INTEGRALES DEFINIDAS E INDEFINIDAS USANDO GEOGEBRA[175]

DEFINITE AND INDEFINITE INTEGRALS USING GEOGEBRA

Miguel Angel Rivas Mamani [176]

Martin Julio Merma-Bellido[177]

Ruben Ticona Huayhua[178]

Raul Roque Huacasi[179]

Fred Torres-Cruz[180]

Pares evaluadores: Red de Investigación en Educación, Empresa y Sociedad – REDIEES.

[175] Derivado del proyecto de investigación: El GeoGebra en el aprendizaje de la integral definida e indefinida

[176] Dep. Académico de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Nacional del Altiplano, Puno Perú, mrivas@unap.edu.pe
[177] Departamento Académico de Ciencias Básicas, Universidad Nacional de Juliaca, Puno -Perú, mj.merma@unaj.edu.pe
[178] Dep. Académico de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Nacional del Altiplano, Puno Perú, rticona@unap.edu.pe
[179]Dep. Acad. de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Nacional del Altiplano, Puno Perú, rroque_23@hotmail.com
[180] Dep. Acad. de Ingeniería Estadística e Informática. Universidad Nacional del Altiplano, Puno-Perú ftorres@unap.edu..pe

ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

17. INTEGRALES DEFINIDAS E INDEFINIDAS USANDO GEOGEBRA[181]

Miguel Angel Rivas Mamani [182], Ruben Ticona Huayhua[183], Martin Julio Merma-Bellido[184], Raul Roque Huacasi[185] , Fred Torres-Cruz[186]

RESUMEN

El propósito del presente trabajo es mostrar el efecto del uso del GeoGebra como recurso didáctico en el aprendizaje de la integral definida e indefinida. Para tal fin se describen las características principales del GeoGebra, y que permite investigar diversas relaciones entre dos o más elementos de una construcción geométrica de las integrales definidas e indefinidas, comparando sus medidas. Estas comparaciones están respaldadas por herramientas de razonamiento automáticas que dan validez matemática a las inferencias establecidas.

Desde los tiempos de la educación primaria hemos estado en contacto con este problema: se nos ha enseñado cómo calcular áreas de cuadradas, de rectángulos, de triángulos, y quizás, de algunos polígonos más complicados (Pita Ruiz, 1998, p. 571). En ese contexto, para el cálculo de áreas de regiones distintas a las figuras geométricas conocidas es necesario implementar la integral de Riemann, la cual es una herramienta matemática importante para dar solución a muchos problemas de ingeniería.

Primeramente, definiremos la integral definida a partir de las sumas de Riemann, así como el teorema fundamental del cálculo, seguidamente como consecuencia de esto se definirá la integral indefinida, los diversos métodos de integración y las aplicaciones de la integral sobre el cálculo de áreas de regiones planas irregulares, estos resultados serán contrastados con la aplicación del GeoGebra para concluir que este software permite complementar el aprendizaje de las integrales y sus aplicaciones.

---

[181] Derivado del proyecto de investigación: El GeoGebra en el aprendizaje de la integral definida e indefinida

[182] Dep. Académico de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Nacional del Altiplano, Puno Perú, mrivas@unap.edu.pe
[183] Dep. Académico de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Nacional del Altiplano, Puno Perú, rticona@unap.edu.pe
[184] Departamento Académico de Ciencias Básicas, Universidad Nacional de Juliaca, Puno -Perú, mj.merma@unaj.edu.pe
[185]Dep. Acad. de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Nacional del Altiplano, Puno Perú, rroque_23@hotmail.com
[186] Dep. Acad. de Ingeniería Estadística e Informática. Universidad Nacional del Altiplano, Puno-Perú ftorres@unap.edu..pe

ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

ABSTRACT

The purpose of this paper is to show the effect of using GeoGebra as a teaching resource in learning the definite and indefinite integral. For this purpose, the main characteristics of GeoGebra are described, and that allows investigating various relationships between two or more elements of a geometric construction of definite and indefinite integrals, comparing their measurements. These comparisons are supported by automated reasoning tools that give mathematical validity to the inferences drawn.

Since the days of primary education we have been in contact with this problem: we have been taught how to calculate areas of squares, rectangles, triangles, and perhaps some more complicated polygons (Pita Ruiz, 1998, p. 571). In this context, for the calculation of areas of regions other than known geometric figures, it is necessary to implement the Riemann integral, which is an important mathematical tool to solve many engineering problems.

First we will define the definite integral from the Riemann sums, as well as the fundamental theorem of calculus, then as a consequence of this the indefinite integral will be defined, the various methods of integration and the applications of the integral on the calculation of areas of regions irregular planes, these results will be contrasted with the application of GeoGebra to conclude that this software allows to complement the learning of integrals and their applications.

PALABRAS CLAVE: Aprendizaje, GeoGebra, Integral definida, Integral indefinida.

Keywords: Definite integral, GeoGebra, Indefinite integral, Learning.

INTRODUCCIÓN

Hoy en día el uso de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) en la educación constituyen una herramienta importante en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos, ya que permiten interactuar e integrar conocimientos. Las tendencias en la enseñanza de las matemáticas actualmente destacan la importancia del uso de la tecnología como un medio que permite al estudiante obtener mayor profundidad del conocimiento matemático, para este tratamiento en los últimos años se ha venido desarrollando una gran cantidad de estudios basados en el uso del GeoGebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los diferentes niveles de educación, esto debido a que en comparación con otros software matemáticos, el GeoGebra es de fácil acceso y manipulación, por ello se considera importante que es indispensable para los docentes ser orientadores del uso de esta herramienta para dejar de ser maestros tradicionales, estar conscientes y dispuestos para aceptar los cambios e implementar la tecnología en las aulas de enseñanza en favor de los estudiantes.

El presente trabajo surge como una consecuencia del poco interés y compresión de las matemáticas, donde una de las causas es el uso de estrategias metodológicas del docente, además de las dificultades que presentan los estudiantes en la forma de resolver e interpretar problemas relacionados con las matemáticas, concretamente en el curso de cálculo que comprende las integrales definidas e indefinidas donde la representación gráfica es una herramienta fundamental para la compresión de estos conceptos.

ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

DESARROLLO

Tecnologías de la Información y Comunicación

Las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) es un término que contempla toda forma de tecnología usada para crear, almacenar, intercambiar y procesar información en sus diferentes formas, tales como datos, conversaciones de voz, imágenes fijas o en movimiento, presentaciones multimedia y otras formas, incluyendo aquellas aún no concebidas. Las Tecnologías de la Información y Comunicación se desarrollan a partir de los avances científicos desarrollados en el campo de la informática y las telecomunicaciones (Ayala & Gonzales, 2015).

