredondo Mamani<sup>265</sup>

### RESUMEN

La investigación de modelado de un péndulo invertido móvil, usando hardware y software libre tuvo como objetivo la construcción de un modelo a escala de un péndulo, control de estabilidad, mediante el uso de un algoritmo. Se diseñó y construyó el sistema, utilizando como herramienta las ecuaciones del control adaptativo de control PID. filtros de kalman. La metodología de la presente investigación es experimental, se usó una de las herramientas de la teoría de control del experimento, y se realizó varias pruebas con modelos, simulaciones constructivas de la fabricación a escala y simplificación de la estructura y sustitución de materiales, se aplicó la técnica de ciencias básicas, y análisis de microcontroladores, semiconductores y actuadores, el instrumento de investigación fue el software IDE ARDUINO y PROCESSING, Se implementó y simuló el sistema donde se aprecia el equilibrio y la estabilidad del péndulo invertido móvil. Se concluye que el diseño de un controlador de estabilización lleva el sistema del péndulo invertido móvil a un punto de equilibrio, la investigación se centra en el comportamiento del modelado físico del sistema dinámico que implica el equilibrio del péndulo invertido móvil, lo que se encuentra dentro de la automatización conjuntamente con la robótica y el control, donde se resolvió con una

<sup>260</sup> Derivado del proyecto de investigación: “Modelado de un péndulo invertido móvil, usando hardware y software libre”

<sup>261</sup> Ingeniero Electrónico, Magister scientiae en: Ingeniería Mecánica Eléctrica y Doctoris Scientiae en Ciencia, Tecnología y Medio Ambiente de la Universidad Nacional Del Altiplano. Docente investigador. Miembro del instituto de investigación de ciencias de la educación, correo electrónico institucional: jlapaza@unap.edu.pe.

<sup>262</sup> Licenciada en Educación Física, Magister Scientiae en: Educación y Doctor en Educación de la Universidad Nacional Del Altiplano. Docente del Instituto de Educación Superior Pedagógico Privado “Andrés Bello” de Puno, Perú. Miembro del instituto de investigación de ciencias de la educación, correo electrónico: limaryflor@gmail.com.

<sup>263</sup> Ingeniero Electrónico, Maestro en ciencias ingeniería electrónica, y Doctor en ciencias: ingeniería mecatrónica de la Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa. Docente investigador de la Universidad Nacional del Altiplano, correo electrónico institucional: marcoquispe@unap.edu.pe

<sup>264</sup> Ingeniero Electrónico, Maestro en ciencias: ingeniería electrónica de la Universidad Alas Peruanas S.A. y Doctor en ciencias: ingeniería mecatrónica de la Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa. Docente investigador de la Universidad Nacional del Altiplano, Miembro del instituto de ingenieros eléctricos y electrónicos, correo electrónico institucional: idelgado@unap.edu.pe

<sup>265</sup> Ingeniero Electrónico de la Universidad Nacional del Altiplano, Maestro en ciencias con mención en ingeniería ambiental de la Universidad José Carlos Mariátegui y Doctor en ciencias con mención en energética de la Universidad Nacional de Ingeniería. Docente investigador de la Universidad Nacional del Altiplano, correo electrónico institucional: jarredondo@unap.edu.pe

serie de estrategias diferentes de control que actúan dentro de la plataforma real que se usó en el entorno de la naturaleza.

## ABSTRACT

The research on the modeling of a mobile inverted pendulum, using free hardware and software, had as its objective the construction of a scale model of a pendulum, stability control, through the use of an algorithm. The system was designed and built, using the PID control adaptive control equations as a tool. Kalman filters. The methodology of the present investigation is experimental, the tools of the control theory of the experiment were used, and several tests were carried out with models, constructive simulations of the manufacture at scale and simplification of the structure and substitution of materials, the technique was applied of basic sciences, and analysis of microcontrollers, semiconductors and actuators, the research instrument was the IDE ARDUINO and PROCESSING software. The system was implemented and simulated where the balance and stability of the mobile inverted pendulum is appreciated. It is concluded that the design of a stabilization controller brings the mobile inverted pendulum system to a point of equilibrium, the research focuses on the behavior of the physical modeling of the dynamic system that implies the equilibrium of the mobile inverted pendulum, which is within of automation together with robotics and control, where it was solved with different control strategies that act within the real platform and with nature.

**PALABRAS CLAVE:** Equilibrio, Estabilidad, Hardware, Software, Péndulo invertido móvil.

**Keywords:** Balance, Stability, Hardware, Software, Mobile inverted pendulum.

## INTRODUCCIÓN

La atención de investigadores y entusiastas de la robótica en las últimas décadas debido a sus características especiales, tales como alto orden, inestabilidad, multivariable, no lineal, fuerte acoplamiento y sub-actuación, y en gran parte del rendimiento clave del algoritmo de control, como la solidez, la estabilización y la trazabilidad (Meng, Zhang, Huang, Li, & Chen, 2009), gran parte del rendimiento clave del algoritmo de control, como la solidez, la estabilización y la trazabilidad (Aracil & Gordillo, 2005), la presente investigación muestra el modelado de un péndulo invertido móvil, usando hardware y software libre, el cual se diseñó e implementó en la Universidad Nacional del Altiplano - Puno.

El péndulo invertido en carro es un sistema no lineal accionado, con solo una entrada de control aplicada al móvil, pero más de dos salidas (posición del móvil y ángulo del péndulo), también es un sistema electromecánico el más importante en la rama de control debido a que nos muestra la inestabilidad de un cuerpo ante la gravedad y los efectos de esta al tratar de ponerlo en equilibrio y el problema que genera la estabilidad (Moreno et al., 1997). El cual debe ser controlado por un algoritmo, Pero todos estos algoritmos de control novedosos necesitan un banco de pruebas repetible para verificar su efectividad, por lo que se realizó experimentos diferentes para verificar la fiabilidad del algoritmo de control. Se utilizó un microcontrolador para controlar el péndulo invertido, y se diseñó un algoritmo robusto aplicado al péndulo invertido para probar resultados en tiempo real (Ipanaqué et al., 2002).

La gama de tareas tecnológicas que necesitan estos sistemas de péndulo invertido se amplía cada año. Esto resulta en una necesidad creciente de estrategias más avanzadas de modelado, identificación y control para estos sistemas, las aplicaciones necesitan una descripción suficientemente concisa y precisa de la dinámica de estos sistemas, esto es especialmente cierto en aplicaciones de control automático, los modelos dinámicos que describen el sistema electromecánico en uso se pueden desarrollar utilizando los principios de la física. Sin embargo, los modelos construidos de esta manera pueden ser difíciles de derivar en la dinámica del sistema, por sus numerosas aplicaciones en ingeniería, en exploración espacial, automatización de fabricación, construcción, minería, aviación,

aplicaciones militares de estabilización para un destino, operaciones peligrosas y muchas otras áreas.

La investigación que se realizó fue con el interés de ver el comportamiento del modelado físico, del sistema dinámico que implica el equilibrio del péndulo invertido móvil, Lo que se encuentra dentro de la automatización conjuntamente con la robótica y el control, donde se resolvió con una serie de estrategias diferentes de control que actúan dentro de una plataforma real que se usó en el entorno de la naturaleza (Valera et al., 2002).

Según el propósito del estudio es una investigación aplicada, y se caracteriza por recoger datos reales, y se obtuvo la información o la obtención de datos y pruebas de control del péndulo, y se realizó la correspondiente selección de variables, sin dejar de lado la ingeniería del proyecto cuyo resultado permitió obtener el algoritmo de control.

## 1. INGENIERÍA DEL PROYECTO

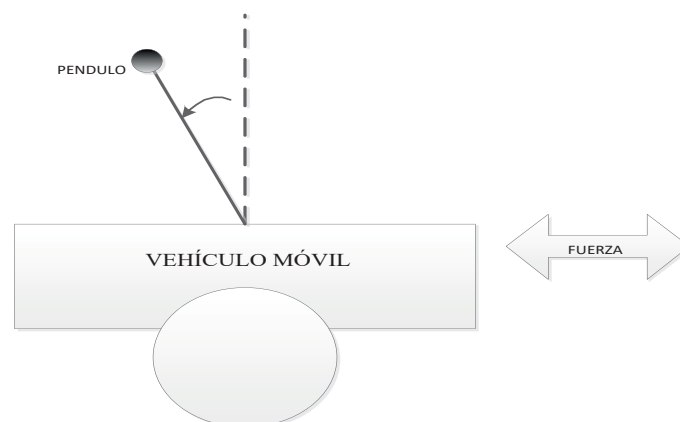
El estudio de los efectos y comportamientos que causan las oscilaciones en los circuitos.

