TEOREMA ESPECTRAL PARA UN OPERADOR LINEAL ACOTADO AUTOADJUNTO[260]

SPECTRAL THEOREM FOR A SELF-ADJOINT BOUNDED LINEAR OPERATOR

Martin Julio Merma-Bellido[261]

Ruben Ticona Huayhua[262]

Miguel Angel Rivas Mamani [263]

Fred Torres-Cruz[264]

Pares evaluadores: Red de Investigación en Educación, Empresa y Sociedad – REDIEES.

---

[260] Derivado del proyecto de investigación: Teorema Espectral para un Operador Lineal Acotado Auto-adjunto

[261] Departamento Académico de Ciencias Básicas, Universidad Nacional de Juliaca, Puno -Perú, mj.merma@unaj.edu.pe
[262] Dep. Académico de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Nacional del Altiplano, Puno Perú, rticona@unap.edu.pe
[263] Dep. Académico de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Nacional del Altiplano, Puno Perú, mrivas@unap.edu.pe
[264] Dep. Acad. de Ingeniería Estadística e Informática. Universidad Nacional del Altiplano, Puno-Perú ftorres@unap.edu..pe

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

25. TEOREMA ESPECTRAL PARA UN OPERADOR LINEAL ACOTADO AUTOADJUNTO[265]

Martin Julio Merma-Bellido[266], Ruben Ticona Huayhua[267], Miguel Angel Rivas Mamani[268], Fred Torres-Cruz[269]

RESUMEN

En este trabajo se realizó un estudio de la teoría espectral para operadores lineales acotados auto-adjuntos $T:H\to H$, demostrando que su espectro $\sigma(T)$ es real; además se demuestra la existencia de una raíz cuadrada positiva para todo operador lineal acotado auto-adjunto positivo, hecho que permite construir una familia espectral de proyecciones (E_λ) asociada a T (Hellman, 2020). Finalmente, se demuestra que dado un operador lineal acotado auto-adjunto $T:H\to H$ este se puede representar como una integral:

$$T=\int_{m^-}^{M}\lambda\, dE_\lambda = \lim_{h(\mathcal{P}_n)\to 0}\sum_{j=1}^{n}\hat{\lambda}_{nj}E(\Delta_{nj})$$

Donde la convergencia del límite se entiende en el sentido de la convergencia uniforme de operadores. Además de eso, se extiende este resultado para el caso de funciones continuas $f:[m,M]\to \mathbf{R}$ resultando: $f(T)=\int_{m^-}^{M} f(\lambda)\,dE_\lambda$

Por otro lado, como en el espacio H existe un producto interior, entonces utilizando la integral de *"Riemann-Stieltjes"*, se prueba que:

$$\langle Tx,y\rangle=\int_{m^-}^{M}\lambda\, dw(\lambda)$$

$$\langle f(T)x,y\rangle=\int_{m^-}^{M} f(\lambda)\,dw(\lambda) \qquad w(\lambda)=\langle E(\Delta_{nj})x,y\rangle$$

[265] Derivado del proyecto de investigación: Teorema Espectral para un Operador Lineal Acotado Auto-adjunto
[266] Departamento Académico de Ciencias Básicas, Universidad Nacional de Juliaca, Puno -Perú, mj.merma@unaj.edu.pe
[267] Dep. Académico de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Nacional del Altiplano, Puno Perú, rticona@unap.edu.pe
[268] Dep. Académico de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Nacional del Altiplano, Puno Perú, mrivas@unap.edu.pe
[269] Dep. Acad. de Ingeniería Estadística e Informática. Universidad Nacional del Altiplano, Puno-Perú ftorres@unap.edu..pe

ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

ABSTRACT

In this work we make a study of the spectral theory of bounded self-adjoint linear operators $T:H\to H$, Is it demonstrated that their spectrum $\sigma(T)$ it is real and proved the existence of a positive root for all positive bounded self-adjoint linear operators, fact that allows to build a spectral family of projections (E_λ) associated to T. Finally, it is demonstrated that given a bounded self-adjoint linear operator $T:H\to H$, it can be represented like an integral:

$$T=\int_{m^-}^{M}\lambda\, dE_\lambda=\lim_{\eta(\mathcal{P}_n)\to 0}\sum_{j=1}^{n}\hat{\lambda}_{nj}E(\Delta_{nj})$$

Where the convergence is understanding in the sense of the uniform convergence of operators. Besides that, this result is extended for the case of continuous functions $f:[m,M]\to\mathbf{R}$, being: $f(T)=\int_{m^-}^{M}f(\lambda)\,dE_\lambda$

On the other hand, like in the space H exist an inner product, then using the integral of Riemann-Stieltjes, is proven that:

$$\langle Tx,y\rangle=\int_{m^-}^{M}\lambda\, dw(\lambda)$$

$$\langle f(T)x,y\rangle=\int_{m^-}^{M}f(\lambda)\,dw(\lambda)\qquad w(\lambda)=\langle E(\Delta_{nj})x,y\rangle$$

PALABRAS CLAVE: Álgebra Lineal, Operadores auto-adjuntos, Teorema espectral.

Keywords: Linear Algebra, Self-adjoint operators, Spectral theorem.