Las TIC en la actualidad se han convertido en una herramienta fundamental para los procesos de enseñanza aprendizaje, información, comunicación, generación, apropiación y uso de los saberes y el desarrollo de la ciencia y el conocimiento (Rivera, 2011). La sociedad del conocimiento se encuentra en la revolución tecnológica en la información y comunicación, lo cual paulatinamente conducirá el futuro de los aprendizajes y la educación (Sánchez & Boix, 2009). En ese sentido, uno de los problemas que enfrentan las universidades en el Perú es la falta de articulación y comunicación; además de la fragmentación de las estructuras educativas en departamentos académicos, lo cual ocasiona que se tienda a trabajar de forma aislada, precisamente la importancia de las TIC enmarca la interacción sin restricciones de tiempo, cultura o lengua entre los participantes en un determinado contexto educativo. Gracias a la familiarización con las TIC los estudiantes pueden acceder a una nueva cultura donde predomina el ordenador sobre el libro o el docente, de esta forma no les sirve sólo lo que encuentran en los libros, ya que pueden aprender cada vez más por sí mismos, como también plantear problemas, planificar estrategias y resolver situaciones en permanente transformación gracias a la accesibilidad a los medio telemáticos (Sánchez & Boix, 2009). Además, las TIC permiten su uso en los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya sea presencial o a distancia, en forma uni o bidireccionalmente, propician el intercambio de roles y mensajes (Castro, Guzmán, & Casado, 2007). En otras palabras, median el proceso de comunicación entre estudiantes, docentes y los materiales educativos, también permiten distribuir información que se puede utilizar en tiempo real o ser

ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

almacenada para tener acceso a ella cuando los interesados así lo requieran, de esta manera se incrementa la posibilidad del acceso a la educación.

De acuerdo con Cabero (1998), las TIC giran en torno a tres medios básicos: la microelectrónica, la informática y las telecomunicaciones; pero giran, no sólo de forma aislada, sino lo que es más significativo, de manera interactiva, lo que permite conseguir nuevas realidades comunicativas. Hoy en día, aludir a las tecnologías de información y comunicación es abordar temáticas inherentes al internet y la informática, siendo esta uno de los ejes fundamentales. La informática tiene una relación estrecha con la educación, teniendo en cuenta que la sociedad del futuro será una sociedad fuertemente informatizada debido a que es una herramienta auxiliar de muchas materias, tal como se muestran en problemas de simulación en las ciencias puras y ciencias sociales (Ayala & Gonzales, 2015).

La introducción y uso de las TIC en los sistemas educativos es común, ya que son herramientas que se utilizan para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje, considerándose estas una competencia básica como la lectura o escritura. Así, desde un enfoque pedagógico y de una acción institucional concertada, el uso de las TIC puede ayudar a lograr que en una determinada institución más estudiantes aprendan mejor y de modo más activo (Rué, 2015). El proceso de enseñanza-aprendizaje en el aula haciendo uso de las TIC requiere de un conjunto de competencias que el docente debe adquirir con la lógica de sumar una metodología capaz de aprovechar las herramientas tecnológicas, donde la capacitación docente deberá considerarse una de las primeras opciones antes de afrontar nuevos retos educativos. En consideración de la experiencia de los profesionales que se dedican a la enseñanza de las matemáticas, las TIC constituyen un elemento eficaz en la educación, ya que permite simplificar el proceso de aprendizaje y autoaprendizaje gracias a su valor interactivo que brinda además de la facilidad con que se pueden repetir diferentes contenidos curriculares.

La actualidad nos demuestra que el acceso a las TIC es un requisito importante para participar de una sociedad tecnológica (Tello, 2017). La adopción de las TIC en el medio como acceso y continuidad tiene como punto de partida romper con las brechas digitales de una sociedad que aún no cumple con el dinamismo de adaptación, quizás en un inicio la incorporación de estos recursos ha sido resistida, sin embargo, el trascurrir del tiempo ha evidenciado que la sociedad educativa depende de un enfoque tecnológico que lo ayude a construir y adquirir conocimiento. Es un hecho que el aporte de las TIC a la educación y a la sociedad como tal es la flexibilidad y la adaptación a un entorno cada vez más cambiante, pero esto no garantiza de por sí el éxito en el aprendizaje, ya que estos recursos y medios a ser utilizados deben estar sujetos al proceso educativo, y no lo contrario.

Las TIC como herramientas añadidas a los modelos pedagógicos pueden convertirse en recursos valiosos para el aprendizaje, logrando formar estudiantes con competencias personales y profesionales idóneas para el desarrollo de un país (Prieto et al., 2011). La adaptación de las TIC en la enseñanza de las matemáticas permite a los estudiantes desarrollar la creatividad, curiosidad, así como también la capacidad para resolver problemas y tomar decisiones, consolidando su aprendizaje de una forma interactiva.

El GeoGebra

El GeoGebra es un software matemático interactivo de libre acceso desde cualquier sistema operativo que permite relacionar las distintas representaciones geométricas y algebraicas de un objeto matemático. Fue creado en 2001 por Markus Hohenwarter en la Universidad de Salzburgo, desde entonces, Markus y un equipo de desarrolladores dedicado y en continuo crecimiento han transformado este programa en uno de los principales programas informáticos pedagógicos para la educación matemática en todo el mundo (Hall & Lingefjärd, 2017, p. 448). Además, es utilizado en más de 80 países y traducido a más de 60 idiomas, incluyendo el español; en los últimos años este software se ha convertido en una herramienta muy utilizada en la investigación de la didáctica de la matemática en educación secundaria y superior, ya que permite combinar dinámica y simultáneamente la geometría, álgebra, análisis y estadística en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo como potente.

En la Figura 1 se muestra la interfaz del GeoGebra donde se pueden distinguir las siguientes zonas de trabajo: Herramientas, Barra de entrada, Vista Algebraica, Vista Gráfica, Menú y Teclado Virtual. Esta multiplicidad permite apreciar los objetos matemáticos en dos representaciones diferentes: gráfica (como en el caso de puntos, gráficos de funciones) y algebraica (como coordenadas de puntos, ecuaciones). Cada representación del mismo objeto se vincula dinámicamente a las demás en una adaptación automática y recíproca que asimila los cambios producidos en cualquiera de ellas, más allá de cuál fuera la que lo creara originalmente (Hohenwarter & Hohenwarter, 2009).