- Como instrumento se usó un el Software “IDE ARDUINO y PROCESSING.”
- Guía de observación y manual de usuario del Software IDE ARDUINO y PROCESSING.

### 1.1. Etapas para realizar el modelado

Bosquejo general de péndulo invertido móvil usando hardware y software libre.

*Figura 3. Bosquejo del péndulo invertido*

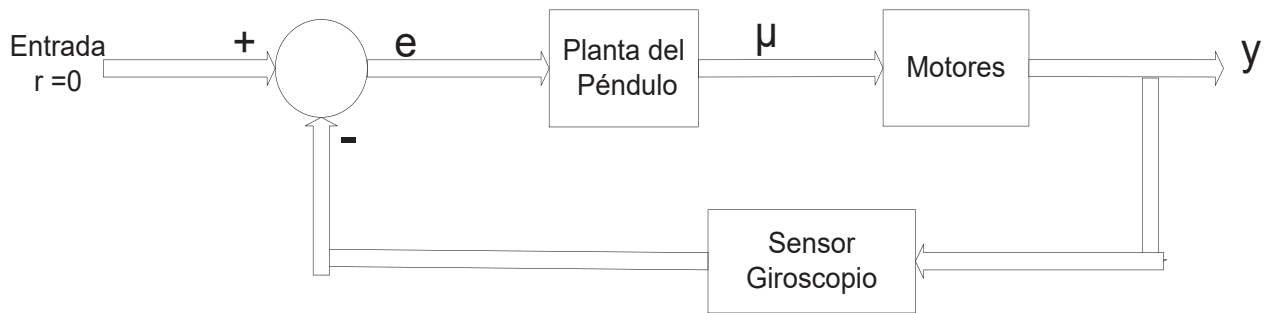


Fuente: Elaboración propia

### 1.1.1. Diseño del controlador

Como la ejecución del diseño y modelado del sistema se usó los tipos de control PID y LQR, para el desarrollo del todo el sistema se realizó un bloque de referencia donde mostraremos en la figura 2 de la planta que se desarrolló.

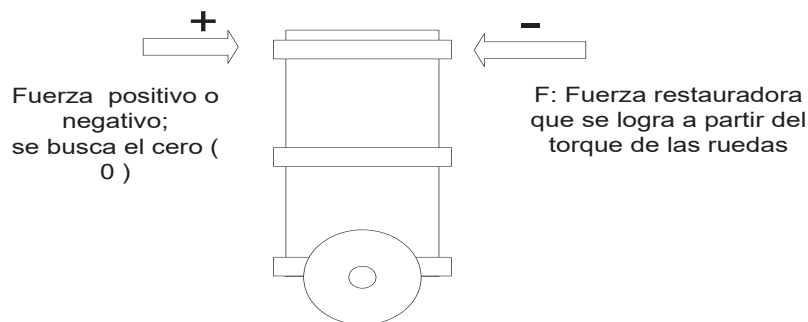
*Figura 4. Diseño de planta*



Fuente: Elaboración propia

Donde el sensor (giroscopio mande un valor) ya sea positivo o negativo en función del diagrama establecido que a continuación se muestra.

*Figura 5. Diagrama de fuerzas del péndulo*



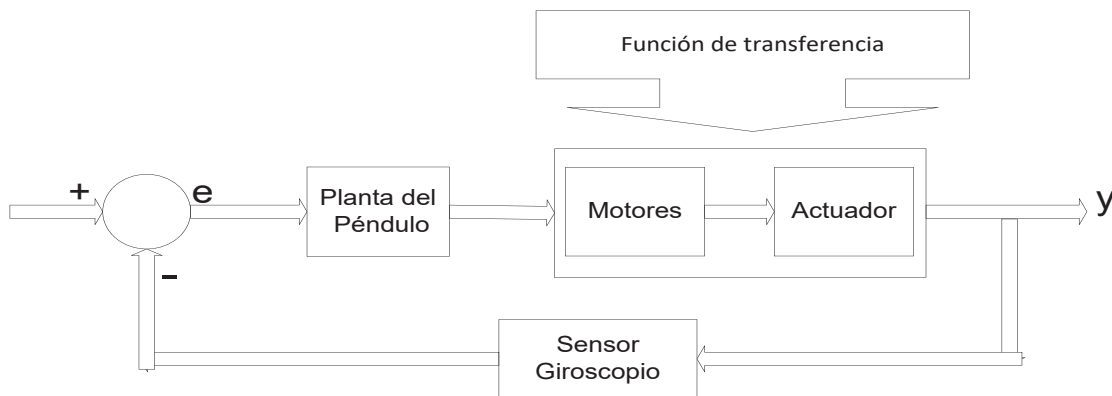
Fuente: Elaboración propia

En primer lugar, se mide el valor del sensor del giroscopio, luego se envía una señal en la cual es restada con la señal medida dándonos un error, sin embargo, se debe plantear un margen en el que el sistema inestable trabaje, el cual se aplica hacia los motores.

El modelado se planteó de acuerdo al tipo de controlador (PID, LQR), para la elaboración primero se realizó el PID y se alcanza el tiempo con LQR.

Una vez obtenido el modelo matemático, se procedió a simular en Matlab en la herramienta simulink en versión estudiantil el programa y processing, con los datos ya obtenidos como la función de transferencia general del sistema. El cual se procedió a hallar los valores PID óptimos para el control del péndulo invertido móvil usando hardware libre Arduino.

**Figura 6. Diagrama de función de transferencia del péndulo invertido**

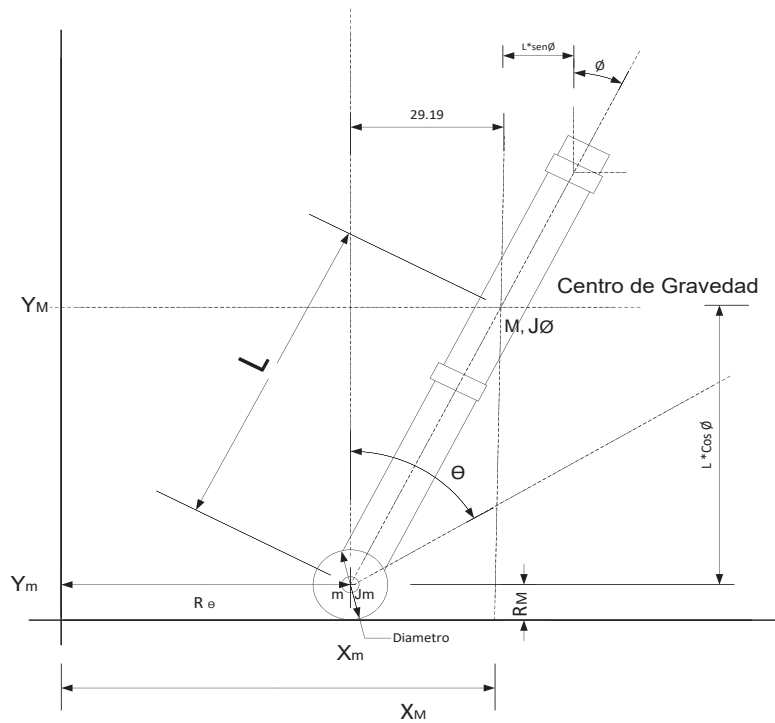


Fuente: Elaboración propia

### 1.1.2. Modelado Físico

Para hallar el momento de inercia de la rueda y el motor, primero se debe tener en cuenta la unión de la rueda y el eje del motor, así como se muestra en la figura 5, el eje soporta el peso del péndulo en la rueda por lo que el momento de inercia debe ser el eje par del momento de fuerzas.