INTRODUCCIÓN

Del álgebra lineal se sabe que si $T: H \to H$ es un operador lineal acotado auto-adjunto con $H = \mathbf{C}^n$; entonces para una base de H, T puede representarse mediante una matriz hermitiana denotada también por T. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de T, supongamos que $\lambda_1 < \lambda_2 <, \ldots, < \lambda_n$ y que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son sus vectores propios correspondientes; luego el conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ constituye una base para H, y todo $x \in H$ tiene una única representación

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad \text{con} \quad \alpha_i \in \mathbf{C}$$

Así

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i x_i.$$

De la última expresión podemos definir un operador proyección $P_i : H \to H$ $x \to \alpha_i x_i$, para todo $x \in H$, P_i es la proyección de H en el espacio propio de T correspondiente al valor propio λ_i, se puede escribir:

$$x = \sum_{i=1}^{n} P_i x \quad \text{y} \quad I = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

donde I es el operador identidad, luego:

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i x \quad \text{y} \quad T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i.$$

Ahora si consideramos $E_\lambda = \sum_{\lambda_i \le \lambda} P_i$, para todo $\lambda \in \mathbf{R}$ (E_λ) representa una familia de proyecciones que satisface $P_i = E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}} = dE_{\lambda_i}$ lo que permite expresar T como $T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i dE_{\lambda_i}$

La idea de este trabajo fue generalizar este resultado para el caso de un operador lineal acotado auto-adjunto $T: H \to H$ donde H es un espacio de Hilbert cualquiera en cuyo caso la sumatoria puede ser transformada en integral para el caso continuo y dE_{λ_i} a una diferencial dE_λ, en donde evidentemente es necesario definir qué tipo de integral sería y quienes serían estos E_λ (Bisgard, 2021).

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

MATERIAL Y MÉTODOS

CONCEPTOS BÁSICOS

Definición 1 Un **espacio normado** es un espacio vectorial X sobre un campo $\mathbf{F}$ $(\mathbf{C}\,\mathrm{o}\,\mathbf{R})$ equipado con una norma, esto es una función:

$$\|\cdot\|: X \to \mathbf{R}$$

Que satisface:

1. $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$
2. $\|x\| = 0$ si, y solamente si, $x = 0$.
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ para todo $x \in X$ y $\alpha \in \mathbf{F}$.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$.

Definición 2 Un **espacio normado** es un espacio vectorial X sobre un campo $\mathbf{F}$ $(\mathbf{C}\,\mathrm{o}\,\mathbf{R})$ equipado con una norma, esto es una función:

$$\|\cdot\|: X \to \mathbf{R}$$

Que satisface:

5. $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$
6. $\|x\| = 0$ si, y solamente si, $x = 0$.
7. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ para todo $x \in X$ y $\alpha \in \mathbf{F}$.
8. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$.

Definición 3 Un espacio normado X es llamado **espacio de Banach**, si es completo, es decir, que toda sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ en X converge a algún punto $x \in X$

.

Definición 4 Un **espacio con producto interno** es un espacio vectorial X sobre un campo $\mathbf{F}$ $(\mathbf{C}\,\mathrm{o}\,\mathbf{R})$ equipado con un producto interno, esto es una función:

$$\langle , \rangle : X \times X \to \mathbf{F}$$
$$(x, y) \to \langle x, y \rangle$$

ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

Tal que para todo $x,y,z \in X$ y $\alpha,\beta \in \mathbf{F}$ satisface las siguientes propiedades:

a. $\langle x,x\rangle \geq 0$

b. $\langle x,x\rangle = 0$, si y solo si $x=0$.

c. $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$.

d. $\langle \alpha x+\beta y,z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$.

e. $\langle x,\alpha y+\beta z\rangle = \bar{\alpha}\langle x,y\rangle + \bar{\beta}\langle x,z\rangle$.

Si $\mathbf{F}=\mathbf{R}$ se define de modo similar y en este caso la propiedad c) es:

f. $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$.

Definición 5 Un **espacio de Hilbert**. Es un espacio vectorial H sobre un campo $\mathbf{F}$ $(\mathbf{C}\,\text{o}\,\mathbf{R})$ junto con un producto interno $\langle,\rangle$ que es completo con la norma definida por:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}\,.$$

En el presente trabajo de tesis en adelante H denotará un espacio de Hilbert.

Teorema 1 **(Desigualdad de Schwarz).** Si $x,y \in H$, entonces $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.

Definición 6 Un **operador** es una función entre espacios vectoriales y **operador lineal** T es un operador tal que:

i. El dominio $D(T)$ de T es un espacio vectorial y el rango $R(T)$ de T es un espacio vectorial sobre el mismo

ii. Para todo $x,y \in D(T)$ y α un escalar:

$$T(x+y) = Tx+Ty$$
$$T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

Además $T: D(T) \subset H \to H$ un operador lineal. Entonces el operador T es **acotado** si existe un número real c tal que para todo $x \in D(T)$:

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b

$$\|Tx\| \leq c\|x\|. \qquad \textbf{(1)}$$

Teorema 2 El **espacio vectorial** $\mathcal{B}(H,H)$ de todos los operadores lineales acotados de H en H es un espacio normado completo (espacio de Banach) con la norma definida por:

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|. \qquad \textbf{(2)}$$

De donde $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$

Definición 7 Sea $T : D(T) \to H$ un operador lineal, entonces T es un **operador lineal cerrado** si su gráfica definida como sigue:

$$g(T) = \{(x, y) / x \in D(T), y = Tx\}$$

es cerrado en $H \times H$, con la norma definida por:

$$\|(x, y)\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema 3 Sea $T : D(T) \subset H \to H$ un operador lineal, entonces:

a. T es cerrado, *si y solo si* $x_n \to x$ $[x_n \in D(T)]$ y $Tx_n \to y$ implican que $x \in D(T)$ y $Tx = y$.

b. Si T es acotado. *Entonces* $D(T)$ es cerrado si y solo si T es cerrado.

Teorema 4 Sea Y cualquier subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H, entonces:

$$H = Y \oplus Y^{\perp}$$

Donde $Y^{\perp}$ es el complemento ortogonal de Y, además, $Y^{\perp}$ es un subespacio cerrado de H, además todo $x \in H$ tiene una única representación:

$$x = y + z \qquad \textbf{(3)}$$

En donde $y \in Y$ y $z \in Y^{\perp}$. En la ecuación (1.1.3) y es llamado la proyección de x en Y, y se define una aplicación.