Figura 5. Interfaz del GeoGebra Clásico

Esta presentación del software nos abre la posibilidad de abordar su aplicación no solo a la geometría y álgebra, sino que también al cálculo superior. En ese sentido, facilita los procesos de aprendizaje como el concepto de derivada, el cual tradicionalmente privilegiaba los procesos algorítmicos más no la parte conceptual y geométrica, como consecuencia de ello también permite el estudio más agudo de las definiciones y aplicaciones de las integrales.

Cotic (2014), refiere que el GeoGebra por ser una herramienta de libre acceso y fácil uso en el aula, contribuye a mejorar una actividad central de la matemática, resultando un elemento muy motivador para los estudiantes. Utilizando este software se puede establecer una permanente conexión entre las expresiones algebraicas y las geométricas permitiendo abordar diferentes aspectos de la matemática a través de la experimentación y manejo de los elementos, facilitando así la realización de construcciones para deducir resultados y

ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

propiedades a partir de la observación directa. Respecto a las potencialidades del software, Tamayo (2013), resalta la posibilidad de generar conflicto cognitivo, facilidad de manejo del programa, precisión en la elaboración de gráficas y la eficiencia en su realización, además de motivar la interacción entre los estudiantes. Otra de las cualidades de esta herramienta es que permite examinar los saberes previos de los estudiantes mediante la preparación de una guía o manual que se oriente a la construcción del conocimiento, esto debido a que muchos conceptos matemáticos en un texto o una lectura son abstractos y difíciles de comprender por lo que es necesario una representación visual.

Por otro lado, el uso del GeoGebra y el empleo de metodologías en el aprendizaje permite a los docentes desarrollar competencias para la utilización de recursos y herramientas informáticas adecuadas a los conocimientos matemáticos que desean impartir en sus alumnos, de esta forma el uso adecuado del GeoGebra permite una mejor visualización, análisis e interpretación de los objetos matemáticos ayudando desde diferentes ópticas a comprenderlos de mejor manera, pero no debe entenderse como el sustituto del conocimiento sino como una herramienta que permita potenciarlo. La incorporación de este software no solo ha hecho más fáciles las representaciones gráficas, algebraicas y los cálculos matemáticos, sino que también ha cambiado la naturaleza misma de los problemas, brindando otra perspectiva para el estudio e investigación en el área de las matemáticas.

Aprendizaje

El aprendizaje es el proceso a través del cual se modifican y adquieren habilidades, destrezas, conocimientos, conductas y valores como resultado del estudio, la experiencia, la instrucción, el razonamiento y la observación. El aprendizaje de la matemática es una actividad considerada por un gran número de estudiantes como una de las materias más difíciles, exigentes y problemáticas (Mota, Oliveira, & Henriques, 2017).

A lo largo de la historia el estudio de las matemáticas se ha realizado desde perspectivas diferentes, en el periodo inicial de la matemática se produjo un enfrenamiento entre los partidarios de un aprendizaje de las habilidades matemáticas elementales basado en la práctica y el ejercicio y los que defendían que era necesario aprender unos conceptos y una forma de razonar antes de pasar a la práctica y que su enseñanza, por tanto, se debía centrar principalmente en la significación o en la comprensión de los conceptos. Según Ausubel,

ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

Novak, & Hanesian (1983), el aprendizaje por descubrimiento sucede cuando los aprendices llegan a hacer, por ellos mismos, generalizaciones sobre los conceptos o fenómenos, este descubrimiento al que se llega en clase es denominado descubrimiento guiado.

Para Piaget & Chomsky (1983), el aprendizaje es un proceso mediante el cual el sujeto, a través de la manipulación de objetos, experimentación, la interacción con las personas, genera o construye conocimiento, modificando, en forma activa, sus esquemas cognoscitivos del mundo que lo rodea. Ausubel (2002), considera que el sujeto para obtener el aprendizaje debe pasar por un proceso de reconstrucción de sus ideas, conocimientos, representaciones mentales y conceptos, además de contar con la predisposición para aprender y un material potencialmente significativo. Lo primero hace referencia al esencial deseo de aprender y lo segundo a que el material de aprendizaje esté ordenado y tenga coherencia lógica para establecer una conexión con lo que el estudiante conoce. Según Dongo (2008), el estudio del aprendizaje estuvo casi siempre vinculado a procesos repetitivos de adquisición de conocimientos y por ende a mecanismos asociativos. Por otro lado, Carretero (2009), afirma que aprender es sinónimo de comprender, el aprendizaje está estrictamente ligado a las relaciones existentes entre el nuevo conocimiento y el que ya posee el alumno.

Según Brunner (2004), plantea que el aprendizaje de conceptos matemáticos se introduce a partir de actividades simples que los alumnos puedan manipular para descubrir principios y soluciones matemáticas. Actualmente, la forma de concebir el aprendizaje matemático es de tipo estructuralista, especialmente cuando se refiere al aprendizaje de conceptos, donde se considera que aprender es alterar estructuras, y que estas alteraciones no se producen por medio de procesos simples, sino que se realizan de manera global. Algunas cualidades de este tipo de aprendizaje son a través de experiencias concretas, el aprendizaje va de lo concreto a lo abstracto. Así, la enseñanza matemática actual promueve que se trabaje con objetos concretos antes de pasar a establecer las abstracciones, cuando estas abstracciones se han consolidado entonces estamos en condiciones de emplearlas como elementos concretos. En ese sentido, se debe tener en cuenta que los conceptos matemáticos no son objetos reales, por ello debe recurrirse a sus distintas representaciones para su estudio, también es importante destacar que estas representaciones no son el objeto matemático en sí, si no es un medio que ayuda a su comprensión (Godino, Batanero, & Font, 2007).

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

Así mismo, se debe considerar que el rol del docente no necesariamente es el de transmitir o facilitar los conocimientos, sino el mediador en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Estos deben impartir las matemáticas comprendiéndolas, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de la experiencia y los saberes previos (Godino, Batanero, & Font, 2003). Por ello, aparte de contenidos y procesos, también es fundamental considerar el papel del profesor, la propia enseñanza de las matemáticas, el aprendizaje y la instrucción (Godino et al., 2003). Estos aspectos son importantes debido a que es el profesor quien proporciona el conocimiento y organiza las diferentes situaciones didácticas que pueden darse en el aula, siendo también él quien guía los aprendizajes, por lo que la capacidad de los estudiantes para aplicar este conocimiento en la resolución de problemas y buena disposición hacia las matemáticas están condicionadas por la enseñanza que encuentran en su aula.