**Figura 7. Vista lateral del péndulo invertido, fuerzas y centro de gravedad**

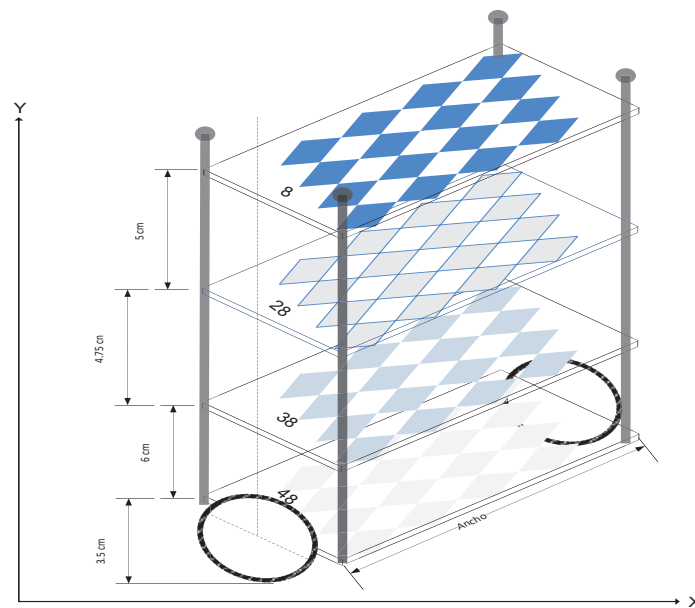


Fuente: Elaboración propia

- **Encontrando el centro de masas**

Como el péndulo invertido no es un cuerpo sólido se calculó el centro de gravedad por partes.

**Figura 8. Ubicación del centro de gravedad**



Fuente: Elaboración propia



$$C. G. = (3.5*48+9.5*38+14.5*28+19.25*8)/108$$

$$C. G. = 9.025 \text{ cm}$$

C. G. se encuentra a : 0.090 metros.

$$L=0.090 \text{ m.}$$

- **Modelado físico y parámetros físicos**

Para realizar el correcto modelado, se usó los siguientes valores, y son datos obtenidos del objeto de estudio, datos reales del entorno físico que rodea y datos de los componentes ya sean motores y sensores (Hernandez et al., 2010).

**Tabla 1. Parámetros físicos considerados para la investigación**

Aceleración de la gravedad	g	9.74 m/s <sup>2</sup> dato universal determinado por experimento	9.74 m/s <sup>2</sup>
Masa de la rueda	m	50 gramos	0.50kg
Radio de las ruedas	r	= 3.5 cm	0.035m
Momento de inercia de las ruedas	Jm	$\frac{MR^2}{2} \text{ kg m}^2$	$\frac{MR^2}{2} \text{ kg m}^2$
Masa del cuerpo del péndulo	M	810g+100g= 910 g	0.910 kg
Altura del cuerpo del péndulo	H	208 cm	0.208 m
Distancia del centro de masa al eje de las ruedas	L	H/2 =104 cm	0.104 m

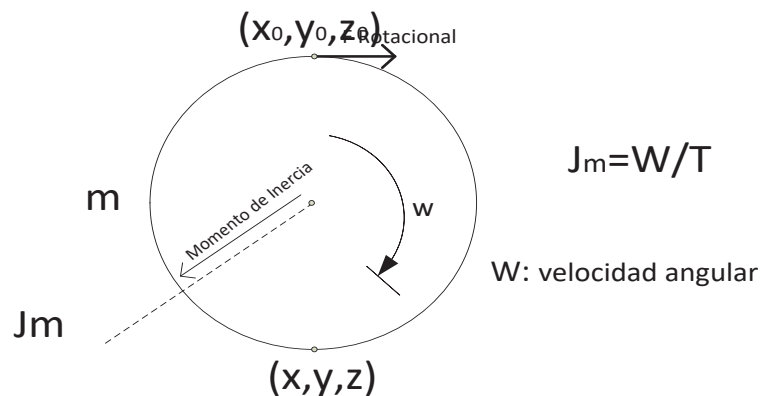
Momento de inercia del péndulo	$J\theta$	$\frac{ML^2}{2} kg m^2$	$\frac{ML^2}{2} kg m^2$
Momento de inercia del motor DC	$J m$	$10^{-5} kg m^2$	$10^{-5} kg m^2$

Fuente: Elaboración propia

- **Análisis de la rueda**

Según la figura 9 no solamente el motor logra controlar la estabilidad y posición de ubicación del péndulo, por lo cual definimos los siguientes parámetros:

**Figura 9. Análisis de la rueda del péndulo**



Fuente: Elaboración propia

$m \ll M$ ; masa del motor es mucho menor que la masa del cuerpo del péndulo. Esto se debe a que  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ , (Serway & Jewet Jr, 2009) y que esta fuerza es igual a  $\vec{F}_{Rotacional} = m \cdot \vec{w}$  porque realizan el mismo trabajo (Serway, 1997b).

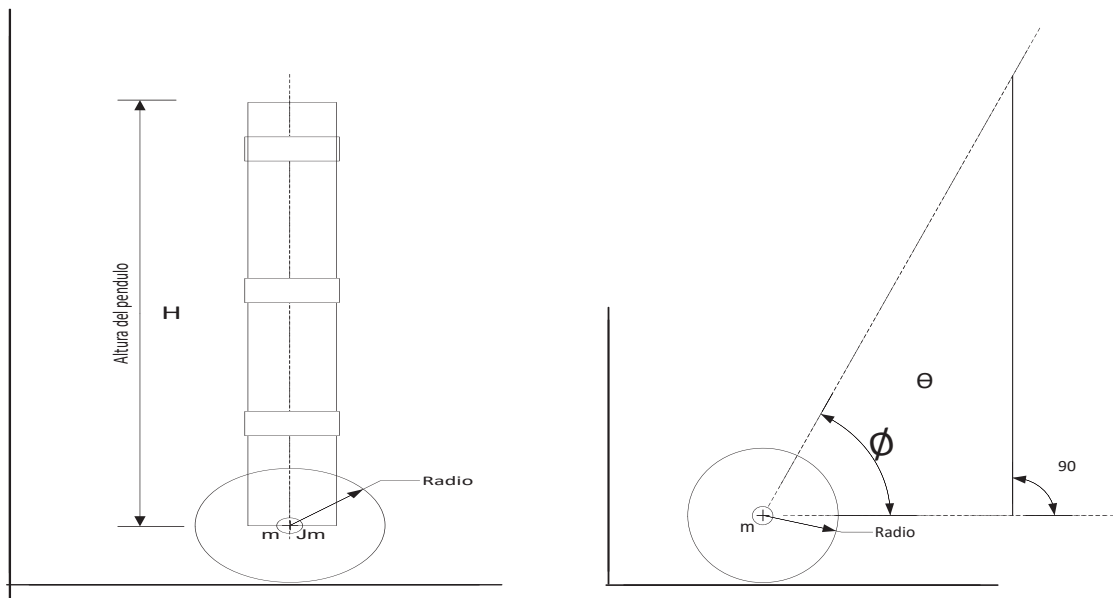
- **Relación de altura**

El radio de la rueda ( $r$ ) es mucho mayor para que el sistema sea más estable:

$$r \gg \text{Sistema estable}$$

para poder determinar la relación exacta del sistema de péndulo invertido es necesario hacer el diagrama de cuerpo libre (DCL) de la rueda y del cuerpo del péndulo trazando un eje imaginario la cual nos servirá como referencia para obtener los cálculos correspondientes.