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

Eidec EDITORIAL

$$\begin{aligned} P &: H \to Y \\ x &\to y = Px \end{aligned}$$

Donde P es llamado proyección de H sobre Y, P es un operador lineal acotado **idempotente** ($P = P^2$).

Teorema 5 **(Limitación uniforme).** Sea $\{T_n\}$ una sucesión de operadores lineales acotados $T_n : H_1 \to H_2$ de un espacio de Banach H_1 en un espacio normado H_2 tal que $\{\|T_n x\|\}$ es acotada para todo $x \in H_1$, es decir

$$\|T_n x\| \leq c_x \quad n = 1, 2, \ldots$$

Donde c_x es un número real. Entonces la sucesión de normas $\|T_n\|$ es acotada, es decir, existe un c tal que:

$$\|T_n\| \leq c \quad n = 1, 2, \ldots$$

Definición 8 Sean X y Y espacios normados, (T_n) es una sucesión de operadores de $\mathcal{B}(X,Y)$ y $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Decimos que:

1. (T_n) converge uniformemente a T si converge con la norma de $\mathcal{B}(X,Y)$, es decir que:

$$\|T_n - T\| \to 0.$$

2. (T_n) converge fuertemente a T si para todo $x \in X$:

$$\|T_n x - Tx\| \to 0.$$

De estas definiciones se observa que si (T_n) converge uniformemente a T, entonces (T_n) converge fuertemente a T.

Teorema 6 Sean $T_n \in \mathcal{B}(X,Y)$, donde X es un espacio de Banach y Y un espacio normado. Si (T_n) es una sucesión fuertemente convergente con límite T entonces $T \in \mathcal{B}(X,Y)$.

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b

De este teorema podemos deducir que si (T_n) converge uniformemente a T, entonces, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ puesto que (T_n) converge fuertemente a T.

Teorema 7 Sean (T_n) y (S_n) sucesiones en $\mathcal{B}(X,Y)$ uniformemente convergentes a T y S respectivamente, entonces (T_nS_n) converge uniformemente a TS.

Definición 9 La función $g:[a,b]\to \mathbf{F}$ es de **variación acotada** en $[a,b]$ si existe una constante $N>0$ tal que para cualquier partición $\mathcal{P}=\{a=t_0<t_1<...<t_n=b\}$ de $[a,b]$:

$$V(g,\mathcal{P})=\sum_{k=1}^{n}|g(t_k)-g(t_{k-1})|\leq N \text{ es finito}$$

Teorema 8 **(Integral de Riemann-Stieltjes).** Sea g de variación acotada y f continua en $[a,b]$. Entonces existe un número J tal que para cualquier $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que cuando $\mathcal{P}=\{t_0<t_1<...<t_n\}$ es una partición de $[a,b]$ con $\|\mathcal{P}\|=\max\{t_k-t_{k-1}/1\leq k\leq n\}<\delta$ entonces:

$$\left|J-\sum_{k=1}^{n}f(t_k)(g(t_k)-g(t_{k-1})\right|<\varepsilon$$

Para cualquier elección de puntos t_k $t_{k-1}\leq t_k\leq t_k$. El número J se llama integral de Riemann-Stieltjes de f con respecto a g sobre $[a,b]$ y se designa por:

$$J=\int_a^b f\,dg=\int_a^b f(t)\,dg(t).$$

Teorema 9 **(Aproximación de Weierstrass, polinomios).** El conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales es denso en el espacio real $C[a,b]$ de todas las funciones continuas $[a,b]$ en $\mathbf{R}$, con la norma definida por:

$$\|x\|=\max_{t\in J}|x(t)|\text{, con } J=[a,b].$$

ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

Entonces para todo x Î $C[a,b]$ y dado un $\varepsilon > 0$ existe un polinomio P tal que $|x(t) - P(t)| < \varepsilon$ para todo $t \in [a,b]$.

Este teorema garantiza que dada una función continua $f : C[a,b]$® $\mathbf{R}$ existe una sucesión de polinomios $P_n : C[a,b]$® $\mathbf{R}$, tales que P_n converge uniformemente a f.

TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ

Teorema 10 (Teorema de representación de Riesz). Si H_1 y H_2 son espacios de Hilbert y $h : H_1$ ´ H_2 ® $\mathbf{F}$ es una forma sesquilineal acotada, entonces h tiene una representación:

$$h(x, y) = \langle Sx, y \rangle . \qquad \textbf{(4)}$$

Donde $S : H_1$ ® H_2 es un operador lineal acotado y S está únicamente determinado por h y tiene norma.

$$\|h\| = \|S\| . \qquad \textbf{(5)}$$

OPERADORES ADJUNTOS

Definición 10 Sea $T : H_1$ ® H_2 un operador lineal acotado, donde H_1 y H_2 son espacios de Hilbert. Entonces el **operador adjunto** de T es un operador $T^* : H_2$ ® H_1 tal que para todo x Î H_1 y y Î H_2**:**

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle . \qquad \textbf{(6)}$$

Teorema 11 Para todo operador T existe y es único el operador T^* el cual es lineal acotado con norma:

$$\|T\| = \|T^*\| . \qquad \textbf{(7)}$$

OPERADORES AUTO-ADJUNTOS

Definición 11 Sea $T : H$ ® H un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert H. Entonces T es **auto-adjunto o Hermitiano** si $T = T^*$ (Sunder, 2016).

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b

Eidec EDITORIAL

Teorema 12 Sea $T: H \to H$ un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert H. Entonces:

a. Si T es auto-adjunto. Entonces $\langle Tx, x\rangle$ es real para todo $x \in H$.

b. Si H es complejo y $\langle Tx, x\rangle$ es real para todo $x \in H$. Entonces el operador T es auto-adjunto.