Conforme a lo que refiere Duval (2004), el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y comprensión de textos, el acceso al conocimiento matemático no es directo, es necesario acudir a diferentes representaciones de los objetos matemáticos como expresiones, notaciones, gráficas, problemas, operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, definiciones, axiomas, teoremas, etc., para este fin propone dos tipos de representaciones las mentales y las semióticas, ésta última son representaciones notorias al sujeto, directamente visibles y observables, son producciones construidas por el empleo de signos. Aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas, además del lenguaje natural o el de las imágenes requieran la utilización de distintos registros de expresión y representación. El desarrollo de un proceso de aprendizaje matemático está relacionado con los siguientes aspectos: comprensión, establecimiento de relaciones, razonamiento, aplicación de conceptos, métodos y evaluación.

En ese sentido, una forma de introducir los conceptos de las integrales en el proceso de aprendizaje de los estudiantes del nivel superior es a través de su representación gráfica asistida por el GeoGebra, con el cual se logra una visualización de los objetos geométricos y algebraicos que están involucrados en el estudio, permitiendo relacionarlos en forma simultánea y realizar un análisis más completo.

ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

Recursos Didácticos

Los recursos didácticos son materiales de trabajo que sirven como mediadores para el proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que permite que el profesor presente los conocimientos de una manera más cercana y menos abstracta. Según Spiegel (2006), los recursos didácticos permiten dar un concepto de manera organizada a fin de complementar, respaldar y acompañar las explicaciones en clase, con su ayuda podemos ampliar, detallar procedimientos, presentar relaciones, sintetizar, o contextualizar informaciones. Atender a la diversidad del alumnado es un propósito que muchas veces no se lleva bien por el escaso tiempo con el que el profesor dispone para desarrollar los contenidos de un módulo de aprendizaje, en ese sentido los recursos didácticos son herramientas con las que podemos contar para presentar un contenido de distinta manera, con diferentes lenguajes, de esta manera abrir oportunidades equivalentes de aprender a los estudiantes que tienen diversos tipos de capacidades. Uno de los recursos utilizados en una sesión de aprendizaje son las guías didácticas, estas contienen las instrucciones a seguir y los conceptos que se desea que el alumno aprenda, su objetivo es conducir al estudiante para que construya el conocimiento de forma activa y reflexiva convirtiéndose en un material que posibilita el trabajo autónomo por parte de los estudiantes.

En toda guía o secuencia didáctica se pueden diferenciar cuatro tipos de actividades

- Apertura; tiene la finalidad de indagar los saberes previos, formas de aprender, expectativas e intereses de los estudiantes, a través de estas puede estructurarse el módulo de aprendizaje.

- Desarrollo; se usan las condiciones para que los estudiantes tengan oportunidad de desarrollar las capacidades propuestas en el módulo.

- Cierre; se propone la integración y aplicación de los aprendizajes.

- Evaluación formativa; se propone analizar tanto el proceso de aprendizaje como las capacidades desarrolladas al final del módulo.

De acuerdo a esta secuencia de actividades propuesta, se diseñan las guías didácticas asistidas por un software, estas deben contar con instrucciones detalladas que implican la

ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

realización de trabajos específicos no extensos, actividades que los estudiantes puedan desarrollar en un plazo corto de tiempo sin necesidad de tener conocimientos avanzados del software utilizado.

Integrales

La integración es un concepto fundamental del análisis matemático que permite realizar aplicaciones en diferentes ramas de la ingeniería, principalmente en problemas del cálculo de áreas de regiones irregulares y volúmenes de sólidos. En la historia de la matemática, el cálculo de áreas es uno de los problemas más antiguos que fue foco de interés de muchos de los protagonistas de la matemática griega. Desde los tiempos de la educación primaria hemos estado en contacto con este problema: se nos ha enseñado cómo calcular áreas de cuadradas, de rectángulos, de triángulos, y quizás, de algunos polígonos más complicados (Pita Ruiz, 1998, p. 571). En ese contexto, para el cálculo de áreas de regiones distintas a las figuras geométricas conocidas es necesario implementar la integral de Riemann, la cual es una herramienta matemática importante para dar solución a muchos problemas de ingeniería.

Integrales Definidas

Una partición del intervalo $[a,b]$ es un subconjunto finito de puntos $P=\{t_0,t_1,\ldots,t_n\}\subset[a,b]$ tal que $a\in P$ y $b\in P$.

Dada una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, usaremos la notación

$m=\inf\{f(x);\ x\in[a,b]\}$ y $M=\sup\{f(x);\ x\in[a,b]\}$

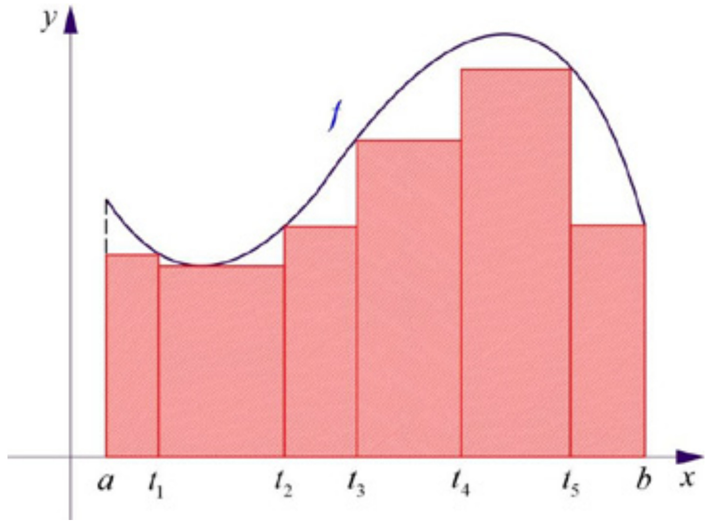
de donde tenemos $m\leq f(x)\leq M$, $\forall x\in[a,b]$

La suma inferior de f respecto a la partición P es el número

$$s(f;P)=m_1(t_1-t_0)+\ldots+m_n(t_n-t_{n-1})=\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1})$$

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

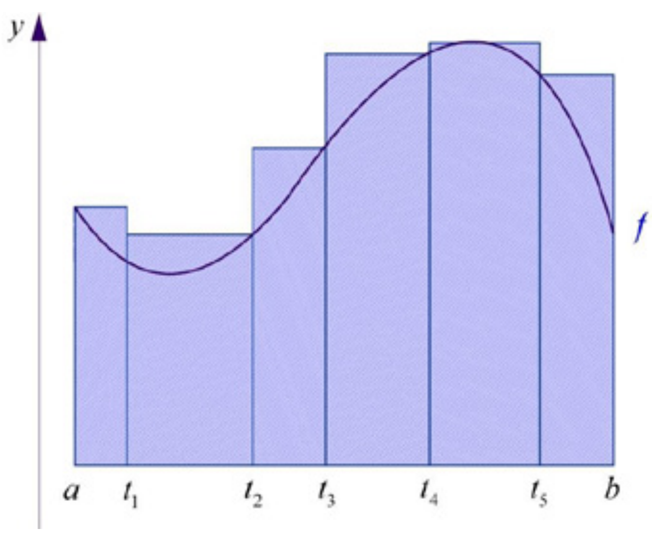
Figura 6. Suma inferior de f respecto a la partición P