**Figura 10. Relación altura del péndulo ( $H$ ) y radio de la rueda ( $r$ )**



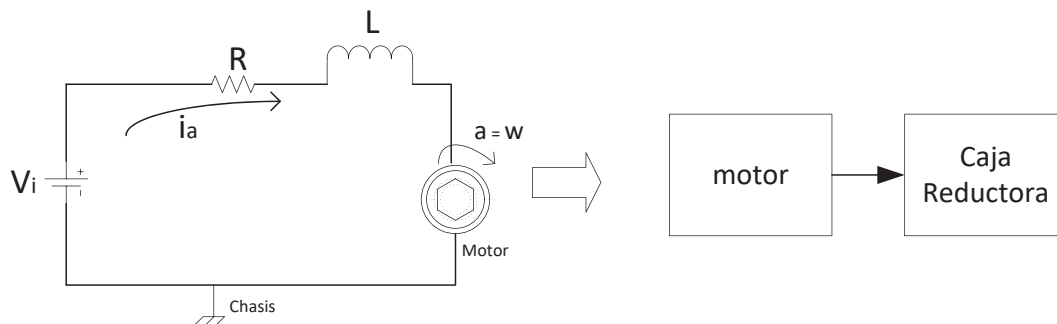
Fuente: Elaboración propia

A medida que  $4*r \cong H$ ; el piso del centro de gravedad se obtiene en condiciones de equilibrio; para hallar el margen de operación del sistema.

- **Análisis eléctrico del motor**

Para realizar el sistema eléctrico tenemos que descomponer el motor en sus funciones básicas elementales (Kuo, 1996).

**Figura 11. Diagrama eléctrico, Diagrama bloques del motor.**



Fuente: Elaboración propia

$$T_1(t) = k_t \times i_a(t) \quad k_t : \text{cte de torque}$$

$$T_1(t) = k_a \times \dot{\theta}(t) \quad k_a : \text{cte de velocidad}$$

Donde:

$V_i$	Voltaje de entrada
$I_o$	Corriente de entrada
$R_a$	Resistencia equivalente
$L_a$	Inductancia equivalente
$e(t)$	Voltaje contra electromotriz
$B(t)$	Coefficiente de fricción
$T_1(t)$	Torque de salida
$Q_1(t)$	Posición del eje del motor
$a_1(t)$	Aceleración del motor

- **Modelado del motor**

Se procedió a evaluar las ecuaciones básicas del motor (Kuo, 1996).

$$V_1(t) = R_a \times i_a(t) + \frac{L \frac{di(t)}{dt}}{\partial t} + e(t)$$

$$V_1(t) = R_a \times i_a(t) + \frac{L \frac{di(t)}{dt}}{\partial t} + e(t)$$

$$L = V_1(s) = R_a I(s) + L(s) \frac{dI(t)}{dt} + K_a(s) \theta(s) \dots\dots\dots(I)$$

- **Modelado del sistema**

Para modelar todo el sistema se recurrió a física elemental, donde el péndulo simple está definido por  $\vec{T}_0 = \vec{r} \times \vec{f}$  (Serway & Jewet Jr, 2009), donde :

$\vec{T}_0$	Momento de Inercia
$\vec{r}$	Radio del vector
$\vec{f}$	Fuerza que se aplica

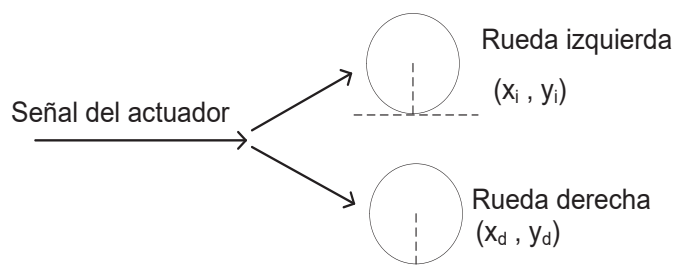
Como el sistema no es lineal; el uso de la fórmula anterior no se podría usar. Por lo que se usa la aproximación, para luego comparar, entonces definimos:

Donde:

$\theta$	Ángulo de rotación de las ruedas
$\emptyset$	Ángulo de inclinación
$(x_i, y_i)$	Posición de la rueda izquierda
$(x_d, y_d)$	Posición de la rueda derecha
$(x_M, y_M)$	Posición de la rueda con respecto al péndulo
$(x_m, y_m)$	Posición de la rueda con respecto a la rueda

En cuanto a las ruedas, se analiza el diagrama del actuador con respecto a los ejes de las ruedas.

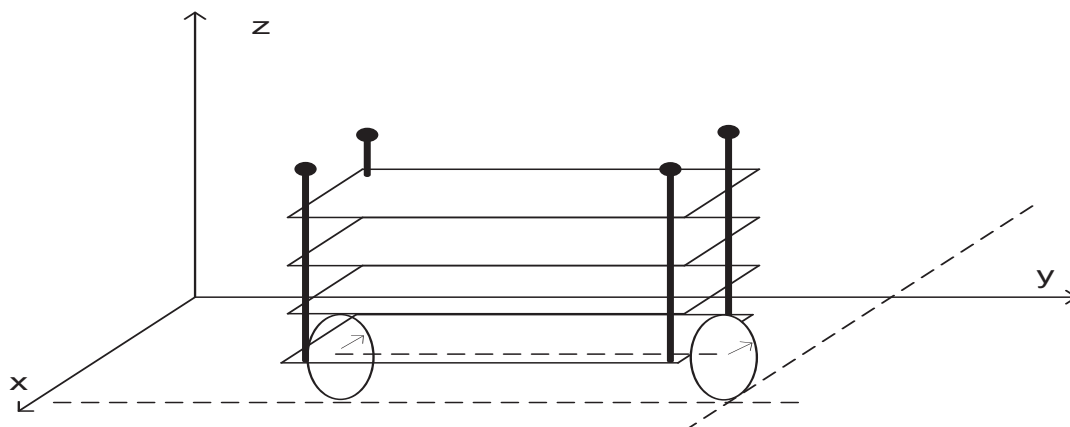
**Figura 12. Diagrama del actuador con respecto a los ejes de las ruedas**



Fuente: Elaboración propia

La señal de péndulo se puede manipular por separado, si analizamos ambas ruedas para que sea más sencillo se analiza en un plano  $(x,y)$ . y no en  $(x,y,z)$ .

**Figura 13. Diagrama del péndulo en el plano XY**



Fuente: Elaboración propia

Por lo tanto, posición de la rueda izquierda y derecha son igual a:

$$x_d = x_i = x_m = R\theta$$

$$y_d = y_i = y_m = R$$

Por posición:

$$X_M = \text{Eje } x$$

$$X_M = x_m + L \sin \phi$$

$$Y_M = y_m + L \cos \phi$$

Pero:

$$(X_M, Y_M) = (x_m + L \sin \phi, y_m + L \cos \phi)$$

$$(X_M, Y_M) = (R\theta + L \sin \phi, R + L \cos \phi)$$

Por conservación de la energía, y sabemos que  $E_{cinetica} = \frac{1}{2} m v^2$ , por (Alonso & Finn, 2000),

donde  $m$  es la masa y  $v$  es la velocidad y la expresión  $x_d = x_i = x_m = R\theta$ , que debe acotarse:

$$\dot{x}_i = \text{velocidad de la rueda izquierda}$$

$$\ddot{x}_i = \text{aceleracion de la rueda izquierda}$$

Llamaremos a  $T_1$  la energía cinética trasnacional total entonces: (Serway & Jewet Jr, 2009)

$$T_1 = \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_d^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}_M^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}_M^2$$

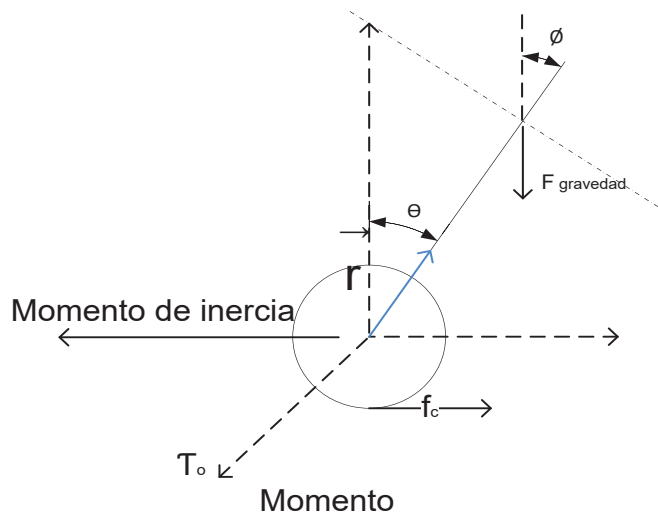
$$T_1 = \frac{1}{2} R \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} R \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{\theta} (R + L \sin \phi))^2 + \frac{1}{2} M (\dot{\theta} (R + L \cos \phi))^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} R \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} R \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M (R \dot{\theta} + L \dot{\phi} \cos \phi)^2 + \frac{1}{2} M (R \dot{\theta} + L \dot{\phi} (-\sin \phi))^2$$

Fijamos que todo está en función de nuestras variables ( $\theta, \phi$ )

Una vez encontrado la energía cinética trasnacional total, se encuentra la energía rotacional para la cual, se obtiene del siguiente diagrama.