ESPECTRO DE UN OPERADOR

El espectro de un operador es una generalización del conjunto de valores propios de una matriz y en el caso continuo tiene propiedades importantes que serán de nuestra utilidad (Kubrusly, 2012).

Definición 12 Sea $T: D(T) \to H$ un operador lineal. Donde H es un espacio de Hilbert. Si $\lambda \in \mathbf{C}$, se define los operadores:

- $T_\lambda = T - \lambda I$ el cual es un operador lineal, donde I es el operador identidad.
- $R_\lambda = R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1}$ siempre que T_λ tenga inversa, R_λ se llama **resolvente** de T.

Definición 13 Sea $H \neq 0$ un espacio de Hilbert y sea $T: D(T) \to H$ un operador lineal. Un **valor regular** λ de T es un número complejo tal que:

(R1) R_λ existe.

(R2) R_λ es acotado.

(R3) R_λ se define en un conjunto que es denso en H.

El **conjunto resolvente** $\rho(T)$ de T es el conjunto de valores regulares λ de T. $\sigma(T) = \mathbf{C} - \rho(T)$ es el **espectro** de T y un elemento de $\sigma(T)$, λ se llama un **valor espectral** de T.

Definición 14 (Radio espectral). Dado un espacio de Hilbert H, El radio espectral $r_\sigma(T)$ de un operador $T \in \mathcal{B}(H, H)$ se define como:

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Observación De la ecuación (1.5.9) es obvio para el radio espectral de un operador lineal T en un espacio de Hilbert se tiene que:

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

$$r_\sigma(T) \leq \|T\|. \qquad \textbf{(8)}$$

Teorema 13 Sea H un espacio de Hilbert, $T \in \mathcal{B}(H,H)$ y $\lambda, \mu \in \rho(T)$ entonces:

a. El resolvente R_λ de T satisface:

$$R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda \quad (\lambda, \mu \in \rho(T)). \qquad \textbf{(9)}$$

b. R_λ conmuta con cualquier $S \in \mathcal{B}(H,H)$ que conmute con T.

c. Además de eso:

$$R_\mu R_\lambda = R_\lambda R_\mu. \qquad \textbf{(10)}$$

TEORÍA ESPECTRAL PARA OPERADORES LINEALES

PROPIEDADES ESPCETRALES

Teorema 14 Sea $T : H \to H$ un operador lineal acotado auto-adjunto (Colombo et al., 2018) , entonces:

a. Todos los valores propios de T (si existen) son reales.

b. Vectores propios correspondientes a diferentes valores propios son ortogonales.

Teorema 15 Sea $T : H \to H$ un operador lineal acotado auto-adjunto y un número λ que pertenece al conjunto resolvente $\rho(T)$, si y sólo si existe un $c > 0$ tal que para cualquier $x \in H$:

$$\|T_\lambda x\| \geq c\|x\| \quad (T_\lambda = T - \lambda I).$$

Teorema 16 El espectro $\sigma(T)$ de un operador lineal acotado auto-adjunto $T : H \to H$, es real.

Teorema 17 El espectro $\sigma(T)$ de un operador lineal acotado auto-adjunto $T : H \to H$ está contenido en el intervalo cerrado $[m, M] \subset \mathbf{R}$, donde:

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle \text{ y } M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle.$$

Para cualquier operador lineal acotado auto-adjunto en un espacio de Hilbert H, se tiene:

ISBN: 978-958-53965-3-1 DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b

$$\|T\| = \max\{|m|,|M|\} = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$$

OPERADORES POSITIVOS

Definición 15 Sean T_1 y T_2 operadores lineales acotados auto-adjuntos en un espacio de Hilbert H, se dice que

$$T_1 \le T_2 \text{ si y solo si } \langle T_1x, x\rangle \le \langle T_2x, x\rangle \text{ para todo } x \in H.$$

Definición 16 Un operador lineal acotado auto-adjunto $T : H \to H$ **es positivo** ($T \ge 0$), si y solo si $\langle Tx, x\rangle \ge 0$ para todo $x \in H$.

Una relación entre las dos últimas definiciones es como sigue:

$$T_1 \le T_2 \text{ si y solo si } T_2 - T_1 \ge 0$$

La suma de dos operadores positivos es también positiva.

Teorema 18 Si S y T son operadores lineales acotados auto-adjuntos positivos que conmutan es decir $ST = TS$ en un espacio de Hilbert H, entonces el producto TS es positiva.

Teorema 19 Sea $\{T_n\}$ una sucesión de operadores lineales acotados auto-adjuntos en un espacio de Hilbert H supongamos que:

$$T_1 \le T_2 \le \ldots \le T_n \le \ldots \le K$$

Donde K es también un operador lineal acotado auto-adjunto en H. Supongamos que los operadores K y T_j todos conmutan entre sí. Entonces la sucesión $\{T_n\}$ es fuertemente convergente ($T_nx \to Tx$ para todo $x \in H$) y el operador límite T es lineal, acotado y auto-adjunto y además satisface $T \le K$.

Teorema 20 Sea $\{T_n\}$ una sucesión de operadores lineales acotados auto-adjuntos en un espacio de Hilbert H supongamos que:

$$T_1 \ge T_2 \ge \ldots \ge T_n \ge \ldots \ge K$$

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

Donde K es también un operador lineal acotado auto-adjunto en H. Supongamos que los operadores K y T_j todos conmutan entre sí. Entonces la sucesión $\{T_n\}$ es fuertemente convergente y el operador límite T es lineal, acotado y auto-adjunto y además satisface $T \geq K$.

Definición 17 Sea $T : H \to H$ un operador lineal acotado auto-adjunto positivo. Entonces un operador lineal acotado auto-adjunto S se llama la **raíz cuadrada** de T si:

$$S^2 = T \qquad \textbf{(11)}$$

Si $S \geq 0$ entonces S se llama la **raíz cuadrada positiva** de T y se denota por $S = T^{\frac{1}{2}}$.