La suma superior de f respecto a la partición P es el número

$$S(f;P)=M_1(t_1-t_0)+...+M_n(t_n-t_{n-1})=\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1})$$

Figura 7. Suma superior de f respecto a la partición P



La integral inferior y superior de una función acotada $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$, se definen como sigue:

$$\underline{\int_a^b f(x)dx}=\inf_P S(f;P),\quad \overline{\int_a^b f(x)dx}=\sup_P s(f;P)$$

ISBN: 978-958-53965-3-1 DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b

Donde el supremo e ínfimo se toman en el conjunto de todas las particiones P del intervalo $[a,b]$.

Definición.- Una función f se dice que es integrable en $[a,b]$ si f está acotada sobre $[a,b]$ y si

$$\underline{\int_a^b f(x)\,dx} = \overline{\int_a^b f(x)\,dx}$$

En tal caso, a este valor común se le denomina integral definida y es representada por

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema (Condición suficiente para la integrabilidad)

Toda función continua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable.

Propiedades de la integral definida

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones integrables en el intervalo $[a,b]$ y k una constante cualquiera, entonces:

- $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$
- $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
- Si $f(x)\geq 0$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- Si $f(x)\geq g(x)$, $\forall x\in[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$
- Si $c\in[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Sea $F(x)$ una función definida por:

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

Si f es continua sobre un intervalo J y si $a \in J$, entonces $F(x)$ es diferenciable sobre J y se cumple que: $F'(x)=f(x),\ \forall x \in J$

Es decir, $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x),\ \forall x \in J$

El Teorema Fundamental del Cálculo. - Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua, además $F'(x)=f(x)$ para $x\in[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

Integral Indefinida

Una antiderivada de una función $f(x)$, es una función $F(x)$

$$F'(x)=f(x)$$

Se denomina antiderivada general de $f(x)$ a la función $F(x)+C$, donde C es la constante de integración.

Definición.- Si $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$ sobre un intervalo $[a,b]$, entonces la integral indefinida de $f(x)$ es denotada por:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C,\ \forall x\in[a,b]$$

Propiedades de la integral indefinida

- $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
- $\int [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Teorema. - (Cambio de variable) Sea la integral $\int f[\psi(x)]\psi'(x)\,dx$, si llamamos $u=\psi(x)$, entonces

$$\int f[\psi(x)]\psi'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b

Métodos de integración

a) Integración por partes

Se aplica cuando en el integrando se encuentra el producto de dos funciones.

$$\int u.dv = uv - \int vdu$$

La función dv debe ser aquella que se pueda integrar inmediatamente, en algunos casos se tiene que integrar por partes más de una vez, a este tipo de problemas se denomina integral circular.

b) Integración de funciones trigonométricas

Para esta forma de integración, mencionaremos algunas identidades trigonométricas:

- $sen^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$
- $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

Integrales de la forma: $\int sen^m x \cos^n x\, dx$

- Cuando m es impar se factoriza $senx\, dx$ y los senos restantes se expresan en función de cosenos.
- Cuando m ó n son pares, utilizaremos las siguientes identidades:

$$sen^2 x = \frac{1 - \cos x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos x}{2}$$

Integrales de la forma: $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$

- Cuando n es par, poner todas las integrales como potencia de $\tan x$
- Cuando m, n es impar o par, descomponer de tal forma que aparezca $\sec x \tan x$ para integrar como potencia $\sec x$.

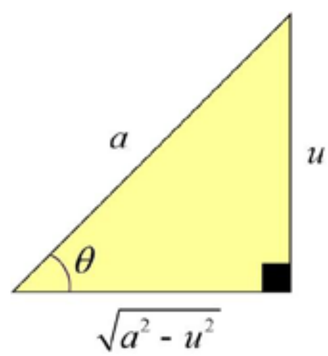
ISBN: 978-958-53965-3-1 DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b

c) Integración por sustitución trigonométrica

Si las funciones a integrar tienen forma de radicales, para simplificar los cálculos considerando $u = u(x)$, se procede hacer una sustitución trigonométrica que se presentan en los siguientes casos:

- $f(x) = \sqrt{a^2 - u^2}$

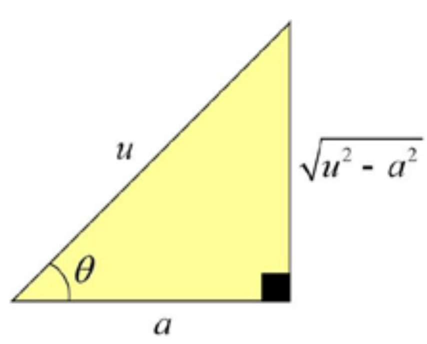
Figura 8. Triángulo notable para $f(x) = \sqrt{a^2 - u^2}$



Hacer $\frac{u}{a} = sen\theta \rightarrow u = asen\theta$, de donde $du = a\cos\theta d\theta$

- $f(x) = \sqrt{u^2 - a^2}$

Figura 9. Triángulo notable para $f(x) = \sqrt{u^2 - a^2}$

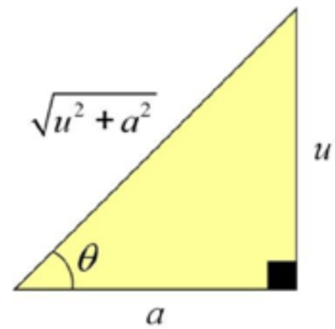


Hacer $\frac{u}{a} = \sec\theta \rightarrow u = a\sec\theta$, de donde $du = a\sec\theta\tan\theta d\theta$

- $f(x) = \sqrt{u^2 + a^2}$

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

Figura 10. Triángulo notable para $f(x)=\sqrt{u^2+a^2}$



Hacer $\frac{u}{a}=\tan\theta \rightarrow u=a\tan\theta$, de donde $du=a\sec^2\theta\, d\theta$

d) Integración de funciones racionales

Toda función racional propia se puede descomponer como suma de fracciones simples, consideremos:

$$\int f(x)dx;\ f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},\ m>n$$

Caso 1: El polinomio $Q_m(x)$ tiene factores lineales simples no repetidos, la función será descompuesta en m fracciones simples como se muestra