**Figura 14. DCL del péndulo para el momento**



Fuente: Elaboración propia

Encontrando el momento con la regla de la mano derecha, se observa la magnitud del vector  $\vec{r}$  conocido como L y considerando el centro de gravedad del cuerpo del péndulo ejerce una fuerza de gravedad, la cual es la única que actúa en el DCL, utilizando la regla de la mano derecha para poder determinar el momento y su dirección.

Si aplicamos la segunda ley de Newton  $\vec{F} = \vec{w} \square m$  (Alonso & Finn, 1998), y que la fuerza es igual momento  $\vec{F} = \tau_0$  y  $\vec{w} = \vec{r}$  entonces:

$$\vec{\tau}_0 = \vec{r} \square m$$

El momento será:

$$M = (masa_{ruedas} + masa_{péndulo}) \square \ddot{\theta}$$

Se plantea para la rueda, como sabemos  $\vec{F} = m \square \vec{a}$  también se puede decir que la fuerza de la rueda es  $J_m$ , la aceleración de la rueda es representado por  $\ddot{\theta}$ , además  $m$  se considera la masa de la rueda:

$$J_m = m_{rueda} \square \ddot{\theta}$$

Recordar que la energía cinética rotacional es  $E_{cinetica} = \frac{1}{2} m \square v^2$  por lo que podemos expresar la energía cinética rotacional total como T2:

$$T_2 = \frac{1}{2} J_m \square \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_m \square \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_\phi \square \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} M \square \dot{y}_M^2$$

- **Ecuación de estado lineal**

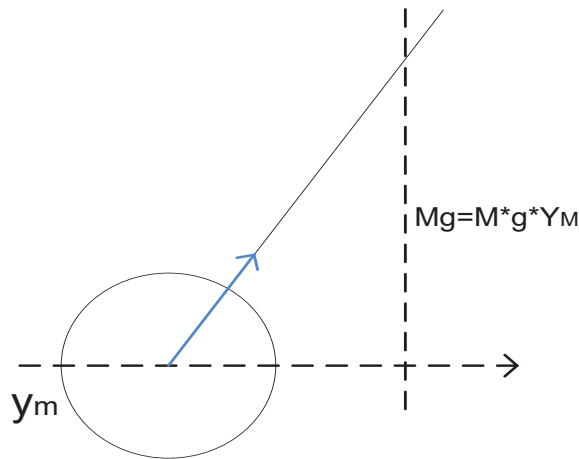
La linealización de sistemas se realizó para el sistema que tiene un comportamiento no lineal, el cual depende mucho del punto donde se haga la linealización, para linealizar la función siguiente.

$$[x = f(x, \theta)]$$

$$x = [r, \phi; \dot{r}, \dot{\phi}; r, \phi; \dot{r}, \dot{\phi}]$$

Con las ecuaciones faltaría la energía potencial gravitatoria, por lo se propuso el DCL

**Figura 15. DCL obtención de energía potencial**



Fuente: Elaboración propia

De donde:

$$U = m \cdot g \cdot y_m + m \cdot g \cdot y_m + M \cdot g \cdot y_M$$

*rueda izq + rueda der + masa del péndulo*

$$U = 2 \cdot m \cdot g \cdot y_m + M \cdot g \cdot y_M$$

$$U = 2 \cdot m \cdot g \cdot y_m + M \cdot g \cdot (y_m + L \cdot \cos \phi)$$

$$U = 2 \cdot m \cdot g \cdot y_m + M \cdot g \cdot (R + L \cdot \cos \phi)$$

Por medio de la conservación de la energía nuevamente se planteó:

$$U = T_1 + T_2 + (\vec{F}_{\text{eléctrica Motor}})$$



Tomando en cuenta la  $\vec{F}_{\text{eléctrica Motor}}$ , por la parte mecánica, por lo tanto podemos aplicar muchos métodos para la linealización como series Taylor, series de LaGrange, series de H'ospital, logaritmos, etc. (Edwards & Penney, 2001) Donde se escogió el método de LaGrange y la de Taylor, veamos cada una de las series.

- **Para la serie de LaGrange**

$$Lag = T_{\text{EnergiaCinetica}} + T_{\text{EnergiaRotacional}} - U_{\text{EnergiaPotencial}}$$

$$Lag = \left[ \frac{1}{2} R \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} R \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M (R \dot{\theta} + L \dot{\phi} \cos \phi)^2 + \frac{1}{2} M (R L \dot{\phi} (-\text{Sen} \phi))^2 \right]$$

$$+ \left[ \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_{\phi} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}_M^2 \right]$$

$$- [2 m g y_m + M g (R + L \cos \phi)]$$

Se evalúa los datos para poder tener un estimado.

**Tabla 2. Datos evaluados por la ecuación de LaGrange**

Angulo en grados	radianes	Sen $\theta$
0°	-> 0	-> 0
1°	min	min
2°	min	min
3°	min	min
...		
9°	max	max
10°	-> $\infty$	-> $\infty$

Fuente: valores numéricos para la ecuación de LaGrange

Cumple solo con los datos o márgenes muy pequeños entonces para valores mayores de 10° y 20°, el sistema es muy inestable

Ángulos  $\theta^\circ \gg 10^\circ$  y  $20^\circ$ . Sistema inestable.

Para el buen desarrollo de la investigación, se propuso un adicional al método de la LaGrange:

$$Lag = T_{Energia\ Cinetica} + T_{Energia\ Rotacional} - U_{Energia\ Potencial} + \vec{F}_{electrica\ Motor}$$

Cumple con los datos o márgenes mayores entonces para valores mayores, desde  $0^\circ \leftrightarrow \pm 20^\circ$ , el sistema es estable.

Ángulos de  $\theta^\circ$

$-20^\circ < \theta^\circ < 20^\circ$ . Sistema es estable.

- **Para la Serie de Taylor**

La serie de Taylor de una función  $f$  real o compleja  $f(x)$  infinitamente diferenciable (Burden et al., 2002), en el entorno de un número real o complejo, en la siguiente serie de potencias:

$$T[f(x), x_0] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots$$

$$T = \theta + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots + \frac{\theta^n}{n!}$$

Esta nueva es muy similar a la serie de Fourier (Burden et al., 2002) en su forma desarrollada, la ventaja de esta serie permite que la linealización permanezca en un mayor rango o margen de variación de nuestro ángulo  $\theta$ , desde  $0^\circ \leftrightarrow 40^\circ$ , el sistema es estable.

$-40^\circ < \theta^\circ < 40^\circ$ . Sistema es estable

Por expansión se tiene:

$$\frac{\theta^2 \square g \square \text{Sen}(x_2 \square \text{Cos } \phi \square (x_2))}{M_0 \square m - \theta^2 \square \text{Cos}^2(\phi)} - \frac{F_0}{M_0 \square m - \theta^2 \square \text{Cos}^2(\phi)} \square x_1 - \frac{\theta \square g \square h \square \text{Cos}(\ddot{\phi})}{M_0 \square m - \theta^2 \square \text{Cos}^2(\ddot{\phi})} \square x_2 + \dots$$

Remplazamos 9 y 7 en  $U = T_1 + T_2 + F_e$

$$F_\theta = [(M \square L \square R \square \text{Cos } \phi) \dot{\phi}] + \frac{1}{2} [(M \square m) R^2 + J_m] - [M \square \phi^2 \square \text{Sen } \phi] \dots (a)$$

Ahora determinaremos la posición usando la teoría de Taylor, sabiendo que:

$$\tau_0 = -k \square \vec{r}$$

Donde  $\tau_0$  es el momento,  $k$  constante del péndulo,  $\vec{r}$  vector del brazo (L distancia), entonces:

$$\tau_0 = M\ddot{R} + J_m\dot{R} + m\ddot{R} + M\omega L(\dot{\phi}^2 \cos\phi - \ddot{\phi} \sin\phi) = F_\phi$$

Donde  $F_\phi$ , es el momento o fuerza en función al ángulo  $\phi$ , entonces:

$$F_\phi = M\ddot{R} + J_m\dot{R} + M\omega L(\dot{\phi}^2 \cos\phi - \ddot{\phi} \sin\phi) \dots (b)$$

En las funciones no se han incluido el parámetro  $\theta$  debido a que el valor tendería a 0 (cero) ya que no se considera la posición del péndulo en los planos (x,y,z).