Teorema 21 Todo operador lineal acotado auto-adjunto positivo $T : H \to H$ tiene una raíz cuadrada positiva S, la cual es única. Este operador S conmuta con cualquier operador lineal acotado en H que conmuta con T.

OPERADORES DE PROYECCIÓN

Sea H un espacio de Hilbert. Entonces H puede representar como la suma directa de un subespacio cerrado Y y su complemento ortogonal $Y^{\perp}$ es decir:

$$\begin{aligned} &H = Y \oplus Y^{\perp} \\ &x = y + z \qquad (y \in Y, z \in Y^{\perp}) \end{aligned} \qquad \textbf{(12)}$$

Definición 18 Como la suma es directa, y es único para cualquier $x \in H$ entonces la ecuación (2.3.1) define un operador lineal acotado

$$\begin{aligned} P : H &\to H \\ x &\to Px = y \end{aligned} \qquad \textbf{(13)}$$

P es llamado el **operador proyección ortogonal o proyección de** H **sobre** Y. Entonces un operador lineal $P : H \to H$ es una proyección en H si un subespacio cerrado Y de H es el rango de P, el complemento ortogonal $Y^{\perp}$ es el núcleo de P y la restricción $P|_Y$ es el operador identidad en Y.

ISBN: 978-958-53965-3-1 DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b
Eidec EDITORIAL

Nótese que la ecuación (2.3.1) puede escribirse como sigue:

$$x = y + z = Px + (I - P)x.$$

Esto muestra que la proyección de H sobre $Y^{\perp}$ es el operador $I - P$.

Teorema 22 Un operador lineal acotado $P : H \to H$ es una proyección, si y solo si P es auto-adjunto e idempotente $(P^2 = P)$.

Teorema 23 Para cualquier proyección P en un espacio de Hilbert H, se tiene que:

1. $\langle Px, x \rangle = \|Px\|^2$.
2. $P \geq 0$.
3. $\|P\| \leq 1$ y $\|P\| = 1$ si $P(H) \neq \{0\}$.

Teorema 24 En referencia al producto (compuesta de funciones) de proyecciones en un espacio de Hilbert H, se tiene:

a. Si P_1 y P_2 son proyecciones entonces $P = P_1P_2$ es una proyección en H, si y solo si las proyecciones P_1 y P_2 conmutan $P_1P_2 = P_2P_1$ y en este caso P proyecta H sobre $Y = Y_1 \cap Y_2$ dónde $Y_j = P_j(H)$.

b. Dos subespacios cerrados Y y V de H son ortogonales si solo si las correspondientes proyecciones satisfacen $P_Y P_V = 0$.

Teorema 25 Si P_1 y P_2 son proyecciones en un espacio de Hilbert H, entonces:

a. La suma $P = P_1 + P_2$ es una proyección en H si y solo si $Y_1 = P_1(H)$ y $Y_2 = P_2(H)$ son ortogonales.

b. Si $P = P_1 + P_2$ es una proyección entonces P proyecta H sobre $Y = Y_1 \oplus Y_2$.

Teorema 26 Sean P_1 y P_2 proyecciones definidas en un espacio de Hilbert H. Si $Y_1 = P_1(H)$ y $Y_2 = P_2(H)$ son los subespacios sobre los cuales H es proyectado por P_1, P_2

ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

Eidec EDITORIAL

y $N(P_1)$ y $N(P_2)$ los núcleos de estas proyecciones, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $P_1P_2 = P_2P_1 = P_1$.
2. $\|P_1x\| \le \|P_2x\|$.
3. $P_1 \le P_2$.
4. $N(P_2) \subset N(P_1)$
5. $Y_1 \subset Y_2$

FAMILIA ESPECTRAL

Establecemos la familia espectral asociada a un operador lineal acotado auto-adjunto(Helson, 1986), que nos servirá para su representación espectral siendo $T : H \to H$ un operador lineal auto-adjunto en el espacio vectorial $H = \mathbf{C}^n$; para una base de $\mathbf{C}^n$, T puede representarse mediante una matriz hermitiana denotada también por T. El espectro $\sigma(T)$ en este caso consiste en los valores propios de la matriz, que además son reales, por la auto-adjuntividad de T (Blanchard & Bruening, 2003).

Sean $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ los valores propios de T, supongamos que $\lambda_1 < \lambda_2 <, ..., < \lambda_n$ y que $x_1, x_2, ..., x_n$ son sus vectores propios correspondientes; luego el conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ constituye una base para H, y todo $x \in H$ tiene una única representación

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad \text{con } \alpha_i \in \mathbf{C}$$

Así

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i x_i .$$

De la última expresión podemos definir un operador proyección

$$P_i : H \to H$$

$$x \to \alpha_i x_i, \text{ para todo } x \in H,$$

P_i es la proyección de H en el espacio propio de T correspondiente al valor propio λ_i, se puede escribir

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

$$x = \sum_{i=1}^{n} P_i x \quad \text{y} \quad I = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

donde I es el operador identidad, luego

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i x \ \text{ y } \ T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i .$$

Esta es la representación de T en términos de las proyecciones que se consigue a partir del espectro de T (Colombo et al., 2018). Esta construcción no es conveniente para generalizar a espacios de dimensión infinita, ya que el espectro de un operador lineal acotado auto-adjunto puede ser más complicado. por el hecho que no puede tener valores propios En lugar de las proyecciones $P_1, P_2, ..., P_n$ tomaremos sumas de proyecciones definidas por:

$$E_\lambda = \sum_{\lambda_i \leq \lambda} P_i \ \text{ para todo } \lambda \in \mathbf{R}.$$

Esto constituye una familia de proyecciones de parámetro λ, donde E_λ es una proyección de H sobre el subespacio V_λ generado por los x_i para los cuales $\lambda_i \leq \lambda$. E_λ crece de 0 a I, conforme crecen los valores propios de T E_λ no varía para λ en un intervalo que no tenga valores propios. Así podemos ver que E_λ tiene las siguientes propiedades

$E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$ si $\lambda < \mu$.