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_m)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+...+\frac{A_m}{x-a_m}$$

Caso 2: El polinomio $Q_m(x)$, tiene algunos factores lineales repetidos, el factor repetido será descompuesto de la siguiente forma:

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{...(x-a)^k...}=...+\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_k}{(x-a)^k}+...$$

Caso 3: El polinomio $Q_m(x)$ tiene factores cuadráticos irreducibles no repetidos:

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{...(x^2+ax+b)...}=...+\frac{Ax+B}{x^2+ax+b}+...$$

Caso 4: El polinomio $Q_m(x)$ tiene factores cuadráticos irreducibles repetidos, el factor repetido será descompuesto de la siguiente manera:

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{\dots\left(x^2+ax+b\right)^k\dots}=\dots+\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+ax+b\right)}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+ax+b\right)^2}+\dots+\frac{A_kx+B_k}{\left(x^2+ax+b\right)^k}+\dots$$

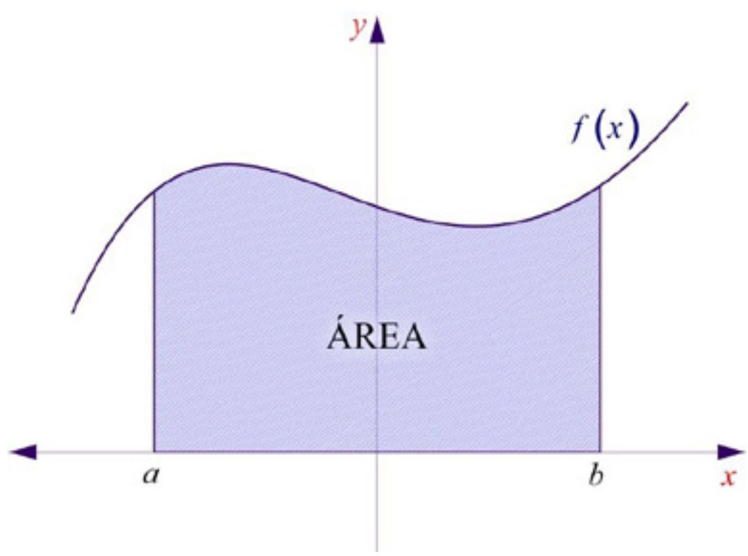
Aplicaciones en áreas de regiones planas

Parar determinar el área de una región es necesario conocer las funciones que la acotan y sus límites de integración, estas pueden presentarse en diversas situaciones debido a que las integrales pueden calcularse respecto a la variable x o y, este criterio dependerá de la forma que tenga la región en ese sentido consideraremos los siguientes casos.

a) Si $f(x)\geq 0,\ \forall x\in[a,b]$ entonces el área limitada por la gráfica de esta función, las rectas $x=a$, $x=b$ y el eje x es dada por

$$A=\int_a^b f(x)\,dx$$

Figura 11. Área bajo la gráfica de f respecto a x

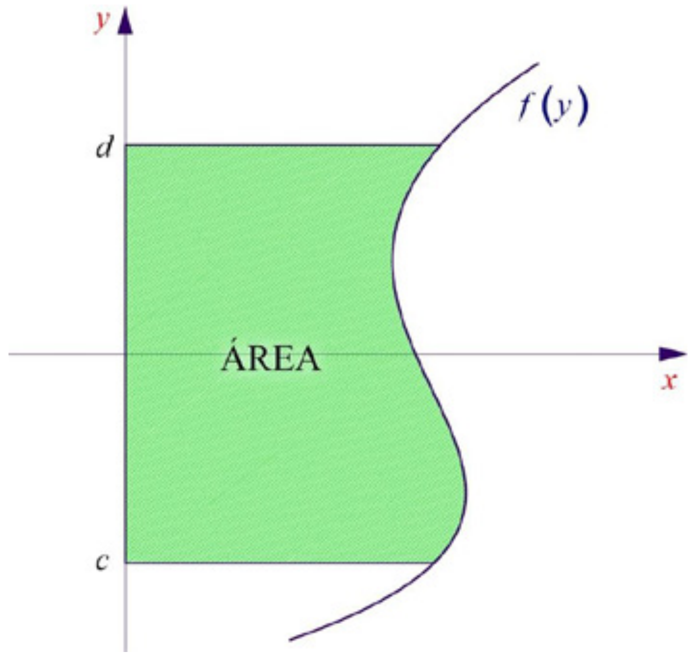


b) Si $f(y)\geq 0,\ \forall y\in[c,d]$ entonces el área limitada por la gráfica de esta función, las rectas $y=c$, $y=d$ y el eje y es dada por

$$A=\int_c^d f(y)\,dy$$

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b

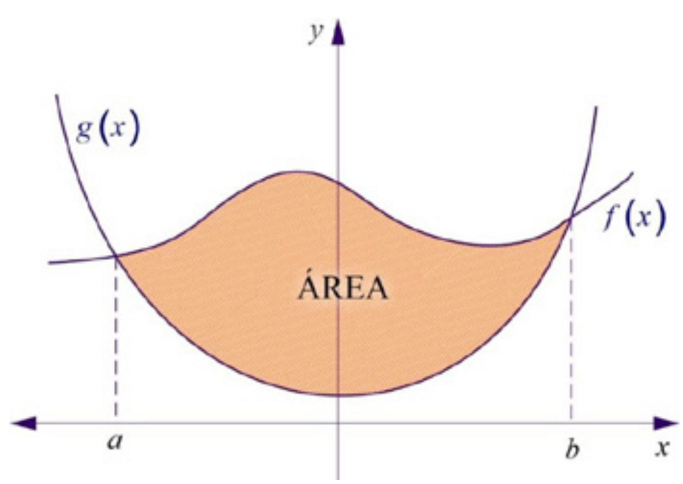
Figura 12. Área bajo la gráfica de f respecto a y



c) Si $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b]$ entonces el área limitada por las gráficas de estas dos funciones es dada por

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Figura 13. Área entre las gráficas de f y g respecto a x