Si consideramos en vectores de la ecuación lineal de estado:

$$x_1 = f(x, +\alpha) \quad \text{entonces} \quad \rightarrow \quad x = [R, \phi; \dot{R}, \dot{\phi}; R, \theta; \dot{R}, \dot{\theta}]$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ \phi \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad \mu = F_{motor}$$

X es el estado lineal

Donde:

$F_{motor}$  es, la fuerza que sale del motor, que es determinado por:

$$J = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \dot{R}$$

Además, se ha determinado

$$C^\circ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad D = [0]$$

Donde  $C^\circ$  es la matriz identidad por parte de la retroalimentación; D es la posición para que el péndulo este en equilibrio  $\theta=0$ ,  $\phi=0$  y  $L = H$ , luego de realizar operaciones, se encuentra las expresiones:

$$\dot{x} = A x + B v \quad ; \quad \text{donde } v \text{ es la entrada}$$

$$y = C x + D v \quad ; \quad \text{donde } v \text{ es la entrada}$$

Además, se define la perturbación en el péndulo:

$$x = f(x, u) = f(x, \text{escalón})$$

También

$$\dot{x}_i = J_m \cdot f(x, u) = f(\text{espacio}, \text{velocidad})$$

Definimos los espacios de  $x_1$  y  $x_2$ :

$$x_1 = x_3 \cdot \theta$$

$$x_2 = x_4 \cdot \phi$$

Ahora remplazamos en las Ec (a) y Ec (b):

$$\dot{x}_3 = [(M \cdot L \cdot R \cdot \cos \phi) \dot{\phi}] + \frac{1}{2} [(M \cdot m) R^2 + J_m] - [M \cdot \phi^2 \cdot \text{Sen} \phi]$$

$$\dot{x}_4 = M \cdot \ddot{R} + J_m \cdot \dot{R} + M \cdot L (\dot{\phi}^2 \cdot \text{Sen} \phi - \ddot{\phi} \cdot \text{Cos} \phi)$$

Modelo de estado para  $\dot{x}_1, \dot{x}_2$

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = M \cdot L \cdot R \cdot \cos x_4 \cdot x_2 + (M \cdot m \cdot R^2 + J_m) - M \cdot x_4^2 \cdot \text{Sen}(x_4)$$

$$\dot{x}_4 = M \cdot \ddot{R} + J_m \cdot \dot{R} + M \cdot L (x_2^2 \cdot \text{Sen}(x_2) - x_2 \cdot \text{Cos}(x_2))$$

Desarrollando:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} x_4$$

Por matrices inversas

Para  $\dot{x}_3$

$$\dot{x}_3 = \frac{(M \cdot L \cdot R \cdot \cos x_1) (J_m + \frac{M \cdot L}{R \cdot x_2} \cdot \text{Sen}(x_1))}{(2 \cdot m \cdot M) \cdot x_2 + 2 \cdot J_m + x_1 \cdot x_3} + M \cdot g \cdot \text{Sen}(x_1)$$

Para  $\dot{x}_4$

$$\dot{x}_4 = \frac{M L^2 \left( J_m + \frac{M L}{R} \sin(x_1) x_2^2 \right) - \left[ (M L^2 + J_\phi) x_4 g \sin(x_1) - \frac{\cos(x_4)}{R} \right]}{\left[ (2 m M) R^2 + \frac{2 J_m}{x_3} \right] \left( (M L^2 + J_\phi) M L R g \right)}$$

Para  $\dot{x}_2$  entonces en función a  $\theta$

$$\dot{x}_2 = - \frac{M L R \cos x_1}{x_3 L^2 + J_\phi}$$

Para  $\dot{x}_1$  entonces en función a  $\theta$

$$x_1 = \dot{x}_2$$

$$\dot{x}_1 = \ddot{x}_2 ; \text{ respecto a } \theta$$

El sistema de referencia es el punto de operaciones cuando  $\theta=0$ ,  $\dot{\theta}=0$  y  $L = H$ , y se usa la matriz que plantea (Sánchez et al., 2010):

$$c = [1 \ 0]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1\theta} \\ \dot{x}_{2\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ A_\theta(2,1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1\theta} \\ x_{2\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_\theta(2) \end{bmatrix} J_m$$

Y, además

$$y(K T_0) = C x(K T_0)$$

El discretizado escapa al planteo físico (Polo, Molina, & Chica, 2009), y su respectivo control con el diseño electrónico, obteniéndose los siguientes valores:

$$K = 1.4$$

$$K_p = 5.75$$

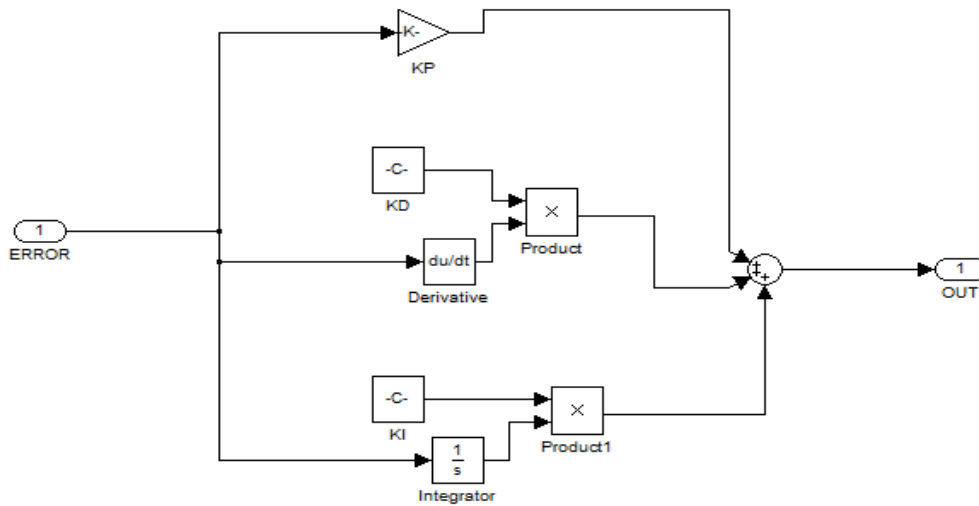
$$K_i = 0.5$$

$$K_d = 21$$

### 1.1.3. Definición del sistema

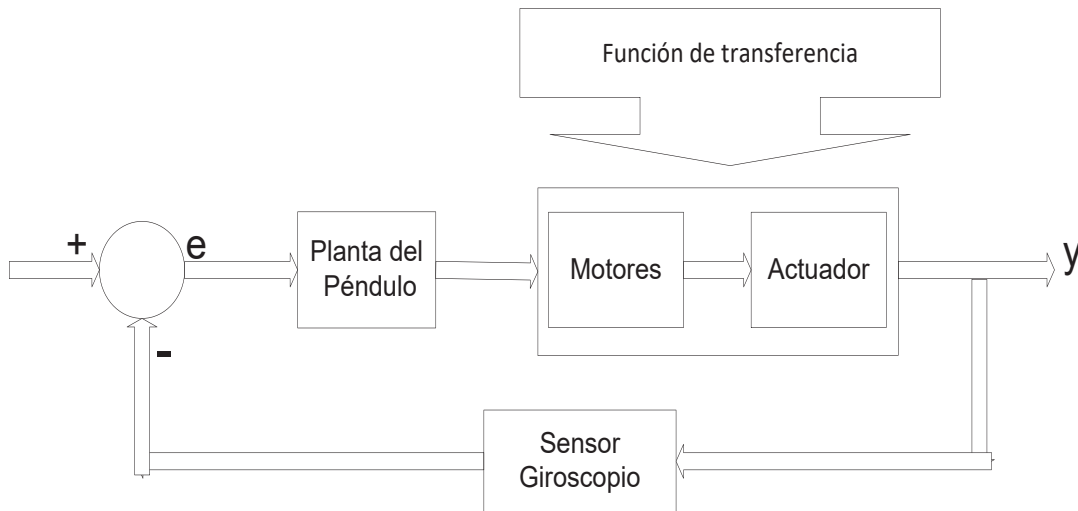
Se presenta el diagrama de bloques del sistema desarrollado; el cual está dividido en dos partes: software (parte superior) y hardware (parte inferior).