$E_\lambda = 0$ si $\lambda < \lambda_1$.

$E_\lambda = I$ si $\lambda \geq \lambda_n$.

$E_{\lambda^+} = \lim_{\mu \to \lambda^+} E_\mu = E_\lambda$.

Esta familia y sus propiedades, podemos generalizarla para el caso infinito como sigue:

Definición 19 Una **familia espectral real** es una familia $x = (E_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$ de proyecciones E_λ definidas en un espacio de Hilbert H (de cualquier dimensión) que satisface:

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

a. $E_\lambda \leq E_\mu$, si $\lambda < \mu$ (lo que implica que $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$).

b. $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} E_\lambda x = 0$.

c. $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E_\lambda x = x$.

d. $E_{\lambda^+} x = \lim\limits_{\mu \to \lambda^+} E_\mu x = E_\lambda x$ para todo $x \in H$.

De la definición anterior se ve que la familia espectral real puede definirse como la aplicación:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\to \mathcal{B}(H,H) \\ \lambda &\to E_\lambda \qquad \text{para todo } \lambda \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

$\mathcal{B}(H,H)$ es el espacio de todos los operadores lineales acotados de H en H

x se llama una familia espectral en un intervalo $[a,b]$ si

$$E_\lambda = 0 \text{ para } \lambda < a;\ E_\lambda = I \text{ para } \lambda \geq b$$

esta familia espectral es de especial interés, ya que el espectro de un operador lineal acotado auto-adjunto este contenido en el intervalo $[m,M]$, (Colombo et al., 2018).

Volviendo al caso de dimensión finita, si suponemos que

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= P_1 \\ E_{\lambda_2} &= P_1 + P_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ E_{\lambda_n} &= P_1 + P_2 + \ldots + P_n \end{aligned}$$

y en forma inversa

$$\begin{aligned} P_1 &= E_{\lambda_1} \\ P_j &= E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}} \qquad j = 2,\ldots,n \end{aligned}$$

como E_λ permanece invariable si $\lambda \in [\lambda_{j-1}, \lambda_j)$, entonces

$$P_j = E_{\lambda_j} - E_{\lambda_j^-}$$

así

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

$$x=\sum_{j=1}^{n} P_j x=\sum_{j=1}^{n}\left(E_{\lambda_j}-E_{\lambda_j^-}\right)x$$

$$Tx=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P_j x=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\left(E_{\lambda_j}-E_{\lambda_j^-}\right)x$$

si consideramos $dE_\lambda = E_\lambda - E_{\lambda^-}$, se obtiene

$$T=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j dE_{\lambda_j}.$$

Esta es la representación espectral de un operador lineal acotado auto-adjunto T en un espacio de Hilbert $n-$dimensional H

Para generalizar esta última idea para el caso de dimensión infinita necesitamos definir algunos operadores que nos servirán luego.

Sea $T:H\to H$ un operador lineal acotado auto-adjunto en un espacio de Hilbert H, entonces definimos los siguientes operadores

$T_\lambda = T-\lambda I$

$B_\lambda = (T_\lambda^2)^{\frac{1}{2}}$ (La raíz cuadrada positiva de T_λ^2)

$T_\lambda^+ = \frac{1}{2}(B_\lambda + T_\lambda)$ (parte positiva de T_λ)

$T_\lambda^- = \frac{1}{2}(B_\lambda - T_\lambda)$ (parte negativa de T_λ)

$E_\lambda : H\to N(T_\lambda^+)$ (El operador proyección)

de donde se observa también que:

$$T_\lambda = T_\lambda^+ - T_\lambda^-$$
$$B_\lambda = T_\lambda^+ + T_\lambda^-$$

Lemma: Los operadores recientemente definidos tienen las siguientes propiedades:

a. B_λ, T_λ^+ y T_λ^- son acotados y auto-adjuntos.

b. B_λ, T_λ^+ y T_λ^- conmutan con cualquier operador lineal acotado que conmuta con T_λ.

c. E_λ conmuta con cualquier operador lineal acotado auto-adjunto que conmuta con T_λ.

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

d. Además:

1. $T_\lambda^+ T_\lambda^- = T_\lambda^- T_\lambda^+ = 0$.
2. $T_\lambda^+ E_\lambda = E_\lambda T_\lambda^+ = 0$ y $T_\lambda^- E_\lambda = E_\lambda T_\lambda^- = T_\lambda^-$.
3. $T_\lambda E_\lambda = -T_\lambda^-$ y $T_\lambda (I - E_\lambda) = T_\lambda^+$.
4. $T_\lambda^+ \geq 0$ y $T_\lambda^- \geq 0$.
5. Además, para cualquier $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ y τ los siguientes operadores todos conmutan:

Teorema 27 Sea $T : H \rightarrow H$ un operador lineal acotado auto-adjunto en un espacio de Hilbert H y E_λ (λ real) la proyección de H sobre el núcleo $N(T_\lambda^+)$ de la parte positiva T_λ^+ de T_λ, entonces $\mathcal{E} = (E_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$ es una familia espectral en el intervalo $[m, M] \subset \mathbf{R}$.