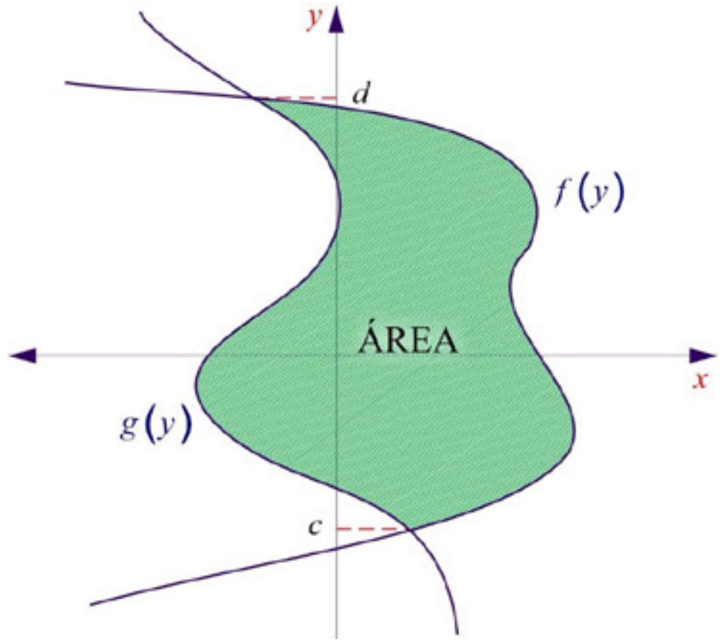


d) Si $f(y) \geq g(y), \forall y \in [c,d]$ entonces el área limitada por las gráficas de estas dos funciones es dada por

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b

$$A=\int_{c}^{d}\left[f(y)-g(y)\right]dy$$

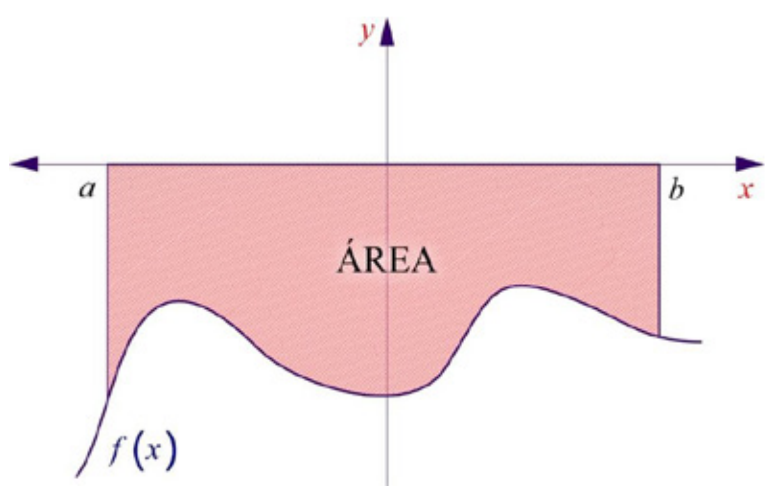
Figura 14. Área entre las gráficas de f y g respecto a y



OBSERVACIÓN

Dada la función $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)\leq 0,\ \forall x\in[a,b]$, entonces el área de la región es dada por $A=-\int_{a}^{b}f(x)dx$

Figura 15. Área sobre la función negativa f

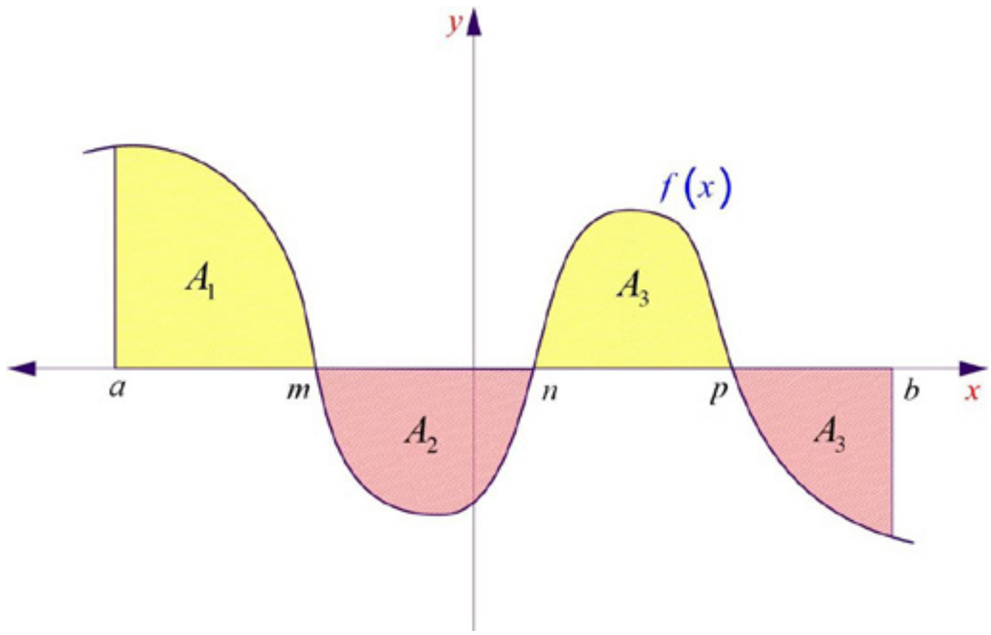


La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*
Eidec EDITORIAL

De esta forma, es posible extender el concepto de área apara una situación más general.

$$A=\int_a^m f\left(x\right)dx-\int_m^n f\left(x\right)dx+\int_n^p f\left(x\right)dx-\int_p^b f\left(x\right)dx$$

Figura 16. Área de f para regiones positivas y negativas



$$A=A_1+A_2+A_3+A_4$$

donde A es la suma de las áreas de las regiones que están encima del eje x menos la suma de las regiones que están por debajo del mismo eje.

La Investigación Científica como Creadora de Nuevo Conocimiento
ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Luego de la aplicación del GeoGebra en el aprendizaje de la integral definida e indefinida, los resultados nos permitieron alcanzar los objetivos previstos. Se demostró que existe un efecto significativamente positivo entre la aplicación del GeoGebra como recurso didáctico y el aprendizaje de la integral definida e indefinida

Las guías didácticas utilizadas en el presente trabajo facilitaron a los estudiantes el manejo del GeoGebra influenciando positivamente en el interés por la aplicación de las integrales sobre el cálculo de áreas, técnicas de integración e interpretación gráfica de estos conceptos, lo cual se verifica también en diversos estudios orientados a la implementación de talleres didácticos utilizando el GeoGebra (Espina & Santana, 2015; Narváez, 2015; Pabón Gómez et al., 2015; Tamayo, 2013) ponen de manifiesto que es fundamental el uso de estos recursos en ambientes interactivos, ya que favorecen la visualización de los objetos matemáticos estudiados motivando la creatividad e investigación. Por otro lado, Esguerra et al. (2018), sostiene que el GeoGebra no es el único software utilizado para la enseñanza de las matemáticas, ya que el Matlab ofrece similares características, sin embargo dentro del contexto educativo donde se desarrolló esta investigación es más factible trabajar con el GeoGebra por su accesibilidad y comodidad para los estudiantes.