**Figura 16. Diagrama de bloques de la elaboración del software**



Fuente: Elaboración propia

**Figura 17. Diagrama de bloques del hardware**



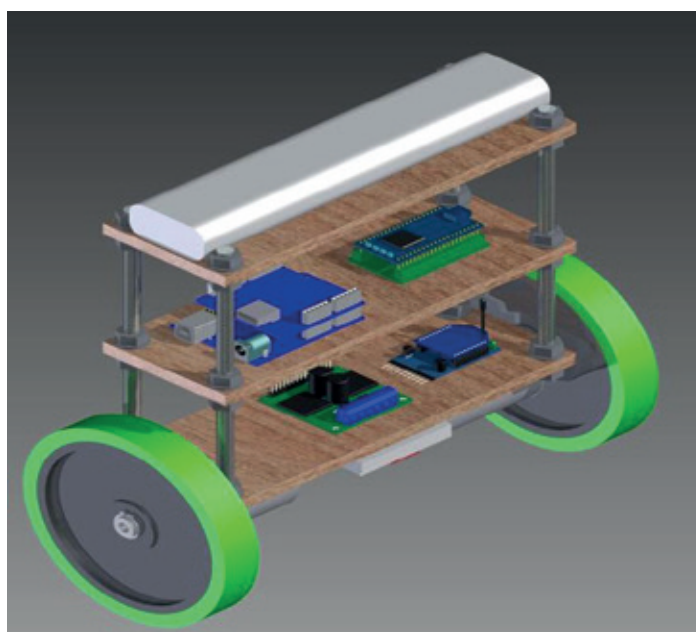
Fuente: Elaboración propia

Cuando un sistema de control controlador PID y los ajustes de los parámetros PID no es un problema fácil, los controladores PID se aplican al control de estabilización y seguimiento de tres tipos de péndulo invertido. La forma de cómo diseñar los controladores PID (Wang, 2011). Se proporciona paso a paso en la investigación. Los resultados de la simulación demuestran que la forma de diseñar controladores PID. El diseño del sistema no solo puede realizar la estabilización y el control de péndulo invertido, sino que también tiene solidez a las perturbaciones externas grandes y rápidas.

## RESULTADOS

El diseño del control para la estabilización de un péndulo invertido, se usó métodos de control clásico, como un controlador Proporcional Integral Derivativo, además un control en cascada, que es un control avanzado, de LaGrange y Taylor método matemático que incluyen restricciones, para poder controlar el equilibrio del péndulo, también se realizó la comprobación de la capacidad de compensar adecuadamente las perturbaciones como variaciones en los parámetros del sistema. La realización del control con el propósito; de aplicar la teoría de las materias de dispositivos electrónicos, control, microcontroladores, programación y motivar a los futuros investigadores, desarrolladores aplicaciones prácticas en dichas materias.

*Figura 18. Propuesta inicial del modelado de un péndulo invertido móvil, usando hardware*

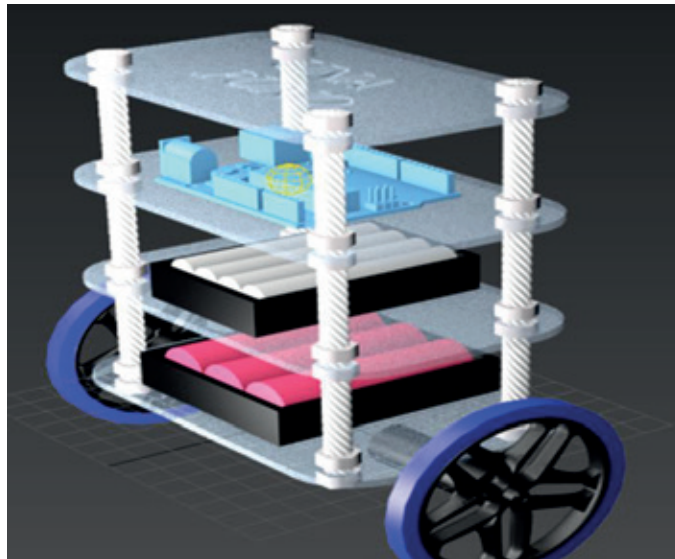


Fuente: Elaboración propia

El sistema de estabilización del péndulo invertido móvil, se implementó con un algoritmo de control que permitió al sistema estar en equilibrio y llevar al péndulo desde una zona de inestabilidad para que esta no se salga del punto de equilibrio.

Se desarrolló en dos plataformas computacionales con características muy diferentes, las cuales brindan distintos puntos de contrastación que sirvieron para la recolección de datos. Estas dos plataformas son libres y no tienen costo alguno.

**Figura 19. Modelado final de un péndulo invertido móvil operativo**



Fuente: Elaboración propia

Primeramente, se desarrolló en el programa “Processing” que es un lenguaje de programación y entorno de desarrollo integrado de código abierto que está basado en Java, que su desarrollo es fácil, y que sirve como medio para la enseñanza y producción de proyectos.

**Figura 20. Código procesing del modelado de un péndulo invertido móvil, usando hardware y software libre**

```
pendulo_3d_arduino_processing | Processing 1.5.1
File Edit Sketch Tools Help
pendulo_3d_arduino_processing
import processing.serial.*;

int sensor0 = 0;
int sensor1 = 0;
int antsensor0=0;
int antsensor1=0;
float antx=0,x=0,y=0;
int inByte;
Serial myPort;
////////////////////////////////////
//import processing.opengl.*;
//import javax.media.opengl.*;
import saito.objloader.*;

// declare that we need a OBJModel and we'll be calling it
OBJModel model;

float rotX;
float rotY;
PImage tex;
```

Fuente: Elaboración propia



Seguidamente se desarrolló el código de equilibrio en “IDE de Arduino”, cuyo lenguaje de programación es similar al entorno de programación C++, cuyo código es abierto y sirve como interface de programación para el uso del microcontrolador “Arduino Uno”, donde se usa como instrumento de recolección de datos para la investigación.

**Figura 21. Código IDE ARDUINO modelado de un péndulo invertido móvil, usando hardware y software libre**



```
pid_kalman_pendulo Arduino 1.5.6-r2
Archivo Editar Programa Herramientas Ayuda
pid_kalman_pendulo $ kalman
#include <Wire.h>
#define MPU 0x68
#define A_R 16384.0
#define G_R 131.0
#define RAD_A_DEG = 57.295779
int16_t AcX, AcY, AcZ, GyX, GyY, GyZ;
unsigned long time;
double dt1;
int angulo, angulo1;
//Angulos
float Acc[2];
float Gy[2];
float Angle[2];
//Kalman
float actAngle;// angles in QUIDS (360° = 2PI = 1204 QUIDS <<<
float ACC_angle;
float GYRO_rate;
int drive = 0;
int setPoint = 0;
```

Fuente: Elaboración propia

Se usó componentes electrónicos compatibles con “ARDUINO”, el cual es una compañía de software libre, perteneciente a una comunidad tecnológica que diseña y manufactura, componentes o hardware, de uso sencillo, para el control o programar a cada módulo.

El proyecto terminado se muestra en la figura 20, que se puede observar el equilibrio del péndulo invertido.