RESULTADOS

REPRESENTACIÓN ESPECTRAL PARA OPERADORES LINEALES ACOTADOS AUTO-ADJUNTOS

Teorema 28 Sea $T : H \rightarrow H$ un operador lineal acotado auto-adjunto en un espacio de Hilbert H. Entonces: T, tiene una representación

$$T = \int_{m^-}^{M} \lambda \, dE_\lambda \qquad \textbf{(14)}$$

donde $\mathcal{E} = (E_\lambda)$ es una familia espectral asociada con T; la integral se entiende en el sentido de la convergencia en la norma de $\mathcal{B}(H,H)$; además para todo $x, y \in H$

$$\langle Tx, y \rangle = \int_{m^-}^{M} \lambda \, dw(\lambda), \quad w(\lambda) = \langle E_\lambda x, y \rangle \qquad \textbf{(15)}$$

donde la integral es la integral ordinaria de Riemann-Stieltjes.

Nota. m^- se escribe para indicar que uno debe tomar en cuenta una contribución en $\lambda = m$ que ocurre si $E_m \neq 0$, $(m \neq 0)$, es decir si $a < m$

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

Corolario Si P es un polinomio en λ con coeficientes reales, es decir, $P(\lambda)=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_0$, entonces el operador $P(T)$ definido por $P(T)=a_nT^n+a_{n-1}T^{n-1}+...+a_0I$, tiene la representación espectral

$$P(T)=\int_{m^-}^{M}P(\lambda)dE_\lambda \qquad \textbf{(16)}$$

y para todo $x,y\in H$,

$$\langle P(T)x,y\rangle=\int_{m^-}^{M}P(\lambda)dw(\lambda),\ w(\lambda)=\langle E_\lambda x,y\rangle \qquad \textbf{(17)}$$

Teorema 29 Sea T como en el teorema 3.1.1 y sean P, P_1 y P_2 polinomios con coeficientes reales. Entonces:

a. $P(T)$ es auto-adjunto.

b. $P(\lambda)=aP_1(\lambda)+bP_2(\lambda)$ entonces $P(T)=aP_1(T)+bP_2(T)$.

c. $P(\lambda)=P_1(\lambda)P_2(\lambda)$ entonces $P(T)=P_1(T)P_2(T)$.

d. Si $P(\lambda)\geq 0$ para todo $\lambda\in[m,M]$ entonces $P(T)\geq 0$.

e. Si $P_1(\lambda)\leq P_2(\lambda)$ para todo $\lambda\in[m,M]$, entonces $P_1(T)\leq P_2(T)$.

f. $\|P(T)\|\leq \max_{\lambda\in J}|P(\lambda)|$ donde $J=[m,M]$.

g. Si un operador lineal acotado conmuta con T, también conmuta $P(T)$.

EXTENSIÓN DEL TEOREMA A FUNCIONES CONTINUAS

Si $P(T)=a_nT^n+a_{n-1}T^{n-1}+...+a_0I$, donde T es un operador lineal acotado auto-adjunto y P es un polinomio con coeficientes reales, se quiere extender el teorema a operadores $f(T)$ donde f es una función continua de valores reales (Bagarello et al., 2015): Consideremos $T:H\to H$ un operador lineal acotado auto-adjunto y $f:[m,M]\to\mathbf{R}$ una función continua.

Como f es continua en $[m,M]$, entonces por el teorema de aproximación de Weierstrass, existe una sucesión de polinomios $\{P_n\}$ con coeficientes reales tales que:

$$P_n(\lambda)\to f(\lambda),\ \text{para todo } \lambda\in[m,M].$$

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*
Eidec EDITORIAL

De una manera similar se tiene una sucesión de operadores lineales acotados auto-adjuntos $\{P_n(T)\}$, luego por el teorema 3.1.2 f) se obtiene

$$\|P_n(T) - P_r(T)\| \leq \max_{\lambda \in J} |P_n(\lambda) - P_r(\lambda)|, \ J = [m, M].$$

Como $P_n(\lambda) \to f(\lambda)$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbf{N}$ tal que, para todo $n, r > N$

$$\|P_n(T) - P_r(T)\| \leq \max_{\lambda \in J} |P_n(\lambda) - P_r(\lambda)| < \varepsilon$$

de donde :

$$\|P_n(T) - P_r(T)\| < \varepsilon \, .$$

Entonces $\{P_n(T)\}$ es de Cauchy en el espacio $\mathcal{B}(H, H)$, el cual es de Banach por el teorema 1.1.13 por lo tanto la sucesión tiene un límite en $\mathcal{B}(H, H)$, el cual denotaremos por $f(T)$; así

$$P_n(T) \to f(T).$$

Para garantizar que $f(T)$, está bien definida, es necesario demostrar que $f(T)$ solo depende de f y no de la particular elección de los polinomios P_n.

En efecto, sea $\{\tilde{P}_n\}$ otra sucesión de polinomios con coeficientes reales tales que

$$\tilde{P}_n(\lambda) \to \tilde{f}(\lambda)$$

luego por el teorema 3.1.3 f) y la completitud de $\mathcal{B}(H, H)$, se obtiene $\tilde{f}(T) \in \mathcal{B}(H, H)$, tales que

$$\tilde{P}_n(T) \to \tilde{f}(T) \, .$$

Ahora para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbf{N}$ tales que si $n > N$, entonces

$$|\tilde{P}_n(\lambda) - P_n(\lambda)| \leq |\tilde{P}_n(\lambda) - f(\lambda)| + |f(\lambda) - P_n(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

de donde por el teorema 3.1.3 f)

$$\|\tilde{P}_n(T) - P_n(T)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

es decir que

$$\|\tilde{P}_n(T) - P_n(T)\| \to 0$$

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

luego por la desigualdad triangular

$$\left\|\tilde{f}(T)-f(T)\right\| \leq \left\|\tilde{f}(T)-\tilde{P}_n(T)\right\|+\left\|\tilde{P}_n(T)-P_n(T)\right\|+\left\|P_n(T)-f(T)\right\| \to 0$$

de donde

$$\left\|\tilde{f}(T)-f(T)\right\|=0$$
$$\tilde{f}(T)-f(T)=0$$
$$\tilde{f}(T)=f(T).$$