Según Rodriguez (2018) en el análisis de la influencia del GeoGebra en el aprendizaje de la circunferencia analítica en las dimensiones: ecuación canónica, ecuación ordinaria, ecuación general, ecuación tangencial donde precisa un resultado positivo en cada una de estas, en contraste con la presente investigación muestra la eficacia del GeoGebra en el aprendizaje de la integral.

De acuerdo a la estrategia didáctica expuesta en este trabajo, se determinó que en relación con el método tradicional aplicado en el grupo control, existe una evidente eficacia del uso del GeoGebra como recurso didáctico en el grupo experimental, permitiendo relacionar la parte geométrica y algebraica con facilidad, lo cual posibilitó la mejora significativa del aprendizaje de la integral.

ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ausubel, D. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva*.

Ausubel, D., Novak, J., & Hanesian, H. (1983). *Teoría del aprendizaje significativo*. Trillas.

Ayala, E., & Gonzales, S. (2015). *Tecnologías de la Información y la Comunicación* (Universidad Inca Garcilazo de la Vega, Ed.). Lima.

Baltodano, W. (2019). *El uso del software Geogebra en el aprendizaje de las secciones cónicas en matemática básica en la Facultad de Ingeniería de una Universidad Privada de Lima Metropolitana*. Universidad Nacional Enrique Guzman y Valle.

Brunner, J. (2004). *Desarrollo Congnitivo y Educación*. Madrid: Morata.

Cabero, J. (1998). *Impacto de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación en las organizaciones educativas*. Granada: Grupo Editorial Universitario.

Cabero, J. (2006). Bases pedagógicas del e-learning. *RUSC. Universities and Knowledge Society Journal*, *3*(1), 1–10. https://doi.org/10.7238/rusc.v3i1.265

Carretero, M. (2009). Constructivismo y Educación. In *Paidos*.

Castro, S., Guzmán, B., & Casado, D. (2007). Las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje. *Laurus*, *23*(23), 213–234. https://doi.org/10.33262/cienciadigital.v3i2.6.575

Choque, G. (2013). *Influencia del uso del software Geogebra en la resolución de problemas de geometría de los estudiantes de cuarto de secundaria en la I.E. La Cantuta, Distrito San Luis 2013*.

Cotic, N. (2014). GeoGebra como puente para aprender matemática. *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación GeoGebra*, 1–9. Retrieved from https://www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/1179.pdf

Dongo, A. (2008). La teoría del aprendizaje de Piaget y sus consecuencias para la praxis educativa. *Revista de Investigación En Psicología*, *11*(1), 167–181. https://doi.org/10.15381/rinvp.v11i1.3889

Duval, R. (2004). *Los registros semióticos de representación en matemática*. Colombia: Universidad del Valle.

Esguerra, B., González, N., & Acosta, A. (2018). Mathematical software tools For teaching of complex numbers TT - Ferramentas de software matemático para o ensino de números complexos TT - Herramientas de software matemático para la enseñanza de números complejos. *Revista Facultad de Ingeniería*, *27*(48), 79–89. https://doi.org/10.19053/01211129.v27.n48.2018.8403

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para maestros* (2nd ed.). Granada: Universidad de Granada.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39 (1-2)*(January 2002), 127–135.

Hall, J., & Lingefjärd, T. (2017). *Mathematical Modeling: Applications with GeoGebra*. Nueva York: Wiley.

Hohenwarter, M., & Hohenwarter, J. (2009). Documento de Ayuda de GeoGebra Manual Oficial de la versiòn 3.2. *Geogebra.Org*, (45), 13.

Mota, A., Oliveira, H., & Henriques, A. (2017). El desarrollo de la capacidad de Resiliencia Matemática: La voz de los estudiantes sobre el uso de las TIC en la aula. *Electronic Journal of Research in Education Psychology*, *14*(38), 67–88. https://doi.org/10.25115/ejrep.38.15041

Narváez, J. (2015). Estudiando las funciones polinómicas con el software educativo Geogebra. *Opcion*, *31*(Special Issue 3), 897–906.

Pabón, J., Nieto, Z., & Gómez, C. (2015). Modelación matemática y GeoGebra en el desarrollo de competencias en jóvenes investigadores. *Revista Logos, Ciencia & Tecnología*, *7*(1), 65–70. https://doi.org/10.22335/rlct.v7i1.257

Piaget, J., & Chomsky, N. (1983). *Teorías del lenguaje, teorías del aprendizaje*. Barcelona: Grijalbo.

ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*

Pita, C. (1998). *Cálculo en una variable*. México: Prentice-Hall Hispanoamerica.

Prieto, V., Quiñonez, I., Ramirez, G., Fuentes, Z., Labrada, T., Perez, O., & Montero, M. (2011). Impacto de las tecnologías de la información y las comunicaciones en la educación y nuevos paradigmas del enfoque educativo. *Educación Médica Superior*, *25*, 95–102.

Rodriguez, V. (2018). *Aplicación Software Geogebra en el aprendizaje de la circunferencia analítica en estudiantes del II ciclo de Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad Enrique Guzmán y Valle*. Universidad Nacional de Educacion Enrique Guzman y Valle.

Rué, J. (2015). *Entornos de aprendizaje digitales y calidad en la educación superior*. Barcelona: Oberta UOC.

Sánchez, A., & Boix, J. (2009). La Sociedad del Conocimiento y las TIC: Una inmejorable oportunidad para el cambio docente. *Revista de Medios y Educación*, 179–204.

Spiegel, A. (2006). *Planificando clases interesantes. Itinerarios para combinar recursos didacticos*. Buenos Aires.

Tamayo, E. (2013). Implicaciones didácticas de Geogebra sobre el aprendizaje significativo de los tipos de funciones en estudiantes de secundaria. *Apertura*, *5*, 58–69.

Tamayo, M. (1997). *El proceso de la investigación cuantitativa*. México: Limusa.

Tello, E. (2017). Las tecnologías de la información y comunicaciones (TIC) y la brecha digital: su impacto en la sociedad de México. *Universities and Knowledge Society Journal*, *4*, 1–8. Retrieved from http://rusc.uoc.edu/rusc/es/index.php/rusc/article/view/v4n2-tello.html

ISBN: 978-958-53965-3-1 *DOI: https://doi.org/10.34893/i1455-6002-3296-b*