**Figura 22. Modelado de un péndulo invertido**



Fuente: Elaboración propia

## DISCUSIÓN

Un trabajo desarrollado por la Pontificia Universidad Católica del Perú, muestra los resultados de simulaciones y pruebas finales dentro de las simulaciones y experimentaciones realizadas para evaluar el sistema de tracción omnidireccional (Fortunić & Edmundo, 2012). Existen tres tipos de movimientos principales que permiten evaluar el desempeño del sistema en función a los objetivos establecidos. Movimiento lineal recto (M.L.R.), Movimiento circular aproximado (M.C.A.), Movimiento lineal diagonal (M.L.D.), todo el sistema está compuesto de tres motores. En el modelado del péndulo invertido móvil, se optó por reducir el sistema con sólo dos motores para brindarle mayor confiabilidad, usando las leyes fundamentales de la física, para mantener el equilibrio apoyado de las restricciones de LaGrange y Taylor para el óptimo desarrollo del software, donde se puede demostrar matemáticamente el sistema es mucho mejor y con más rango de error que oscila de 0 a  $\pm 40^\circ$  para poder recuperarse de la inestabilidad.

La implementación práctica del controlador PID discreto fue necesario el ajuste de uno de los parámetros del controlador, específicamente la respuesta del sistema estabiliza el péndulo invertido sobre dos ruedas en la posición vertical, y adicionalmente soporta ligeras perturbaciones alrededor de la posición vertical (Sánchez et al., 2010), cabe destacar que el uso de plataformas de marca “Lego” son de propiedad privada las cuales no pueden ser


comercializadas, acotar que el código fuente es cerrado. A diferencia de la investigación realizada donde se consideró como referencia del sistema mencionado la investigación que se realizó uso componentes como en hardware y software que son de código libre, y es algo mejor debido a los componentes de fácil acceso para investigaciones futuras.

También se presenta al vehículo cuyo movimiento está basado en la estabilización de un péndulo invertido. El vehículo ha sido construido a partir de componentes comerciales de bajo coste. Se ha conseguido un sistema de experimentación que permite de forma sencilla el estudio de diversos controladores. En las pruebas realizadas se han utilizado dos tipos de controladores: un controlador lineal óptimo (LQR), y un controlador no lineal basado en moldeo de energía, obteniendo resultados satisfactorios (Viguria et al., 2005). En el caso del diseño y modelado del péndulo invertido móvil solo se realizó un modelado a pequeña escala con componentes libres, usándose un tipo de controlador no lineal para la optimización del trabajo de investigación, el modelado de la investigación realizada es diferente porque solo es un modelado, mientras que el vehículo representa un prototipo de tamaño real.

Sanabria y Hernández (2009), han desarrollado el control de un péndulo invertido simple por métodos realimentados de estados que sus resultados y llevan el péndulo al equilibrio, cabe notar que este péndulo es con una base fija, se encuentra en un limitado eje de acción, en función a su base. En comparación a la investigación de modelado de un péndulo invertido móvil es más versátil resulta mejor para pruebas y obtención de datos en distintos ambientes desconocidos y condiciones adversas.

Además, el modelo matemático que obtuvieron, y el método de ajuste de los parámetros en forma iterativa, mostraron un sistema real en la investigación realizada por (Mallo & Mazzone, 2003), resulta con una ventaja cuando los controladores que diseñaron están basados en dicho modelo, lo cual muestra una desventaja a la hora de obtener datos reales como se presentan en la realidad y es concordante con el trabajo realizado por Sanabria y Hernández (2009), y es diferente a la investigación realizadas debido a la movilidad en distintos entornos por proporcionado por las ruedas que le dan la estabilidad y movilidad.

Asimismo el péndulo invertido móvil está en una base fija donde se restringen muchas de las variables, su control es básico, en la investigación es mucho mejor por el uso de nuevas tecnologías al alcance, se optó por un modelado de un péndulo invertido móvil y el desarrollo



del controlador, para que el modelado a pequeña escala se perfeccione por lo cual el péndulo realizado es mucho mejor a todos los péndulos fijos, debido a que proporciono datos en el transcurso de su funcionamiento en condiciones reales de ambiente.

## CONCLUSIONES

- Se concretizó con éxito el correcto modelado físico usando controladores de PID, comparado con el método de LaGrange y Taylor para un péndulo invertido móvil usando hardware y software libre.
- El diseño de un controlador de estabilización le llevó el sistema del péndulo móvil al punto de equilibrio y estable. con uso de los métodos de LaGrange, Taylor y con el filtro Kalman, para el desarrollo del controlador del sistema.
- Se identificó los materiales componentes electrónicos, mecánicos y software libre, para la realización para el modelado de un péndulo invertido móvil.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alonso, M., & Finn, E. J. (1998). Física, vol. II. Mexico: Prentice Hall.
- Alonso, M., & Finn, E. J. (2000). Física, vol. I. Fondo educativo interamericano.
- Aracil, j., & Gordillo. (2005). El péndulo invertido: un desafío para el control no lineal. (RIAI) Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial, 2(2), 8-19.
- Burden, R. L. F., Burden, J. D. L., & Faires, J. D. (2002). Análisis numérico (Vol. 1). México, D.F: Thomson Learning,. c2002. xiii, 839 p. ; 25 cm; 7a. ed.
- Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2001). Ecuaciones diferenciales. México Pearson Educación, 1147 p. ; 7a. ed.
- Fortunić, P., & Edmundo, J. (2012). Diseño e implementación de un robot móvil con una esfera de tracción omnidireccional. Tesis, Pontificia Universidad Católica Del Perú.
- Hernandez, S. R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2010). Metodología de la investigación (5ta ed. Vol. 1).
- Ipanaqué, W., Belupú, I., Valdiviezo, J., & Vásquez, G. (2002). Laboratorios Virtuales y Remotos para la Experimentación. Juornal: XVI Congreso Latinoamericano, usando como plataforma base diversos software y hardware.(Cancún, Quintana Roo, México).
- Kuo, B. C. (1996). Sistemas de control automático. Mexico: Continental,. 1991. 824 p. : 22 cm. Edición ; 2a ed.: Pearson Educación.
- Mallo, S., & Mazzone, V. (2003). Construcción y diseño de controladores de un péndulo invertido rotante. journal: Automatización y Control Industrial, 120.
- Meng, G., Zhang, W.-M., Huang, H., Li, H.-G., & Chen, D. (2009). Micro-rotor dynamics for micro-electro-mechanical systems (MEMS). Chaos, Solitons & Fractals, 40(2), 538-562.
- Moreno, A. R., Ocola, C. N., & Sosa, L. E. C. (1997). Journal: Diseño e Implementación de un Controlador Difuso TKS Utilizando Sintonía ANFIS. Aplicación: Péndulo Invertido. Instituto de Automatización e Inteligencia Artificial, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima - Perú, 1, 20.
- Polo, M. F. P., Molina, M. P., & Chica, J. G. (2009). Chaotic dynamic and control for micro-electro-mechanical systems of massive storage with harmonic base excitation. Chaos, Solitons & Fractals, 39(3), 1356-1370.

Sanabria, C. A., & Hernández, O. M. (2009b). Control de un péndulo invertido simple por métodos de realimentación de estados. *Tecnura*, 13(25), 59-69.

Sánchez, H., Aguirre, I., & Patete, A. (2010). Construcción y control de un péndulo invertido utilizando la plataforma lego mindstorms nxt. Paper presented at the 4to Congreso iberoamericano de estudiantes de ingeniería eléctrica (IV CIBELEC 2010) 5tas Jornadas de ingeniería eléctrica (V JIELECTRIC 2010).

Serway, R. A. (1997b). *Física. Volumen II* (McGraw-Hill Ed. 2a ed.). Mexico, Ed McGraw-Hill.

Serway, R. A., & Jewet Jr, J. W. (2009). *Física. Volumen I*. Mexico, Ed McGraw-Hill.

Valera, A., Vallés, M., & Cardo, M. (2002). Desarrollo y Control de un péndulo de furuta. *Journal: Ingeniería de Sistemas y Automática. Universidad Politécnica de Valencia. Camino de Vera*, 14, 46022.

Viguria, A., Cano, R., Fiacchini, M., Prieto, A., Vela, B., Rubio, F., . . . Canudas-de-Wit, C. (2005). PPCar (Personal Pendulum Car): Vehículo basado en péndulo invertido. *Journal: Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla*.

Wang, J.-J. (2011). Simulation studies of inverted pendulum based on PID controllers. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 19(1), 440-449.