Teorema 30 Si $T: H \rightarrow H$ es un operador lineal acotado auto-adjunto en un espacio de Hilbert H y f una función continua de valor real en $[m, M]$, entonces $f(T)$ tiene la representación espectral:

$$f(T)=\int_{m^-}^{M} f(\lambda)\, dE_\lambda .$$

Donde $\xi=(E_\lambda)$ es una familia espectral asociada a T, y para todo $x, y \in H$

$$\langle f(T)x, y\rangle=\int_{m^-}^{M} f(\lambda)\, dw(\lambda), \qquad w(\lambda)=\langle E_\lambda x, y\rangle$$

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

DISCUSIÓN

1. Existe un teorema espectral en el álgebra lineal que dice que toda matriz auto-adjunta de orden $n \times n$ puede diagonalizarse (Pankov, 2007), es decir que dado un operador auto-adjunto T sobre un espacio n-dimensional complejo $\mathbf{V}$, existe un operador unitario $U:\mathbf{V} \to \mathbf{C}^n$ y números reales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tal que $\left(UTU^{-1}x\right)_i = \lambda_i x_i$ para cada $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, este también puede generalizarse a un teorema espectral para el caso de espacios de Hilbert de dimensión infinita en el sentido de que si T es un operador acotado auto-adjunto sobre un espacio de Hilbert H (Kubrusly, 2012), existe una medida μ sobre un espacio X y un operador unitario $U : H \to L^2(X, \mu)$ tal que $\left(UTU^{-1}\xi\right)(x) = f(x)\xi(x)$ para alguna función medible f de valores reales definida sobre X; en este trabajo no concluimos este resultado pero sería recomendable demostrarlo.

2. Existe una familia más grande que los operadores lineales acotados que son los operadores lineales no acotados (Blanchard & Bruening, 2003), así por ejemplo en la Mecánica Cuántica se tiene también el espacio complejo de Hilbert $L^2(-\infty, \infty)$, cuyos elementos ψ, φ se llaman estados y los operadores lineales auto adjuntos Q, D se llaman observables, cuyos dominios y rangos están en $L^2(-\infty, \infty)$ .con esta consideración se pasa definir dos operadores importantes como son:

   El Operador Posición

$$Q : D(Q) \to L^2(-\infty, \infty)$$
$$\psi \mapsto q\psi$$

   El Operador Momento

$$\mathrm{D}:D(\mathrm{D}) \to L^2(-\infty, \infty)$$
$$\psi \mapsto \tfrac{h}{2\pi i}\tfrac{d\psi}{dq}$$

   Donde $h = 6.626x10^{-27}$ es la constante de Planck

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

CONCLUSIONES

1. En el caso de un operador lineal acotado auto-adjunto $T: H \to H$, su espectro $\sigma(T)$ es compacto y real.

2. Todo operador lineal acotado auto-adjunto positivo posee una raíz cuadrada positiva única.

3. A todo operador lineal acotado auto-adjunto se le puede asociar una familia espectral de proyecciones mediante la función:

$$
\begin{aligned}
\xi : [m, M] &\to \mathcal{B}(H, H) \\
\lambda &\to E_\lambda \qquad\qquad \lambda \in [m, M]
\end{aligned}
$$

4. Si $T: H \to H$ es un operador lineal acotado auto-adjunto este se puede representar como una integral:

$$T = \int_{m^-}^{M} \lambda \, dE_\lambda = \lim_{\eta(\mathcal{P}_n) \to 0} \sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_{nj} E(\Delta_{nj}).$$

5. El resultado anterior se puede ampliar a funciones continuas $f : [m, M] \to \mathbf{R}$, resultando que:

$$f(T) = \int_{m^-}^{M} f(\lambda) \, dE_\lambda \; .$$

6. Debido a que se trabaja en espacio de Hilbert, utilizando el producto interior y la integral de Riemann-Stieltjes resulta que:

$$
\begin{aligned}
\langle Tx, y \rangle &= \int_{m^-}^{M} \lambda \, dw(\lambda) \\
\langle f(T)x, y \rangle &= \int_{m^-}^{M} f(\lambda) \, dw(\lambda) \qquad\qquad w(\lambda) = \langle E(\Delta_{nj})x, y \rangle.
\end{aligned}
$$

ISBN: 978-958-53965-3-1 DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bagarello, F., Gazeau, J.-P., Szafraniec, F. H., & Znojil, M. (2015). *Non-selfadjoint operators in quantum physics : mathematical aspects*. John Wiley & Sons,.

Bisgard, J. (2021). *Analysis and linear algebra : the singular value decomposition and applications*. American Mathematical Society.

Blanchard, P., & Bruening, E. (2003). *Mathematical Methods in Physics : Distributions, Hilbert Space Operators, and Variational Methods* (1st ed.). Birkhäuser Boston : Imprint: Birkhäuser,. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0049-9

Colombo, F., Gantner, J., & Kimsey, D. P. (2018). *Spectral Theory on the S-Spectrum for Quaternionic Operators* (1st ed.). Springer International Publishing : Imprint: Birkhäuser,. https://doi.org/10.1007/978-3-030-03074-2

Hellman, G. (2020). *Mathematics and its logics : philosophical essays*. Cambridge University Press,.

Helson, H. (1986). *The spectral theorem*. Springer-Verlag.

Kubrusly, C. S. (2012). *Spectral theory of operators on Hilbert spaces*. Birkhäuser/Springer.

Pankov, A. A. (2007). *Lecture notes on Schrödinger equations*. Nova Science Publishers. https://bit.ly/37WHODX

Sunder, V. S. (2016). *Operators on Hilbert Space* (1st ed.). Springer Singapore : Imprint: Springer,. https://doi.org/10.1007/978-981-10-1816-9

ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*